Università degli Studi di Cagliari

Facoltà di Scienze Matematiche Fisiche e Naturali

Corso di Laurea in Matematica

Formule per la curvatura di curve e superfici in forma implicita

Relatore

Dott. Stefano Montaldo

Tesi di Laurea di

Michele Serra

ANNO ACCADEMICO 2010-2011

Indice

1 Formule per il calcolo della curvatura di curve e superfici parametrizzate 3

1.1 Curve nel piano e nello spazio 3

1.2 Curvature di una superficie 5

2 Formule per il calcolo della curvatura di curve e superfici in forma implicita 8

2.1 Curvatura di curve piane 8

2.2 Curvature di superfici 14

2.3 Curvatura e torsione di curve nello spazio 21

2.4 L'esempio della Giroide 28

A Programmi per il calcolo delle curvature con *Mathematica* 30

B Elenco delle formule 34

Bibliografia 36

Introduzione

In Geometria Differenziale le superfici nello spazio euclideo tridimensionale vengono comunemente rappresentate sia in forma parametrica, cioè come immagine di una opportuna applicazione differenziabile $X : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, che in forma implicita, cioè come superfici di livello di una funzione differenziabile $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$. In modo analogo si possono definire le curve nel piano o nello spazio in forma parametrica o implicita.

Nella maggior parte dei testi classici di Geometria Differenziale si trovano le formule per il calcolo delle curvature di curve e superfici quando queste sono date in forma parametrica.

Tuttavia, è molto frequente che si abbia la necessità di calcolare la curvatura (o le curvature) di curve o superfici definite implicitamente: per esempio, quando si fa della Modellizzazione Geometrica computerizzata, gli oggetti con cui si ha a che fare sono spesso curve o superfici definite implicitamente attraverso funzioni di più variabili.

Nei testi classici di Geometria Differenziale è molto raro trovare delle formule che permettano di calcolare direttamente la curvatura di curve e superfici definite implicitamente. Alcune delle formule che presenteremo compaiono, in modo sporadico, in Spivak ([5]), Fulton ([3]), Willmore ([6]), Dombrowsky ([2]).

Lo scopo di questo lavoro è appunto raccogliere, organizzare e dimostrare le formule note per il calcolo della curvatura di curve e superfici definite in forma implicita.

Per descrivere tali formule faremo uso, principalmente, del gradiente e della matrice Hessiana. Essi si possono definire sia per funzioni di due variabili sia per funzione di tre variabili. Di conseguenza, le formule che ricaveremo per le curve piane, definite implicitamente da funzioni di due variabili, potranno essere estese al caso di funzioni di tre variabili e utilizzate per calcolare le curvature di superfici in forma implicita.

Questa trattazione prende spunto da un articolo pubblicato da R. Goldman ([4]), nel quale viene affrontato lo stesso problema.

Capitolo 1

Formule per il calcolo della curvatura di curve e superfici parametrizzate

1.1 Curve nel piano e nello spazio

Sia $\alpha(s)$ una curva di $\mathbb{R}^3$ parametrizzata con l'ascissa curvilinea, e sia $\alpha(t)$ una qualunque altra parametrizzazione. Indichiamo con $\alpha', \alpha'', \alpha'''$ le derivate prima, seconda e terza di α rispetto a t. Indichiamo, infine, con J la struttura complessa di $\mathbb{R}^2$:

$$\begin{array}{rccc} J\colon & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & (x,y) & \longmapsto & (-x,y) \end{array}$$

Definizione 1.1.1. Il campo di vettori tangente $\mathbf{T}$ è definito da

$$\mathbf{T} := \frac{d\alpha}{ds} = \frac{\alpha'}{|\alpha'|}.$$

Definizione 1.1.2. i) La *curvatura* di α è definita da

$$\kappa = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right\| = \frac{d^2\alpha}{ds^2} = \frac{\|\alpha' \wedge \alpha''\|}{\|\alpha'\|^3}.$$

ii) Nel caso di una curva piana definiamo la *curvatura con segno*:

$$\kappa_2 = \frac{\langle \alpha'' \,,\, J\alpha' \rangle}{\|\alpha'\|^3} = \frac{\det(\alpha', \alpha'')}{\|\alpha'\|^3}.$$

iii) La *torsione* di una curva nello spazio è data da:

$$\tau = \frac{\det(\mathbf{T}, \frac{d\mathbf{T}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{T}}{ds^2})}{\kappa^2} = \frac{\langle \alpha' \wedge \alpha'' \,,\, \alpha''' \rangle}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2} = \frac{\det(\alpha', \alpha'', \alpha''')}{\|\alpha' \wedge \alpha''\|^2}. \tag{1.1}$$

La curvatura misura di quanto una curva si discosta dall'essere una retta mentre la torsione misura di quanto una curva si discosta dall'essere piana. Si dimostra, infatti, che una curva è piana se e solo se ha torsione nulla.

