Der Dirichletsche Primzahlsatz

Fachseminar Zahlentheorie an der Universität Konstanz bei
Prof. Dr. Salma Kuhlmann
Autor: Daniel Happ
Datum des Vortrags: 26.05.2021

Supervisor
Dr. Sebastian Krapp

Abstract

Der Vortrag dreht sich um den Dirichletschen Primzahlsatz und dessen Beweis. Der hier vorgestellte Beweis stammt aus dem Bereich der analytischen Zahlentheorie, welche Fragestellungen über natürliche oder ganze Zahlen mithilfe der Analysis untersucht. Der Beweis des Dirichletschen Primzahlsatzes war grundlegend für die Entwicklung der analytischen Zahlentheorie. Neben dem Beweis ist es Ziel dieses Vortrages verschiedene Konzepte aus diesem Bereich vorzustellen und aufzuzeigen, wie diese zur Beantwortung von Fragestellungen aus der Arithmetik verwendet werden können. Inbesondere thematisiert werden Dirichlet (L)-Reihen, Euler-Produktdarstellungen von diesen und Dirichlet-Charaktere.

Stand: 10. September 2021

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung **1**

2 Elemente der analytischen Zahlentheorie **2**

3 Beweis des Primzahlsatzes **6**

1 Einleitung

Der Dirichletsche Primzahlsatz ist ein Satz aus der Zahlentheorie. Er stellt die Existenz von unendlich vielen Primzahlen mit gewissen Eigenschaften sicher.

Satz 1.1. *(Dirichletscher Primzahlsatz). Seien $a, q \in \mathbb{N}$ mit $\mathrm{ggT}(a, q) = 1$. Dann gibt es unendlich viele Primzahlen der Form $a + mq$ mit $m \in \mathbb{N}_0$. Anders ausgedrückt gibt es unendlich viele $p \in \mathbb{P}$ mit $p \equiv a \bmod q$.*

Obiger Satz lässt sich in dieser allgemeinen Form (bisher) nicht „einfach“ mit arithmetischen Mitteln beweisen [4, S. 83]. In einigen Spezialfällen ist dies jedoch möglich, was wir hier exemplarisch an zwei einfachen Beispielen verdeutlichen wollen.

Lemma 1.2. *Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $2m + 1$, $m \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. Jede Primzahl $p \neq 2$ ist ungerade, also von obiger Form. Zudem gibt es unendlich viele Primzahlen. □

Wenn auch sehr elementar, so lässt obiger Beweis bereits erkennen, dass eine explizite Angabe der $m \in \mathbb{N}_0$ nicht erwartet werden kann. Dies entspräche im Fall $a = 1, q = 2$ einer „Formel“ für alle oder zumindest unendlich viele ungerade Primzahlen.

Lemma 1.3. *Es gibt unendlich viele Primzahlen der Form $4m + 1$, $m \in \mathbb{N}_0$.*

Beweis. Wir geben den Beweis aus [4, S. 83]. Wir zeigen hierzu zunächst für $x \in \mathbb{N}_0$, dass $x^2 + 1$ keinen ungeraden Primteiler p mit $p \equiv 3 \mod 4$ besitzt. Sei hierzu $p \in \mathbb{P}$ ungerade mit $p \mid x^2 + 1$. Offenbar gilt $p \nmid x$. Es folgt $\overline{x} \neq 0$ in $\mathbb{Z}_p$ und wir erhalten mit dem kleinen Fermatschen Satz

$$1 \equiv x^{p-1} = \left(x^2\right)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \mod p\,.$$

Da $p \neq 2$ erhalten wir $\overline{-1} \neq \overline{1}$ in $\mathbb{Z}_p$ und daher ist $\frac{p-1}{2}$ gerade. Es folgt $p \equiv 1 \mod 4$. Zwecks Widerspruch nehmen wir nun an, dass es nur endlich viele Primzahlen $p_1, \ldots, p_r$ mit $p_i \equiv 1 \mod 4$ für alle $i = 1, \ldots, r$ gibt. Setze $P := (2p_1 \cdot \ldots \cdot p_r)^2 + 1$ und sei $p \in \mathbb{P}$ ein Primteiler von P. Dann gilt nach Konstruktion $p \neq 2$ und $p \neq p_i$ für alle i. Aus obiger Vorüberlegung folgt also, dass $p \equiv 1 \mod 4$. Insbesondere haben wir eine weitere Primzahl der gesuchten Form gefunden, ein Widerspruch. □

Wir beenden diesen Abschnitt mit einer kurzen Bemerkung.

Bemerkung 1.4. *Die Voraussetzung in Satz 1.1 ist auch notwendig. Ist nämlich $r \geq 2$ ein $\mathrm{gT}(a, q)$, so teilt r auch $a + mq$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Insbesondere sind diese nicht prim.*

Das Ziel ist es nun, Satz 1.1 in seiner allgemeinen Form zu beweisen. Die vorgestellten Methoden stammen aus der analytischen Zahlentheorie. Wir folgen hier im Wesentlichen [1, 4]. Dieser Beweis geht auf Dirichlet selbst zurück, enthält aber Abweichungen, die von Franz Mertens stammen [1, S. 39], [4, S. 83].

2 Elemente der analytischen Zahlentheorie

Zunächst benötigen wir einige Grundlagen zu arithmetischen Funktionen. Da diese Thema eines eigenen Vortrags sind, geben wir die zugehörigen Resultate hier ohne Beweis an.