Oltre al campo di vettori tangente, si definiscono anche:

Definizione 1.1.3. Data una curva unitaria α con curvatura positiva, si definisce **campo di vettori normale** il campo di vettori dato da

$$\mathbf{N} := \frac{1}{\kappa}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial s}$$

e si definisce **campo di vettori binormale** il campo

$$\mathbf{B} := \mathbf{T} \wedge \mathbf{N}.$$

I tre campi di vettori $\mathbf{T}$, $\mathbf{N}$ e $\mathbf{B}$ hanno norma unitaria e sono mutuamente ortogonali: essi sono detti **campo di riferimenti di Frenet** su α. Esistono delle importanti relazioni che legano le derivate prime dei campi fondamentali ai campi stessi attraverso la curvatura e la torsione, esse sono dette **formule di Frenet**:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{T}}{\partial s} = \kappa \mathbf{N}; \\ \\ \dfrac{\partial \mathbf{N}}{\partial s} = -\kappa \mathbf{T} + \tau \mathbf{B}; \\ \\ \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial s} = -\tau \mathbf{N}. \end{cases} \tag{1.2}$$

Nel caso di curve con velocità arbitraria le (1.2) diventano:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} = v\kappa \mathbf{N}; \\ \\ \dfrac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} = -v\kappa \mathbf{T} + v\tau \mathbf{B}; \\ \\ \dfrac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -v\tau \mathbf{N}. \end{cases} \tag{1.3}$$

dove con v si è indicata la velocità della curva: $v = \|\alpha'\|$.
Per le curve piane ($\tau = 0$) le formule di Frenet si riducono alle:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{T}}{\partial t} = v\kappa_2 \mathbf{N}; \\ \\ \dfrac{\partial \mathbf{N}}{\partial t} = -v\kappa_2 \mathbf{T}. \end{cases} \tag{1.4}$$

1.2 Curvature di una superficie

Consideriamo una parametrizzazione locale di una superficie nello spazio euclideo:

$$\begin{array}{rccc} X: & \mathcal{U} \subset \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^3 \\ & (u,v) & \longmapsto & X(u,v). \end{array}$$

Definizione 1.2.1. Una parametrizzazione locale è **regolare** in un punto se la sua matrice jacobiana ha rango 2 in quel punto.

Definizione 1.2.2. Data una parametrizzazione $X(u,v)$ di una superficie, si definiscono **campi tangenti coordinati** i campi di vettori

$$X_u = \frac{\partial X}{\partial u} \qquad \text{e} \qquad X_v = \frac{\partial X}{\partial v}.$$

Si dimostra che, dati i campi tangenti coordinati X_u e X_v, una parametrizzazione locale iniettiva è regolare *se e solo se* il **campo normale unitario**

$$\mathbf{N}(u,v) = \frac{X_u \wedge X_v}{\|X_u \wedge X_v\|}(u,v)$$

è ovunque ben definito.

Definizione 1.2.3. Definiamo le funzioni

$$E = \|X_u\|^2, \qquad F = \langle X_u \, , \, X_v \rangle \, , \qquad G = \|X_v\|^2.$$

La **prima forma fondamentale** della superficie sarà allora

$$ds^2 = Edu^2 + 2Fdudv + Gdv^2$$

e indicheremo la sua matrice con

$$\mathbf{I}_{ff} = \begin{pmatrix} E & F \\ F & G \end{pmatrix}.$$

Definizione 1.2.4. Le funzioni

$$\begin{cases} e = -\langle \mathbf{N}_u \, , \, X_u \rangle = \langle \mathbf{N} \, , \, X_{uu} \rangle \\ f = -\langle \mathbf{N}_v \, , \, X_u \rangle = \langle \mathbf{N} \, , \, X_{uv} \rangle \\ g = -\langle \mathbf{N}_v \, , \, X_v \rangle = \langle \mathbf{N} \, , \, X_{vv} \rangle \end{cases}$$

sono detti **coefficienti della seconda forma fondamentale** la cui matrice indicheremo con

$$\mathbf{II}_{ff} = \begin{pmatrix} e & f \\ f & g \end{pmatrix}.$$

È opportuno dare la seguente definizione, che ci sarà utile nel seguito.