Definition 2.1. *Eine Abbildung $f\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ heißt arithmetische Funktion. Die Menge der arithmetischen Funktionen bezeichnen wir mit $\mathscr{A} := \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$. Die arithmetische Funktion f heißt multiplikativ, falls $f \neq 0$ und $f(mn) = f(m)f(n)$ für alle $m, n \in \mathbb{N}$ mit $\operatorname{ggT}(m,n) = 1$ gilt. Gilt diese Eigenschaft sogar für alle $m, n \in \mathbb{N}$, so heißt f vollständig multiplikativ.*

Beispiel 2.2. *Die eulersche Phi-Funktion $\varphi\colon \mathbb{N} \to \mathbb{C}$, $\varphi(n) := \begin{cases} |\mathbb{Z}_n^\times|, n \geq 2, \\ 1,\ n = 1, \end{cases}$ ist multiplikativ, aber nicht vollständig multiplikativ.*

Beweis. Übungsblatt 1 der Algebra I im Wintersemester 2020/2021. □

Definition 2.3. *Sei $f \in \mathscr{A}$. Dann heißt (der zunächst formale Ausdruck) $\sum_{n=1}^{\infty} f(n)n^{-s}$ die zugehörige Dirichlet-Reihe in der „Unbestimmten“ s.*

Definition 2.4. *Sind $f, g \in \mathscr{A}$, so definieren wir die Faltung $f * g \in \mathscr{A}$ von f und g durch $(f * g)(n) := \sum_{k \leq n, k|n} f(k) g\left(\frac{n}{k}\right)$ für $n \in \mathbb{N}$.*

Proposition 2.5. *Sind $f, g \in \mathscr{A}$ multiplikativ, so ist dies auch $f * g$.*

Proposition 2.6. *Seien $a, b \in \mathscr{A}$, $s \in \mathbb{C}$, so dass die zugehörigen Dirichlet-Reihen in s absolut konvergieren. Dann gilt $\left(\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}\right)\left(\sum_{n=1}^{\infty} b(n)n^{-s}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} (a * b)(n) n^{-s}$.*

Als nächstes wollen die Konvergenz im Sinne der Analysis von Dirichlet-Reihen charakterisieren. Dies ermöglicht eine Untersuchung der „diskreten“ Funktion $f \in \mathscr{A}$ mit analytischen Methoden. Hierfür nutzen wir die partielle Summation.

Proposition 2.7. *(partielle Summation). Seien $(c_n)_n \subseteq \mathbb{C}$, $a, b \in \mathbb{R}$ mit $b \geq a$ und $g\colon [a,b] \to \mathbb{C}$ stetig differenzierbar. Setze $C(x) := \sum_{a \leq n \leq x} c_n$ für $x \in [a,b]$. Dann gilt*

$$\sum_{a \leq n \leq b} c_n g(n) = C(b)g(b) - \int_a^b C(x) g'(x) \,\mathrm{d}x \,.$$

Beweis. Wir berechnen

$$\begin{aligned} C(b)g(b) - \sum_{a \leq n \leq b} c_n g(n) &= \sum_{a \leq n \leq b} c_n (g(b) - g(n)) = \sum_{a \leq n \leq b} c_n \left(\int_n^b g'(x) \,\mathrm{d}x \right) \\ &= \sum_{a \leq n \leq b} c_n \left(\int_a^b \mathbb{1}_{[n,b]}(x) g'(x) \,\mathrm{d}x \right) \\ &= \int_a^b \left(\sum_{a \leq n \leq b} c_n \mathbb{1}_{[n,b]}(x) \right) g'(x) \,\mathrm{d}x = \int_a^b C(x) g'(x) \,\mathrm{d}x \,. \end{aligned}$$

□

Satz 2.8. *Sei $a \in \mathscr{A}$ und $s_0 \in \mathbb{C}$, so dass die Dirichlet Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a(n)n^{-s}$ in s_0 konvergiert. Dann konvergiert die Reihe gleichmäßig auf jedem Kompaktum $K \subseteq \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)\}$ (lokal gleichmäßige Konvergenz). Insbesondere konvergiert die Reihe auf der Halbebene $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)\}$ und ist dort eine stetige und holomorphe Funktion.*

Beweis. Vgl. [4, S. 64 f.]. Sei $K \subseteq \{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)\}$ kompakt. Setze $c := \min_{s\in K} \operatorname{Re}(s) > \operatorname{Re}(s_0)$ und $R := \max_{s\in K} |s - s_0|$. Seien $\varepsilon > 0$ und $s \in K$. Da die Dirichlet-Reihe in s_0 konvergiert, gibt es ein $N_0 \in \mathbb{N}$, sodass $|\sum_{n=M}^{N} a(n)n^{-s_0}| < \varepsilon$ für alle $N, M \geq N_0, N \geq M$. Mit partieller Summation erhalten wir für solche N, M

$$\begin{aligned}\sum_{n=M}^{N} a(n)n^{-s} &= \sum_{n=M}^{N} (a(n)n^{-s_0})n^{s_0-s} \\ &= N^{s_0-s} \sum_{n=M}^{N} a(n)n^{-s_0} - \int_M^N \left(\sum_{M\leq n\leq x} a(n)n^{-s_0} \right) (s - s_0)x^{s_0-s-1}\, \mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Mit der Dreiecksungleichung folgt

$$\begin{aligned}\left| \sum_{n=M}^{N} a(n)n^{-s} \right| &\leq \varepsilon|N^{s_0-s}| + \varepsilon|s - s_0| \int_M^N x^{\operatorname{Re}(s_0-s)-1}\, \mathrm{d}x \\ &= \varepsilon \left(N^{\operatorname{Re}(s_0-s)} + \frac{|s_0 - s|}{\operatorname{Re}(s_0 - s)} \left(N^{\operatorname{Re}(s_0-s)} - M^{\operatorname{Re}(s_0-s)} \right) \right) \\ &\leq \varepsilon \left(1 + \frac{R}{c - \operatorname{Re}(s_0)} \right)\,.\end{aligned}$$

Im letzten Schritt haben wir $\operatorname{Re}(s_0 - s) \leq 0$ verwendet. Da diese Abschätzung uniform in s ist, ist die Konvergenz gleichmäßig auf K. Daher ist die durch die Dirichlet-Reihe definierte Funktion stetig. Die Konvergenz auf der Halbebene folgt nun daraus, dass K beliebig war.
Jede Partialsumme der Dirichlet-Reihe ist eine holomorphe Funktion. Nach dem Konvergenzsatz von Weierstraß aus der Funktionentheorie (siehe [3, S. 96]) ist also auch die durch die Dirichlet-Reihe definierte Funktion holomorph und die Ableitung ergibt sich durch differenzieren der Summanden. □

Bemerkung 2.9. *Satz 2.8 impliziert, dass jede Dirichlet-Reihe eine Konvergenzabszisse σ_c besitzt, d. h. eine reelle Zahl σ_c, so dass die Dirichlet-Reihe für $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \sigma_c$ konvergiert und für $\operatorname{Re}(s) < \sigma_c$ divergiert. Konvergiert die Reihe nirgends, so setzen wir $\sigma_c := \infty$. Konvergiert die Reihe auf ganz $\mathbb{C}$, so definiere $\sigma_c := -\infty$.*