Definizione 1.2.5. Sia A una matrice quadrata d'ordine n. Indichiamo con a_{ij} l'entrata di A intersezione tra la i-esima riga e la j-esima colonna. Detto $\mathrm{cof}(a_{i,j})$ il cofattore dell'entrata a_{ij}, la **matrice aggiunta** di A è la matrice A^* ottenuta da A sostituendo ad ogni entrata il suo cofattore:

$$A^* = \begin{pmatrix} \mathrm{cof}(a_{11}) & \cdots & \mathrm{cof}(a_{1n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathrm{cof}(a_{n1}) & \cdots & \mathrm{cof}(a_{nn}). \end{pmatrix}$$

L'aggiunta di $\mathbf{II}_{ff}$ sarà quindi

$$\mathbf{II}^*_{ff} = \begin{pmatrix} g & -f \\ -f & e \end{pmatrix}$$

Ricordiamo adesso le formule classiche per la curvatura media e la curvatura di Gauss denotate rispettivamente con $\mathcal{H}$ e $\mathcal{K}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{K} &= \frac{eg - f^2}{EG - F^2} = \frac{\det(\mathbf{II}_{ff})}{\det(\mathbf{I}_{ff})}; \\ \mathcal{H} &= \frac{eG - 2fF + gE}{2(EG - F^2)} = \frac{\mathrm{Tr}(\mathbf{I}_{ff} \cdot \mathbf{II}^*_{ff})}{2\det(\mathbf{I}_{ff})}. \end{aligned}$$

Il nostro scopo è ricavare delle formule per le curvature di superfici in forma implicita. Non è, però, agevole dedurle direttamente dalle equazioni scritte sopra. Di seguito, riportiamo delle formule equivalenti, che permettono facilmente di dedurre delle formule per le superfici in forma implicita. Poichè si ha:

$$\|X_u \wedge X_v\|^2 = \|X_u\|\|X_v\| - \langle X_u\,,\, X_v\rangle^2 = EG - F^2 = \det(\mathbf{I}_{ff})$$

e

$$\begin{aligned} \langle X_u \wedge X_v\,,\, \mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v\rangle &= \langle X_u\,,\, \mathbf{N}_u\rangle \langle X_v\,,\, \mathbf{N}_v\rangle - \langle X_u\,,\, \mathbf{N}_v\rangle \langle X_v\,,\, \mathbf{N}_u\rangle \\ &= eg - f^2 = \det(\mathbf{II}_{ff}); \end{aligned}$$

allora possiamo scrivere

$$\mathcal{K} = \frac{\langle X_u \wedge X_v\,,\, \mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v\rangle}{\|X_u \wedge X_v\|^2}. \tag{1.5}$$

Si ha inoltre:

$$\begin{aligned}
\langle X_u \wedge X_v \, , \, X_u \wedge \mathbf{N}_v \rangle - \langle X_u \wedge X_v \, , \, X_v \wedge \mathbf{N}_u \rangle = & \\
&= \langle X_u \, , \, X_u \rangle \, \langle X_v \, , \, \mathbf{N}_v \rangle + \\
&\quad - \langle X_u \, , \, \mathbf{N}_v \rangle \, \langle X_v \, , \, X_u \rangle + \\
&\quad - \langle X_u \, , \, X_v \rangle \, \langle X_v \, , \, \mathbf{N}_u \rangle + \\
&\quad + \langle X_u \, , \, \mathbf{N}_u \rangle \, \langle X_v \, , \, X_v \rangle \\
&= eG - 2fF + gE = \mathrm{Tr}(\mathbf{II}_{\mathit{ff}}),
\end{aligned}$$

in virtù della quale scriviamo:

$$\mathcal{H} = \frac{\langle X_u \wedge X_v \, , \, (X_v \wedge \mathbf{N}_u - X_u \wedge \mathbf{N}_v) \rangle}{2 \| X_u \wedge X_v \|^2}. \tag{1.6}$$

Capitolo 2

Formule per il calcolo della curvatura di curve e superfici in forma implicita

2.1 Curvatura di curve piane

Vogliamo dedurre, a partire dalle formule date per le curve parametrizzate, delle formule per la curvatura di curve piane definite in forma implicita. Tali curve sono i luoghi di punti del piano $\mathbb{R}^2$ le cui coordinate annullano una funzione di due variabili $F(x, y)$. Ricordando che, dati un vettore $\mathbf{v}$ e una funzione f si ha

$$\nabla \wedge \mathbf{v} = \mathbf{rot}\,(\mathbf{v}), \qquad \langle \nabla \,,\, \mathbf{v} \rangle = \mathbf{div}\,(\mathbf{v}) \quad \text{e} \quad \nabla f = \mathbf{grad}\,(f).$$