Beispiel 2.10. *(Riemannsche Zetafunktion) Die Riemannsche Zetafunktion ist die zu $a(n) = 1$ gehörige Dirichlet-Reihe, d. h. $\zeta(s) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^s}$. Für $\operatorname{Re}(s) > 1$ konvergiert die Reihe absolut und gleichmäßig auf der jeder Halbebene $\{s \in \mathbb{C} \mid \operatorname{Re}(s) > c\}$ mit $c > 1$.*

Beweis. Sei $c > 1$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > c$. Dann gilt $\left|\frac{1}{n^s}\right| = \frac{1}{n^{\operatorname{Re}(s)}} \leq \frac{1}{n^c}$. Daher (vgl. [2, S. 58])

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{1}{n^s}\right| \leq \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^c} = \sum_{j=0}^{\infty}\sum_{n=2^j}^{2^{j+1}-1}\frac{1}{n^c} \leq \sum_{j=0}^{\infty}\underbrace{\left(2^{j+1}-1-2^j\right)}_{2^j-1}\frac{1}{2^{jc}} \leq \sum_{j=0}^{\infty}\frac{1}{2^{(c-1)j}} = \frac{1}{1-\frac{1}{2^{c-1}}} < \infty\,.$$

Dies zeigt die absolute und gleichmäßige Konvergenz. □

Als nächstes zeigen wir, dass für eine absolut konvergente Dirichlet-Reihe eine Darstellung dieser als „unendliches Produkt“ existiert.

Satz 2.11. *Sei $f \in \mathscr{A}$ multiplikativ und $s \in \mathbb{C}$, so dass $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}$ absolut konvergiert. Dann gilt*

$$\prod_{p\in\mathbb{P}}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{f(p^k)}{p^{ks}} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s}\,.$$

Ist f sogar vollständig multiplikativ, so gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(n)}{n^s} = \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(\frac{1}{1-f(p)p^{-s}}\right)\,.$$

Beweis. Siehe [1, S. 24]. Beachte zusätzlich noch die Definition und das Kriterium für absolute Konvergenz von unendlichen Produkten in [3, S. 216, S. 219]. Letzteres stellt die Existenz obiger Ausdrücke im Sinne dieser Definition sicher. □

Beispiel 2.12. *Die arithmetische Funktion $a(n) = 1$ ist vollständig multiplikativ. Die absolute Konvergenz aus Beispiel 2.10 und Satz 2.11 liefern die Produktdarstellung der Riemannschen Zetafunktion*

$$\zeta(s) = \prod_{p\in\mathbb{P}}\left(1-p^{-s}\right)^{-1}$$

für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Definition 2.13. *Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Ein Gruppenhomomorphismus $\chi\colon G \to \mathbb{C}^\times$ heißt Charakter. Die Menge aller Charaktere bildet bezüglich der punktweisen Multiplikation eine abelsche Gruppe $\hat{G}$. Das neutrale Element $\chi_0 \in \hat{G}$ heißt Hauptcharakter und erfüllt $\chi_0(g) = 1$ für alle $g \in G$.*

Bemerkung 2.14. *Wir schreiben die Verknüpfung einer endlichen abelschen Gruppe G nachfolgend stets multiplikativ, also mit neutralem Element $1 \in G$. Für $g \in G$ sei $|g|$ die Gruppenordnung von g.*
Ist $\chi \in \hat{G}$ ein Charakter wie in Definition 2.13, so gilt für $g \in G$: $|\chi(g)|^{|g|} = |\chi(g^{|g|})| = |\chi(1)| = 1$. Also gilt $|\chi(g)| = 1$.

Wir wollen nun die Gruppe $\hat{G}$ genauer charakterisieren. Der nachfolgende Satz ist eine direkte Folgerung aus dem Hauptsatz über endliche abelsche Gruppen, welcher die Existenz einer Zerlegung einer abelschen Gruppe in zyklische Untergruppen sicherstellt. Auf diesen soll hier aber nicht genauer eingegangen werden. Wir geben den nachfolgenden Satz 2.15 daher ohne Beweis an.

Satz 2.15. *Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Dann sind die Gruppen G und $\hat{G}$ isomorph. Für alle $g \in G$ mit $g \neq 1$ gibt es ein $\psi \in \hat{G}$ mit $\psi(g) \neq 1$.*

Beweis. Siehe z.B. [1, S. 33 f.]. □

Korollar 2.16. *Sei G eine endliche abelsche Gruppe. Dann gelten die Charakterrelationen*

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = \begin{cases} |G|, & \textit{falls } g = 1, \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases} \tag{2.1}$$

$$\sum_{g \in G} \chi(g) = \begin{cases} |G|, & \textit{falls } \chi = \chi_0, \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases} \tag{2.2}$$

Beweis. Wir beweisen die obere Charakterrelation 2.1, die andere zeigt man analog. Sei $g \in G$. Ist $g = 1$, so gilt offenbar $\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = |\hat{G}| = |G|$. Im letzten Schritt haben wir Satz 2.15 verwendet. Da G und $\hat{G}$ isomorph sind, haben sie insbesondere die gleiche Kardinalität. Sei nun $g \neq 1$. Nach Satz 2.15 gibt es ein $\psi \in \hat{G}$ mit $\psi(g) \neq 1$. Dann gilt wegen $\psi\hat{G} = \hat{G}$

$$\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = \sum_{\chi \in \hat{G}} \psi(g)\chi(g) = \psi(g) \sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g)\,.$$

Wegen $\psi(g) \neq 1$ folgt $\sum_{\chi \in \hat{G}} \chi(g) = 0$. □

Definition 2.17. *Sei $q \in \mathbb{N}$ und G die (multiplikative) Einheitengruppe von $\mathbb{Z}_q$. Sei $\chi \in \hat{G}$ ein Charakter. Dann heißt die (ebenfalls mit χ bezeichnete) arithmetische Funktion*

$$\chi(n) := \begin{cases} \chi(n + q\mathbb{Z}), & \mathrm{ggT}(n, q) = 1, \\ 0, & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dirichlet-Charakter $\bmod q$.

Lemma 2.18. *Sei $q \in \mathbb{N}$. Ein Dirichlet-Charakter $\chi \bmod q$ ist vollständig multiplikativ und q-periodisch.*

Beweis. Seien $n, m \in \mathbb{N}$. Gilt $\mathrm{ggT}(nm, q) = 1$, so folgt $\mathrm{ggT}(n, q) = 1$ und $\mathrm{ggT}(m, q) = 1$ und damit $\chi(nm) = \chi(nm + q\mathbb{Z}) = \chi(n + q\mathbb{Z})\chi(m + q\mathbb{Z}) = \chi(n)\chi(m)$. Gilt stattdessen $\mathrm{ggT}(nm, q) > 1$, so gibt es ein $p \in \mathbb{P}$ mit $p \mid nm$ und $p \mid q$. Es folgt $p \mid n$ oder $p \mid m$, also $\mathrm{ggT}(n, q) > 1$ oder $\mathrm{ggT}(m, q) > 1$ und daher $\chi(nm) = 0 = \chi(n)\chi(m)$.
Die Periodizität folgt aus $\mathrm{ggT}(n, q) = \mathrm{ggT}(n + q, q)$ und $(n + q) + q\mathbb{Z} = n + q\mathbb{Z}$. □

Bemerkung 2.19. *Sind $n, q \in \mathbb{N}$ und $\chi \neq \chi_0$ ein Dirichlet-Charakter $\bmod q$, so gilt wegen den Charakterrelationen 2.16 und $|\chi(i)| \leq 1$ für $i \in \mathbb{N}$ (siehe Bemerkung 2.14),* *dass* $|\sum_{i=1}^{n}\chi(i)| \leq q$. *Insbesondere ist die Funktion* $X\colon [1,\infty) \to \mathbb{C}, X(x) := \sum_{n\leq x}\chi(n)$ *durch* q *beschränkt.*

3 Beweis des Primzahlsatzes

Ziel dieses Abschnittes ist nun der Beweis des Dirichletschen Primzahlsatzes 1.1. Die Strategie ist hierbei nachzuweisen, dass die Reihe

$$\sum_{\substack{p\,\in\,\mathbb{P}\\ p\,\equiv\, a \bmod q}} \frac{1}{p}$$

divergiert. Zentral ist hierfür die Untersuchung der zu einem Dirichlet-Charakter gehörigen Dirichlet-Reihe und ihr Verhalten für $s = 1$.
Nachfolgend seien stets $q, a \in \mathbb{N}$, $\mathrm{ggT}(a,q) = 1$ und χ ein Dirichlet-Charakter $\bmod q$.

Definition 3.1. *(L-Funktion) Die zu* χ *zugehörige Reihe* $L(s,\chi) := \sum_{n=1}^{\infty}\chi(n)n^{-s}$ *heißt Dirichletsche L-Funktion (von* χ*).*

Proposition 3.2. *Sei* $\chi \neq \chi_0$ *ein Dirichlet-Charakter* $\bmod q$*. Dann konvergiert die Dirichlet-Reihe für* $\mathrm{Re}(s) > 0$.

Beweis. Wir führen eine partielle Summation aus. Sei X wie in Bemerkung 2.19 definiert. Dann gilt für $N, M \in \mathbb{N}$ mit $M > N$ und $s \in \mathbb{C}$ mit $\mathrm{Re}(s) > 0$:

$$\begin{aligned}\sum_{N\leq n\leq M}\chi(n)n^{-s} &= \sum_{1\leq n\leq M}\chi(n)n^{-s} - \sum_{1\leq n\leq N-1}\chi(n)n^{-s}\\ &= X(M)M^{-s} - X(N-1)(N-1)^{-s} + s\int_{N-1}^{M} X(x)x^{-s-1}\,\mathrm{d}x\end{aligned}$$

$$\left|\int_{N-1}^{M} X(x)x^{-s-1}\right| \leq q\int_{N-1}^{M} x^{-\mathrm{Re}(s)-1} = \frac{q}{\mathrm{Re}(s)}\left((N-1)^{-\mathrm{Re}(s)} - M^{-\mathrm{Re}(s)}\right).$$

Die rechte Seite in der ersten obigen Gleichung wird für hinreichend großes N also beliebig klein, d. h. die Reihe konvergiert. □

Bemerkung 3.3. *Für* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *konvergiert die Reihe* $L(s,\chi)$ *sogar absolut (auch für* $\chi = \chi_0$*). Dies folgt direkt aus* $|\chi(n)| \leq 1$, $n \in \mathbb{N}$ *und der absoluten Konvergenz der Zetafunktion. Aus der vollständigen Multiplikativität der Dirichlet-Charaktere erhalten wir für* $\mathrm{Re}(s) > 1$ *die Produktdarstellung (siehe 2.11)*

$$L(s,\chi) = \prod_{p\in\mathbb{P}}(1-\chi(p)p^{-s})^{-1}.$$

Für den Hauptcharakter χ_0 *gilt nach Definition* $\chi_0(p) = \begin{cases}0, & p \mid q,\\ 1, & \textit{sonst.}\end{cases}$ *In diesem Fall* *ergibt sich aus obiger Darstellung*

$$L(s,\chi_0) = \zeta(s) \prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \mid q}} (1 - p^{-s})\,.$$

Lemma 3.4. *Die Riemannsche Zetafunktion hat in $s = 1$ einen Pol der Ordnung 1. ζ lässt sich für $\mathrm{Re}(s) > 0, s \neq 1$ fortsetzen.*

Beweis. Mittels partieller Summation leiten wir zunächst eine alternative Darstellung von $\zeta(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ ab. Es gilt

$$\sum_{n \leq x} n^{-s} = \lfloor x \rfloor x^{-s} - \int_1^x \lfloor t \rfloor (-s) t^{-s-1}\,\mathrm{d}t \to s \int_1^\infty \lfloor t \rfloor t^{-s-1} \text{ für } x \to \infty\,.$$

Wir setzen nun $\{t\} := t - \lfloor t \rfloor$ für $t \in \mathbb{R}$ ein

$$\zeta(s) = s \int_1^\infty t^{-s}\,\mathrm{d}t - s \int_1^\infty \{t\} t^{-s-1}\,\mathrm{d}t = \frac{s}{s-1} - s \int_1^\infty \{t\} t^{-s-1}\,\mathrm{d}t\,.$$

Man beachte, dass wegen $|\{t\}| \leq 1$ das Integral auf der rechten Seite für alle s mit $\mathrm{Re}(s) > 0$ existiert (und endlich ist). In diesem Sinne kann man die rechte Seite als Definition von $\zeta(s)$ für $\mathrm{Re}(s) > 0$ verwenden. Den Pol erster Ordnung bei $s = 1$ kann man nun direkt ablesen. □

Wir kommen nun zur zentralen Beobachtung für den Beweis des Primzahlsatzes. Um die nachfolgenden Abschätzungen übersichtlicher zu halten, führen wir zunächst die Landau-Notation ein.