Faremo uso della seguente

Notazione. Sia $\mathbf{v}$ un vettore di $\mathbb{R}^2$ (o, in generale, di $\mathbb{R}^n$). Allora $\nabla(\mathbf{v})$ è la matrice quadrata avente per colonne i gradienti di ciascuna componente di $\mathbf{v}$:

$$(\nabla(\mathbf{v}))_{ij} = \frac{\partial v_i}{\partial x_j}.$$

Un caso particolare, che ci sarà utile nel seguito, è quello in cui $\mathbf{v} = \nabla(F)$. Si ha infatti, nel caso di $\mathbb{R}^2$,

$$\nabla(\nabla F) = \nabla(F_x, F_y) = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{pmatrix} = H(F).$$

che è la matrice hessiana della funzione F.

Consideriamo ora una curva piana in forma implicita, $F(x, y) = 0$. Vediamo prima come si possono esprimere i campi del riferimento di Frenet. A tale scopo, ricordiamo che

$\nabla F = (F_x, F_y)$ è sempre perpendicolare al grafico della curva. Si ha allora

$$\mathbf{N}(F) = \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} = \frac{(F_x, F_y)}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}.$$

È allora facile trovare il campo unitario tangente:

$$\mathbf{T}(F) = J\mathbf{N} = \frac{(-F_y, F_x)}{\sqrt{F_x^2 + F_y^2}}.$$

Poniamo inoltre: $\mathrm{Tan}(F) = J\nabla F = (-F_x, Fy)$.
È facile vedere quando una curva piana è regolare. Infatti, una curva parametrizzata è regolare se la norma del suo campo tangente è sempre non nulla. Nel caso di curve piane in forma implicita, allora, vale la seguente

Definizione 2.1.1. Una curva $F(x, y) = 0$ è regolare se $\|J\nabla F\| \neq 0$ il che significa che le derivate parziali prime di F non sono mai tutte nulle.

Possiamo ora dimostrare il primo risultato.

Proposizione 2.1.2 (Formula per la curvatura di una curva piana in forma implicita)**.** *Sia $F(x, y) = 0$ una curva piana regolare. Allora*

$$\begin{aligned} \kappa_2 &= -\frac{\mathbf{T}(F)H(F)\mathbf{T}(F)^T}{\|\nabla F\|} = \frac{(J\nabla F)H(F)(J\nabla F)^T}{\|\nabla F\|^3} \\ &= -\frac{(-F_y, F_x)\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix}}{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned} \tag{2.1}$$

Dimostrazione. Dalla seconda delle (1.4), moltiplicando scalarmente per $\mathbf{T}$, otteniamo

$$\kappa_2 = -\langle \frac{d\mathbf{N}}{ds}, \mathbf{T} \rangle$$

da cui

$$\kappa_2 = -\langle \left(\frac{\partial \mathbf{N}}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathbf{N}}{\partial y}\frac{dy}{ds} \right), \mathbf{T} \rangle = \langle \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) \begin{pmatrix} \dfrac{\partial \mathbf{N}}{\partial x} \\ \\ \dfrac{\partial \mathbf{N}}{\partial y} \end{pmatrix}, \mathbf{T} \rangle = -\mathbf{T}(\nabla \mathbf{N})\mathbf{T}^T$$

(ricordiamo che $\nabla \mathbf{N}$ è una matrice 2×2). Ora, poichè

$$\nabla \mathbf{N} = \nabla \left(\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} \right) = \frac{\|\nabla F\| \nabla(\nabla F) - \nabla(\|\nabla F\|)^T \nabla F}{\|\nabla F\|^2}$$

sostituendo, e tenendo conto che

$$\nabla(\nabla F) = HF \quad \text{e} \quad (\nabla F)\mathbf{T}^T = \langle \nabla F\,,\, \mathbf{T} \rangle = 0,$$

otteniamo proprio

$$\kappa_2 = -\frac{\mathbf{T}(F)H(F)\mathbf{T}(F)^T}{\|\nabla F\|}.$$

$\square$

Dobbiamo fare qualche precisazione riguardo quanto fatto finora. Ricordiamo, per prima cosa, che data una curva in forma implicita $F(x, y) = 0$ e una costante reale $c \neq 0$, allora anche $cF(x, y)$ rappresenta la stessa curva. È naturale aspettarsi che se la curva è la stessa anche la sua curvatura rimanga invariata. Sia $c > 0$. Allora, la (2.1) diviene

$$-\frac{c^3(-F_y, F_x)\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix}}{(c^2F_x^2 + c^2F_y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{c^3(-F_y, F_x)\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix}}{c^3(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}} = \kappa_2.$$

Se invece $c < 0$ la (2.1) diviene

$$-\frac{c^3(-F_y, F_x)\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -F_y \\ F_x \end{pmatrix}}{|c^3|(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\kappa_2.$$

Vediamo due semplici esempi.