Definition 3.5. *Seien $G \subset \mathbb{C}$ und $f\colon G \to \mathbb{C}, g\colon G \to [0,\infty)$ Funktionen. Wir schreiben $f(x) = \mathcal{O}(g(x))$, falls es ein $C > 0$ gibt, so dass für alle $x \in G : |f(x)| \leq Cg(x)$.*

Satz 3.6. *Sei $\chi \neq \chi_0$. Dann gilt $L(1,\chi) \neq 0$.*

Beweis. Wir geben den Beweis aus [4, S. 86 ff.]. Hierzu zeigen wir zunächst zwei technische Abschätzungen über die „Wachstumsgeschwindigkeit" der Reihen $\sum_{n=1}^\infty n^{-\theta}$ und $\sum_{n=1}^\infty \chi(n) n^{-\theta}$ für $\theta > 0$. Beachte, dass letztere nach Proposition 3.2 wegen $\chi \neq \chi_0$ konvergiert. Mit partieller Summation und der gleichen Abschätzung wie in Proposition 3.2

erhalten wir für $x \geq 1$

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \chi(n) n^{-\theta} &= L(\theta, \chi) - \sum_{n > x} \chi(n) n^{-\theta} = L(\theta, \chi) + \mathcal{O}(x^{-\theta}) \\
\sum_{n \leq x} n^{-\theta} &= \lfloor x \rfloor x^{-\theta} - \int_1^x \lfloor t \rfloor (-\theta) t^{-\theta - 1} \,\mathrm{d}t \\
&= x^{1-\theta} + \{x\} x^{-\theta} + \theta \int_1^x t^{-\theta} \,\mathrm{d}t - \theta \int_1^x \{t\} t^{-1-\theta} \,\mathrm{d}t \\
&= x^{1-\theta} + \mathcal{O}(x^{-\theta}) + \frac{\theta x^{1-\theta}}{1-\theta} - \frac{\theta}{1-\theta} - \theta \int_1^x \{t\} t^{-1-\theta} \,\mathrm{d}t \\
\theta \left| \int_1^x \{t\} t^{-1-\theta} \,\mathrm{d}t \right| &\leq \theta \int_1^x t^{-1-\theta} \,\mathrm{d}t = 1 - x^{-\theta} \,.
\end{aligned}$$

In der dritten Zeile oben haben wir zusätzlich $\theta \neq 1$ angenommen. Zusammgengenommen erhalten wir

$$\sum_{n \leq x} n^{-\theta} = \frac{x^{1-\theta}}{1-\theta} + \mathcal{O}(x^{-\theta}) + \underbrace{\frac{1}{1-\theta}}_{=:c(\theta)} \,.$$

Betrachte nun die zu $\chi * 1$ gehörige Dirichlet Reihe, wobei 1 die konstante arithmetische Funktion mit Wert 1 ist. Dann gilt

$$\begin{aligned}
\sum_{n \leq x} \chi * 1(n) n^{-s} &= \sum_{n \leq x} \sum_{k | n} \chi(k) n^{-\theta} = \sum_{\substack{(k,d) \in \mathbb{N}^2 \\ kd \leq x}} (kd)^{-\theta} \chi(k) \\
&= \sum_{k \leq \sqrt{x}} \chi(k) \sum_{d \leq \frac{x}{k}} (kd)^{-\theta} + \sum_{d \leq \sqrt{x}} d^{-\theta} \sum_{\sqrt{x} < k \leq \frac{x}{d}} k^{-\theta} \chi(k) \,.
\end{aligned}$$

Einsetzen von obigen Abschätzungen in die jeweils innere Summe ergibt

$$\sum_{n \leq x} \chi * 1(n) n^{-s} = \frac{x^{1-\theta}}{1-\theta} L(1, \chi) + c(\theta) L(\theta, \chi) + \mathcal{O}(x^{\frac{1}{2} - \theta}) \,. \tag{3.1}$$

Zwecks Widerspruch nehmen wir nun $L(1, \chi) = 0$ an. Wählen wir also $\theta > \frac{1}{2}$, so konvergiert die zu $\chi * 1$ gehörige Dirichlet-Reihe. Also konvergiert die Reihe nach Satz 2.8 für alle $s \in \mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re}(s) > \frac{1}{2}$. Da $L(s, \chi)$ für alle $\operatorname{Re}(s) > 0$ konvergiert (siehe Proposition 3.2), ist diese dort eine holomorphe Funktion mit Nullstelle in 1. Da bei holomorphen Funktionen eine Nullstelle abgespalten werden kann, hat $L(\cdot, \chi)$ in $s = 1$ ein Nullstelle mindestens erster Ordnung. Aus der Darstellung

$$L(s, \chi_0) = \zeta(s) \prod_{p \in \mathbb{P}, p | q} (1 - p^{-s})$$

für $\operatorname{Re}(s) > 1$ und dem Pol erster Ordnung von ζ in $s = 1$ folgt, dass der Grenzwert $L(\sigma, \chi) L(\sigma, \chi_0)$ für $\sigma \downarrow 1$ existiert und endlich ist. Zudem folgt aus der absoluten Konvergenz der Zetafunktion (siehe 2.10) und Proposition 2.6 die Darstellung

$$L(s,\chi)L(s,\chi_0) = L(s,\chi)\zeta(s) \prod_{p\in\mathbb{P},p|q} (1-p^{-s}) = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \chi * 1(n) n^{-s}\right) \prod_{p\in\mathbb{P},p|q} (1-p^{-s}),$$

für $\mathrm{Re}(s) > 1$.