Esempio 2.1.3 (Retta)**.** Una retta può essere espressa in forma implicita ponendo

$$F(x, y) = ax + by + c = 0$$

con a, b e c costanti e a e b non entrambi nulli. Si vede immediatamente che le derivate seconde di F, pure e miste, sono tutte nulle. È quindi nulla la matrice Hessiana che compare come fattore a numeratore nell'espressione di κ, pertanto la curvatura è nulla, come ci si aspetta.

Esempio 2.1.4 (Circonferenza)**.** Una circonferenza può essere rappresentata in forma implicita ponendo

$$F(x, y) = x^2 + y^2 - R^2 = 0.$$

Allora, per la (2.1) otteniamo:

$$\begin{aligned}\kappa &= -\frac{(-F_y, F_x)\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -F_y \\ F_x\end{pmatrix}}{(F_x^2+F_y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{(-2y, 2x)\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2y \\ 2x\end{pmatrix}}{((2x)^2+(2y)^2)^{\frac{3}{2}}} \\ &= -\frac{8(x^2+y^2)}{(4x^2+4y^2)^{\frac{3}{2}}} = -\frac{8R^2}{8R^3} = -\frac{1}{R}.\end{aligned}$$

Notiamo che la curvatura è negativa, come è lecito aspettarsi, essendo $\mathbf{N}(F) = \nabla F = (2x, 2y)$ rivolto verso l'esterno della circonfenenza che, quindi, è percorsa in senso orario.

Vogliamo ora trovare delle formule alternative per la curvatura di curve piane.

Teorema 2.1.5. *Per la curvatura con segno di una curva piana regolare $F(x, y)$ valgono le seguenti formule:*

$$\kappa_2 = \frac{\mathrm{Tan}(F)H(F)\mathrm{Tan}(F)^T}{\|\nabla F\|^3} = -\frac{(-F_y, F_x)\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -F_y \\ F_x\end{pmatrix}}{(F_x^2+F_y^2)^{\frac{3}{2}}}; \tag{2.2a}$$

$$\kappa_2 = \frac{\mathrm{Tan}(F)\nabla(\mathrm{Tan}(F))\nabla F^T}{\|\nabla F\|^3} = -\frac{(-F_y, F_x)\begin{pmatrix} -F_{xy} & F_{xx} \\ -F_{yy} & F_{yx}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y\end{pmatrix}}{(F_x^2+F_y^2)^{\frac{3}{2}}}; \tag{2.2b}$$

$$\kappa_2 = -\frac{\det\Big(\mathrm{Tan}(F)H(F), \quad \nabla F\Big)}{\|\nabla F\|^3} = -\frac{\det\left((-F_y, F_x)\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} F_x \\ F_y\end{pmatrix}\right)}{(F_x^2+F_y^2)^{\frac{3}{2}}}; \tag{2.2c}$$

$$\begin{aligned}\kappa_2 &= -\frac{\det\Big(\mathrm{Tan}(F)\nabla(\mathrm{Tan}(F)), \quad \mathrm{Tan}(F)\Big)}{\|\mathrm{Tan}(F)\|^3} \\ &= -\frac{\det\left((-F_y, F_x)\begin{pmatrix} -F_{xy} & F_{xx} \\ -F_{yy} & F_{yx}\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -F_y \\ F_x\end{pmatrix}\right)}{(F_x^2+F_y^2)^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned} \tag{2.2d}$$

Dimostrazione. La (2.2a) è ottenuta semplicemente sostituendo $\mathbf{T}(F)$ con $\mathrm{Tan}(F)/\|\mathrm{Tan}(F)\|$ in (2.1).
Per dimostrare la (2.2b), prendiamo una parametrizzazione della nostra curva in ascissa curvilinea, consideriamo la prima delle (1.4) e moltiplichiamola scalarmente per $\mathbf{N}$, ottenendo

$$\kappa_2 = \langle \frac{d\mathbf{T}}{ds}, \mathbf{N}\rangle.$$

Ora,
$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \mathbf{T}\nabla\mathbf{T}.$$
Ricordando che $\mathbf{N} = \nabla F/\|\nabla F\|$, sostituendo si trova:

$$\begin{aligned}\kappa_2 &= \langle \mathbf{T}\nabla\mathbf{T}\,,\ \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}\rangle = \langle \frac{\mathrm{Tan}(F)}{\|\nabla F\|}\frac{\nabla \mathrm{Tan}(F)}{\|\nabla F\|}\,,\ \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}\rangle \\ &= \frac{\mathrm{Tan}(F)[\nabla \mathrm{Tan}(F)]\nabla F^{\mathsf{T}}}{\|\nabla F\|^3}.\end{aligned}$$