Nebenrechnung: Wir erinnern an die Reihendarstellung des natürlichen Logarithmus

$$\ln(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}(x-1)^k,$$

wobei die Reihe auf der rechten Seite Konvergenzradius 1 hat. Also konvergiert die Potenzreihe auch für komplexe z mit $|z-1| < 1$. Die Ersetzung $x \to 1-x$ ($|x-1| < 1 \to |x| < 1$) liefert dann

$$\ln(1-x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}x^k$$
$$\Leftrightarrow \ln\left(\frac{1}{1-x}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}x^k =: f(x).$$

Die reche Seite lässt sich auch für komplexe z mit $|z| < 1$ auswerten und ist als Funktion in z holomorph. Da auch exp auf $\mathbb{C}$ holomorph ist, ist die Funktion $\exp\circ f$ auf $B(0,1)$ holomorph und stimmt auf dem reellen Intervall $(-1,1)$ mit der Funktion $z \mapsto \frac{1}{1-z}$ überein. Nach dem Identitätssatz (siehe [3, S. 92]) stimmen die Funktionen auf ganz $B(0,1)$ überein. Nun folgt für $z_1,\ldots,z_m \in B(0,1)$:

$$\prod_{i=1}^{m}\left(\frac{1}{1-z_i}\right) = \prod_{i=1}^{m}\exp(f(z_i)) = \exp\left(\sum_{i=1}^{m} f(z_i)\right) = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}(z_1^k+\ldots+z_m^k)\right). \quad (3.2)$$

Diese Überlegung wenden wir jetzt auf $\prod_{\eta \bmod q} L(s,\eta)$ für $\mathrm{Re}(s) > 1$ an, wobei sich das Produkt über alle Dirichlet Charakter $\bmod q$ erstreckt. Aus der Produktdarstellung 3.3 erhalten wir

$$\prod_{\eta \bmod q} L(s,\eta) = \prod_{p\in\mathbb{P}}\prod_{\eta \bmod q}\left(1-\eta(p)p^{-s}\right)^{-1}$$
$$\prod_{\eta \bmod q}\left(1-\eta(p)p^{-s}\right)^{-1} = \exp\left(\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}\left(\sum_{\eta \bmod q}\eta(p^j)\right)p^{-sj}\right).$$

Mit der Charakterrelation 2.16 folgt

$$\prod_{\eta \bmod q}\left(1-\eta(p)p^{-s}\right)^{-1} = \exp\left(\varphi(q)\sum_{\substack{j\geq 1\\ p^j\equiv 1 \bmod q}}\frac{1}{j}p^{-sj}\right).$$

Wählen wir s nun reell (und weiterhin $\mathrm{Re}(s) = s > 1$), so erhalten wir

$$\prod_{\eta \bmod q} \left(1 - \eta(p)p^{-s}\right)^{-1} \geq 1$$

und damit

$$\prod_{\eta \bmod q} L(s, \eta) \geq 1\,. \tag{3.3}$$

Das Produkt auf der linken Seite hat wie $L(s,\chi)L(s,\chi_0)$ einen endlichen Grenzwert für $s \downarrow 1$. Gäbe es neben χ noch einen weiteren Dirichlet Charakter ψ mit $L(1,\psi) = 0$, so hätte die Funktion $\prod_{\eta \bmod q} L(s,\eta)$ eine Nullstelle mindestens erster Ordnung in $s = 1$. Das widerspricht aber Gleichung 3.3. Aus der Gleichung $L(1,\chi) = 0 = \overline{L(1,\chi)} = L(1,\overline{\chi})$ (komplexe Konjugation ist linear und stetig) folgt also, dass auch $\overline{\chi}$ (,was ebenfalls ein Dirichlet-Charakter ist) eine L-Reihe mit Nullstelle eins erzeugt. Also muss $\chi = \overline{\chi}$ gelten, d. h. χ nimmt nur reelle Werte an.
Beachte, dass $\chi * 1$ als Faltung multiplikativer Funktionen nach Satz 2.5 multiplikativ ist. Es genügt also $\chi * 1$ auf Primpotenzen p^k zu bestimmen. Gelte zunächst $p \nmid q$. Wegen $|\chi(p)| = 1$ und χ reell gilt dann $\chi(p) \in \{-1, 1\}$ und daher

$$\chi * 1(p^k) = \sum_{l=0}^{k} \chi(p)^k = \begin{cases} 0, k \text{ ungerade und } \chi(p) = -1, \\ 1, k \text{ gerade und } \chi(p) = -1, \\ k+1, \text{ sonst} \end{cases} \geq 0 \quad .$$

Gilt stattdessen $p \mid q$, so ist $\chi(p^k) = \begin{cases} 1, k = 0, \\ 0, \text{ sonst.} \end{cases}$ und damit $\chi * 1(p^k) = 1$. Aus der Multiplikativität von $\chi * 1$ und $\chi * 1(p^k) \geq 1$ für alle geraden $k \in \mathbb{N}$ folgt, dass $\chi * 1(m^2) \geq 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$. Zusammenfassend erhalten wir für $x \geq 1$

$$\sum_{n \leq x} \underbrace{\chi * 1(n)}_{\geq 0} n^{-\frac{1}{2}} \geq \sum_{n \leq \sqrt{x}} \underbrace{\chi * 1(n^2)}_{\geq 1} n^{-1} \geq \sum_{n \leq \sqrt{x}} \frac{1}{n} \to \infty \text{ für } x \to \infty\,.$$

Dies widerspricht aber der Darstellung in Gleichung 3.1, wonach die obige Reihe (als Funktion von x) beschränkt ist. Also muss $L(1,\chi) \neq 0$ gelten, was die Behauptung zeigt. □

Für den Beweis des Primzahlsatzes benötigen wir noch eine Verschärfung des aus Analysis I bekannten Resultates, dass die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergiert. Tatsächlich divergiert die Reihe sogar, wenn man nur die Kehrwerte der Primzahlen aufsummiert, wie wir nachfolgend zeigen.

Proposition 3.7. *Die Reihe* $\sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{1}{p}$ *divergiert.*

Beweis. Wir geben den Beweis von Erdős (siehe [5]). Angenommen die Reihe konvergiert.