Dimostriamo ora che le formule (2.2c) e (2.2d) sono equivalenti alla (2.1). Notiamo innanzi tutto che i denominatori sono uguali, tra loro, e al denominatore della formula (2.1), quindi sarà sufficiente mostrare l'equivalenza delle espressioni al numeratore. Sviluppiamo innanzitutto il numeratore della (2.1):

$$\begin{aligned}(-F_y, F_x)\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} -F_y \\ F_x\end{pmatrix} &= (-F_yF_{xx} + F_xF_{xy}, -F_yF_{yx} + F_xF_{yy})\begin{pmatrix} -F_y \\ F_x\end{pmatrix} \\ &= F_y^2F_{xx} + F_x^2F_{yy} - (F_xF_yF_{xy} + F_yF_xF_{yx}).\end{aligned} \tag{2.3}$$

Sviluppando il numeratore in (2.2c) si trova:

$$\begin{aligned}-\det\begin{pmatrix} -F_yF_{xx} + F_xF_{xy} & F_x \\ -F_yF_{yx} + F_xF_{yy} & F_y\end{pmatrix} &= -(-F_y^2F_{xx} + F_xF_yF_{xy} + F_xF_yF_{yx} - F_x^2F_{yx}) \\ &= F_y^2F_{xx} + F_x^2F_{yy} - (F_xF_yF_{xy} + F_yF_xF_{yx}),\end{aligned}$$

che coincide con la (2.3).
Infine, sviluppando il numeratore all'ultimo membro di (2.2d) si ottiene:

$$\begin{aligned}-\det\begin{pmatrix} F_yF_{xy} - F_xF_{yy} & -F_y \\ -F_yF_{xx} + F_xF_{yx} & F_x\end{pmatrix} &= -(-F_y^2F_{xx} + F_xF_yF_{xy} + F_xF_yF_{yx} - F_x^2F_{yx}) \\ &= F_y^2F_{xx} + F_x^2F_{yy} - (F_xF_yF_{xy} + F_yF_xF_{yx}),\end{aligned}$$

anch'essa coincidente con la (2.3). □

Desta particolare interesse la (2.2d): in essa la curvatura è espressa esclusivamente in termini di $\mathrm{Tan}(F)$. Vedremo infatti che essa, modificando leggermente le operazioni a numeratore, può essere generalizzata per ottenere la curvatura di una curva nello spazio, sfruttando, ancora, solo il vettore tangente. Quest'ultimo, tuttavia, non possiede un analogo per le superfici. Dobbiamo allora trovare delle altre formule per la curvatura di curve piane, che sia possibile estendere dal caso di due variabili a quello di tre variabili, cioè alle superfici in forma implicita. Sfrutteremo, a tale scopo, l'operatore aggiunto.

Ricordiamo, innanzi tutto, alcune proprietà dell'operatore aggiunto "*". Chiamiamo con k una costante reale, con $r = (r_1, r_2)$ e con $c = (c_1, c_2)^T$ un vettore riga e, rispettivamente, colonna di $\mathbb{R}^2$ e con M una matrice reale 2×2. Si ha allora:

$$k^* = k, \qquad r^* = \begin{pmatrix} -r_2 \\ r_1 \end{pmatrix}, \qquad c^* = -(-c_2, c_1)$$

$$\text{e infine} \qquad M^* = \begin{pmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} m_{22} & -m_{21} \\ -m_{12} & m_{11} \end{pmatrix}.$$

Segue quindi:

$$c^* r^* = rc; \qquad (Mc)^* = c^* M^*; \qquad (rM)^* = M^* r^*.$$

Da cui anche:

$$rMc = (rMc)^* = r^* M^* c^*.$$

L'aggiunto della matrice Hessiana della funzione F risulta quindi

$$H^*(F) = \begin{pmatrix} F_{yy} & -F_{yx} \\ -F_{xy} & F_{xx} \end{pmatrix} = -\nabla(\mathrm{Tan}(F)).$$