Dann gibt es ein $k \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \geq p_{k+1}}} \frac{1}{p} \leq \frac{1}{2}\,.$$

Hierbei ist p_k die k-te Primzahl. Wir definieren nun für $x \in \mathbb{N} : M_x := \{n \in \mathbb{N}_{\leq x} \mid \forall p \in \mathbb{P} : p \mid n \Rightarrow p \leq p_k\}$. In Worten handelt es sich also um die Menge aller $n \leq x$, deren Primteiler alle kleiner gleich p_k sind. Wir schätzen nun die Kardinalität von M_x nach oben und unten ab.
Obere Abschätzung: Sei $n \in M_x$. Wir zerlegen n in einen quadratischen und einen quadratfreien Anteil, d. h. $n = m^2 r$ für geeignete $m, n \in \mathbb{N}$. Da r quadratfrei ist und $n \in M_x$, ist ein Produkt von paarweise verschiedenen Primzahlen aus $\{p_1, \dots, p_k\}$. Hierfür gibt es höchstens $|\{0,1\}|^k = 2^k$ Möglichkeiten. Aus $m^2 \leq m^2 r = n \leq x$ folgt zudem $m \leq \sqrt{x}$. Also gilt $|M_x| \leq 2^k \sqrt{x}$.
Untere Abschätzung: Betrachte die Menge $\mathbb{N}_{\leq x} \setminus M_x$. Nach Definition hat jedes $n \in \mathbb{N}_{\leq x} \setminus M_x$ einen Primteiler größer als p_k, d. h. $\mathbb{N}_{\leq x} \setminus M_x = \bigcup_{i \geq k+1} N_{i,x}$, wobei $N_{i,x} := \{n \in \mathbb{N}_{\leq x} \mid \quad p_i \mid n\} = \{p_i c \mid c \leq \frac{x}{p_i}\}$. Insbesondere gilt $|N_{i,x}| \leq \frac{x}{p_i}$. Damit folgt
$x - |M_x| = |\mathbb{N}_{\leq x} \setminus M_x| = |\bigcup_{i \geq k+1} N_{i,x}| \leq \sum_{i=k+1}^{\infty} \frac{x}{p_i} \leq \frac{x}{2}$ nach Definition von k. Umstellen ergibt $\frac{x}{2} \leq |M_x|$.
Verwenden wir beide obigen Abschätzungen, so erhalten wir $\frac{x}{2} \leq 2^k \sqrt{x}$ für alle $x \in \mathbb{N}$. Wählt man x nun groß genug (z. B. $x > 2^{2k+2}$), so ergibt sich ein Widerspruch. □

Die bisherige Vorarbeit erlaubt nun sogar eine stärkere Formulierung des Primzahlsatzes. Diese stellt nicht nur die Existenz von unendlich vielen Primzahlen $p \equiv a \bmod q$ sicher, sondern gibt auch Aufschluss darüber, „wie viele“ solche es gibt.

Satz 3.8. *Die Dirichlet Dichte der Primzahlen $p \equiv a \bmod q$, d. h. der Grenzwert*

$$\lim_{\sigma \downarrow 1} \frac{\sum_{p \equiv a \bmod q} p^{-\sigma}}{\sum_{p \in \mathbb{P}} p^{-\sigma}}$$

existiert und es gilt

$$\lim_{\sigma \downarrow 1} \frac{\sum_{p \equiv a \bmod q} p^{-\sigma}}{\sum_{p \in \mathbb{P}} p^{-\sigma}} = \frac{1}{\varphi(q)}\,.$$

Hierbei ist φ die Eulersche φ-Funktion. Insbesondere gilt $\sum_{p \equiv a \bmod q} \frac{1}{p} = \infty$, d. h. die Reihe auf der rechten Seiten enthält unendlich viele Terme.

Beweis. (Vgl. [4, S. 88 f.]). Wir schreiben zunächst den Zähler um. Sei $p \in \mathbb{P}$. Dann gilt mit den Charakterrelationen 2.16

$$\sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi}(a)\chi(p) = \begin{cases} 0,\ p \mid q, \\ \sum_{\chi \bmod q} \chi((a+q\mathbb{Z})^{-1})\chi(p+q\mathbb{Z}),\ p \nmid q \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0,\ p \mid q, \\ \sum_{\chi \bmod q} \chi((a+q\mathbb{Z})^{-1} \cdot (p+q\mathbb{Z})),\ p \nmid q \end{cases}$$
$$= \begin{cases} 0,\ p \mid q, \\ \varphi(q),\ p \equiv a \bmod q \ \wedge p \nmid q, \\ 0,\ p \not\equiv a \bmod q \ \wedge p \nmid q \end{cases} = \begin{cases} 0,\ p \not\equiv a \bmod q, \\ \varphi(q),\ \text{sonst.} \end{cases}$$

Beachte im letzten Schritt, dass wegen $\mathrm{ggT}(a,q) = 1$ aus $p \equiv a \bmod q$ bereits $p \nmid q$ folgt. Damit lässt sich der Zähler für $\sigma > 1$ schreiben als

$$\sum_{p \equiv a \bmod q} p^{-\sigma} = \sum_{p \in \mathbb{P}} \frac{p^{-\sigma}}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi}(a)\chi(p) = \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi}(a) \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{p \in \mathbb{P}} \chi(p) p^{-\sigma} .$$

Im letzten Schritt haben wir verwendet, dass die Reihe $\sum_{p\in\mathbb{P}} \chi(p)p^{-\sigma}$ für $\sigma > 1$ konvergiert. Wir verwenden nun die in Satz 3.6 hergeleitete Gleichung 3.2. Es gilt für $x \geq 1$ und jeden Dirichlet- Charakter χ

$$\prod_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} (1 - \chi(p)p^{-\sigma})^{-1} = \exp\left(\sum_{\substack{p \in \mathbb{P} \\ p \leq x}} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \chi(p)^k p^{-k\sigma} \right) .$$

Aus der Abschätzung $\sum_{k=2}^{\infty} \left| \frac{1}{k}\chi(p)^k p^{-k\sigma} \right| \leq \frac{p^{-s\sigma}}{2} \sum_{k=0}^{\infty} p^{-\sigma k} = \frac{p^{-2\sigma}}{2(1-p^{-\sigma})} \leq \frac{1}{p^2}$ und der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ folgt, dass die Reihe $\sum_{p\in\mathbb{P}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}\chi(p)^k p^{-k\sigma}$ konvergiert und für $\sigma \in [1,\infty)$ eine stetige (und beschränkte) Funktion ist. Mit der Produktdarstellung der L- Reihe 3.3 folgt

$$L(\sigma,\chi) \exp\left(-\sum_{p\in\mathbb{P}} \chi(p)p^{-\sigma} \right) \to \exp\left(\sum_{p \in \mathbb{P}} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k} \chi(p)^k p^{-k} \right) \neq 0 \text{ für } \sigma \downarrow 1 .$$

Nach Satz 3.6 ($L(1,\chi) \neq 0$) konvergiert also auch $\exp\left(-\sum_{p\in\mathbb{P}} \chi(p)p^{-\sigma}\right)$ für $\sigma \downarrow 1$, falls χ nicht der Hauptcharakter ist. Setze $f(\sigma) := \sum_{p\in\mathbb{P}} \chi(p)p^{-\sigma}$. Für $\mathrm{Re}(\sigma) > 1$ ist dies eine stetige Funktion. Sei $w_0 := \lim\limits_{\sigma\downarrow 1} \exp(f(\sigma))$. Das Urbild des Gebietes $G := \{r\mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha} \in \mathbb{C} |\ \frac{1}{2}|w_0| \leq r \leq \frac{3}{2}|w_0|,\ |\alpha| \leq \frac{\pi}{4}, \alpha \in \mathbb{R}\}$ unter der Exponentialfunktion ist gerade $\exp^{-1}(G) = \dot{\bigcup}_{k\in\mathbb{Z}} \left(\left[\ln\left(\frac{1}{2}|w_0|\right), \ln\left(\frac{3}{2}|w_0|\right) \right] + \mathrm{i}\left[\arg(w_0) - \frac{\pi}{4}, \arg(w_0) + \frac{\pi}{4}\right] + 2\pi k\mathrm{i} \right)$, also eine disjunkte Vereinigung von abgeschlossenen Rechtecken. Für $b > 1$ ist $f((1,b))$ als Bild einer stetigen Funktion zusammenhängend. Aus Stetigkeitsgründen ist für hinreichend kleine b $\exp(f(1,b)) \subseteq G$ und zusammenhängend, also vollständig in einem der Rechtecke enthalten. Die Einschränkung von exp auf eines dieser Rechtecke ist aber bijektiv mit stetiger Inverser. Also existiert auch der Grenzwert $\sum_{p\in\mathbb{P}} \chi(p)p^{-\sigma}$ für $\sigma \downarrow 1$.

Gilt stattdessen $\chi = \chi_0$, so ist $\chi(p) = \begin{cases} 0, p \mid q, \\ 1, \text{ sonst} \end{cases}$ für $p \in \mathbb{P}$. Da die Reihe über die Kehrwerte der Primzahlen divergiert (Proposition 3.7), divergiert auch $\sum_{p\in\mathbb{P}} \chi_0(p)p^{-\sigma}$ für $\sigma \downarrow 1$. Insgesamt erhalten wir

$$\lim_{\sigma\downarrow 1} \frac{\sum_{p\in\mathbb{P}} \chi(p)p^{-\sigma}}{\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-\sigma}} = \begin{cases} 0, \chi \neq \chi_0, \\ 1, \chi = \chi_0 \end{cases}$$

und damit

$$\lim_{\sigma\downarrow 1} \frac{\sum_{p\equiv a \bmod q} p^{-\sigma}}{\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-\sigma}} = \frac{1}{\varphi(q)} \sum_{\chi \bmod q} \overline{\chi}(a) \lim_{\sigma\downarrow 1} \frac{\sum_{p\in\mathbb{P}} \chi(p)p^{-\sigma}}{\sum_{p\in\mathbb{P}} p^{-\sigma}} = \frac{1}{\varphi(q)}.$$

□

Satz 3.8 kann auch als Gleichverteilungsresultat verstanden werden. Jede Primzahl p, die kein Teiler von q ist, erfüllt $\mathrm{ggT}(p, q) = 1$, also $p + q\mathbb{Z} \in (\mathbb{Z}_q)^\times$. Zudem gibt es genau $\varphi(q)$ Einheiten in $\mathbb{Z}_q$. Da q nur endlich viele Primteiler hat, „verteilen“ sich die übrigen endlich vielen Primzahlen auf die $\varphi(q)$ Restklassen von $(\mathbb{Z}_q)^\times$. Nach dem Schubfachprinzip gibt es also mindestens eine solche Restklasse, die unendlich viele Primzahlen enthält. Der Dirichletsche Primzahlsatz 1.1 drückt nun aber aus, dass jede solche Restklasse schon unendlich viele Primzahlen enthält. Nimmt man den in Satz 3.8 definierten Ausdruck als Maß für die Dichte der Primzahlen $p \equiv a \bmod q$ in $\mathbb{P}$, so drückt dieser Satz aus, dass alle Restklassen von $(\mathbb{Z}_q)^\times$ unabhängig von a einen „Primanteil “ von $\frac{1}{\varphi(q)}$ besitzen. In diesem Sinne handelt es sich also um eine Art Gleichverteilung auf die Restklassen.

Literatur

[1] Jörg Brüdern: *Einführung in die analytische Zahlentheorie.* Springer-Verlag, Berlin, 1995, ISBN 3-540-58821-3.

[2] Robert Denk und Reinhard Racke: *Kompendium der ANALYSIS – Ein kompletter Bachelor-Kurs von Reellen Zahlen zu Partiellen Differentialgleichungen – Band 1: Differential- und Integralrechnung, Gewöhnliche Differentialgleichungen.* Springer-Verlag, Berlin, 1. Auflage, 2011, ISBN 978-3-8348-1565-1.

[3] Klaus Fritzsche: *Grundkurs Funktionentheorie – Eine Einführung in die komplexe Analysis und ihre Anwendungen.* Springer-Verlag, Berlin, 2009, ISBN 978-3-8274-1949-1.

[4] Marius Overholt: *A Course in Analytic Number Theory.* American Mathematical Soc., Heidelberg, 2014, ISBN 978-1-4704-1706-2.

[5] Wikipedia contributors: *Divergence of the sum of the reciprocals of the primes – Wikipedia, The Free Encyclopedia*, 2021. `https://en.wikipedia.org/w/index.php?title=Divergence_of_the_sum_of_the_reciprocals_of_the_primes&oldid=1019096842`, [Online; accessed 5-May-2021].