Si ha inoltre:

$$\nabla^*(F) = \mathrm{Tan}(F)^T;$$
$$\mathrm{Tan}^*(F) = -\nabla(F)^T.$$

Alla luce di quanto appena osservato, trasformiamo la formula (2.2a) facendo uso dell'operatore aggiunto:

$$\kappa_2 = -\frac{\mathrm{Tan}(F) H(F) \mathrm{Tan}(F)^T}{\|\nabla F\|^3} = -\frac{\mathrm{Tan}^*(F) H^*(F) \mathrm{Tan}^*(F)^T}{\|\nabla F\|^3} \tag{2.4}$$
$$= -\frac{\nabla(F) H^*(F) \nabla(F)^T}{\|\nabla F\|^3} = -\frac{(F_x, F_y) \begin{pmatrix} F_{yy} & -F_{yx} \\ -F_{xy} & F_{xx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \end{pmatrix}}{(F_x^2 + F_y^2)^{\frac{3}{2}}}.$$

La validità di tale formula non necessita di ulteriori verifiche, essendo stata ottenuta semplicemente riscrivendo un'altra formula già dimostrata valida. L'interesse di questa espressione risiede nel fatto che in essa sono coinvolti soltanto il gradiente e l'aggiunto dell'Hessiano, oggetti che si possono definire anche per funzioni di tre variabili, cioè di superfici in forma implicita. È dunque lecito aspettarsi che la stessa formula, qualora $F = 0$ non sia più una curva ma una superficie, costituisca una espressione di una curvatura (media o di Gauss) della superficie. Vedremo che questo è effettivamente ciò che accade. Ci chiediamo allora se esiste un'ulteriore formula equivalente per la curvatura di una curva piana, la cui interpretazione nel caso di tre variabili sia la curvatura, di Gauss o media, non rappresentata dalla (2.4). La risposta è affermativa, e la formula che presentiamo di seguito, è ancora più semplice della precedente, in quanto fa uso soltanto del gradiente e dell'Hessiano, anzichè del suo aggiunto. Sommiamo la matrice Hessiana di F alla sua aggiunta:

$$\begin{aligned} H(F) + H^*(F) &= \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_{yy} & -F_{yx} \\ -F_{xy} & F_{xx} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} F_{xx} + F_{yy} & 0 \\ 0 & F_{xx} + F_{yy} \end{pmatrix} = \mathrm{Tr}(H(F))I, \end{aligned}$$

dove abbiamo indicato con I la matrice identità. Possiamo allora utilizzare questo risultato per sostituire l'espressione di $H^*(F)$ in (2.4), trovando così:

$$\kappa_2 = -\frac{\nabla(F)H(F)\nabla(F)^T - \|\nabla F\|^2 \mathrm{Tr}(H(F))}{\|\nabla F\|^3}. \tag{2.5}$$

Presentiamo, infine, due ulteriori formule per la curvatura di una curva piana in forma implicita. La prima può essere calcolata attraverso un determinante:

$$\kappa_2 = \frac{\det \begin{pmatrix} H(F) & \nabla F^T \\ \nabla F & 0 \end{pmatrix}}{\|\nabla F\|^3}. \tag{2.6}$$

La seconda fa uso dell'operatore divergenza:

$$\kappa_2 = -\left\langle \nabla \, , \, \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} \right\rangle . \tag{2.7}$$

2.2 Curvature di superfici

Una superficie può essere definita in forma implicita come il luogo dei punti in cui si annulla una funzione di tre variabili $F(x, y, z) = 0$. Come nel caso bidimensionale, anche qui possiamo definire

$$
\begin{aligned}
\nabla F &= (\frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}) = (F_x, F_y, F_z);\\
\mathbf{N}(F) &= \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|};\\
H(F) &= \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz}\\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz}\\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix} = \nabla(\nabla F).
\end{aligned}
$$

L'aggiunto dell'Hessiano è la matrice che ha per entrate i cofattori delle entrate dell'Hessiano:

$$
H^*(F) = \begin{pmatrix} F_{yy}F_{zz} - F_{yz}F_{zy} & F_{yz}F_{zx} - F_{yx}F_{zz} & F_{yx}F_{zy} - F_{yy}F_{zx}\\ F_{xz}F_{zy} - F_{xy}F_{zz} & F_{xx}F_{zz} - F_{xz}F_{zx} & F_{xy}F_{zx} - F_{xx}F_{zy}\\ F_{xy}F_{yz} - F_{xz}F_{yy} & F_{yx}F_{xz} - F_{xx}F_{yz} & F_{xx}F_{yy} - F_{xy}F_{yx} \end{pmatrix}.
$$

Possiamo ora dimostrare il primo risultato:

Teorema 2.2.1 (Formula per la curvatura di Gauss)**.** *Data una superficie in forma implicita, $F(x, y, z) = 0$, in ogni punto in cui la superficie è regolare, ossia $\nabla F \neq 0$, si ha:*

$$
\mathcal{K} = \frac{\nabla F H^*(F) \nabla F^T}{\|\nabla F\|^4}. \tag{2.8}
$$

Dimostrazione. Detta $X(u, v)$ una parametrizzazione della superficie, e $\mathbf{N}(u, v)$ il suo vettore normale, mostriamo l'equivalenza tra la (1.6) e la (2.8). Poichè $\mathbf{N}(F) = \nabla F/\|\nabla F\|$ si ha:

$$
\mathbf{N}_u = \frac{(\nabla F)_u \|\nabla F\| - \nabla F \|\nabla F\|_u}{\|\nabla F\|^2} = \frac{(\nabla F)_u}{\|\nabla F\|} + \nabla F^{\|}
$$

dove con $\nabla F^{\|}$ si è indicato il termine parallelo a ∇F. Allora, il numeratore del primo termine diventa

$$
\begin{aligned}
(\nabla F)_u = \frac{\partial}{\partial u}(F_x, F_y, F_z) &= \begin{pmatrix} F_{xx}\frac{\partial x}{\partial u} + F_{xy}\frac{\partial y}{\partial u} + F_{xz}\frac{\partial z}{\partial u}\\ F_{yx}\frac{\partial x}{\partial u} + F_{yy}\frac{\partial y}{\partial u} + F_{yz}\frac{\partial z}{\partial u}\\ F_{zx}\frac{\partial x}{\partial u} + F_{zy}\frac{\partial y}{\partial u} + F_{zz}\frac{\partial z}{\partial u} \end{pmatrix}^T\\
&= \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u}\right) \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz}\\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz}\\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix} = X_u H(F).
\end{aligned}
$$

Abbiamo, cioè:

$$
\mathbf{N}_u = \frac{X_u H(F)}{\|\nabla F\|} + \nabla F^{\|}.
$$

Allo stesso modo si vede che

$$\mathbf{N}_v = \frac{X_v H(F)}{\|\nabla F\|} + \nabla F^{\|}.$$

Segue allora che

$$\mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v = \frac{[X_u H(F)] \wedge [X_v H(F)]}{\|\nabla F\|^2} + \nabla F^{\perp}$$

dove il primo addendo può essere riscritto sfruttando l'identità, valida per ogni coppia di vettori di $\mathbb{R}^3$ e per ogni matrice 3×3,

$$(aM) \wedge (bM) = (a \wedge b)M^*.$$

Abbiamo:

$$\mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v = \frac{(X_u \wedge X_v)H^*(F)}{\|\nabla F\|^2} + \nabla F^{\perp}.$$

Ora, ∇F e $(X_u \wedge X_v)$ sono entrambi ortogonali alla superficie, quindi, per qualche costante λ, sarà $(X_u \wedge X_v) = \lambda \nabla F$. Quindi:

$$\langle (X_u \wedge X_v)\,,\, (\mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v) \rangle = \frac{\lambda^2 \nabla F H^*(F) \nabla F^T}{\|\nabla F\|^2};$$
$$\|(X_u \wedge X_v)\|^2 = \lambda^2 \|\nabla F\|^2;$$

pertanto

$$\mathcal{K} = \frac{\langle X_u \wedge X_v\,,\, \mathbf{N}_u \wedge \mathbf{N}_v \rangle}{\|X_u \wedge X_v\|^2} = \frac{\nabla F H^*(F) \nabla F^T}{\|\nabla F\|^4}.$$

□

La formula appena ottenuta è un'estensione al caso di tre variabili della formula (2.4). Osserviamo che al denominatore compare $\|\nabla F\|^4$ in luogo di $\|\nabla F\|^3$. Questo fa sì che la curvatura di Gauss sia la stessa per $F(x, y, z) = 0$ sia la stessa di $cF(x, y, z) = 0$, dove c è una costante. Per quanto riguarda il calcolo esplicito di $\mathcal{K}$, risulta utile la formulazione seguente:

Corollario 2.2.2 (Formula alternativa per il calcolo di $\mathcal{K}$)**.**

$$\mathcal{K} = -\frac{\det \begin{pmatrix} H(F) & \nabla F^T \\ \nabla F & 0 \end{pmatrix}}{\|\nabla F\|^4}. \tag{2.9}$$

Dimostrazione. Poichè il numeratore è identico a quello della (2.8), basta mostrare l'equivalenza tra i numeratori. Sviluppiamoli entrambi:

$$
\begin{aligned}
\det\begin{pmatrix} H(F) & \nabla F^T \\ \nabla F & 0 \end{pmatrix} =& \det\begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} & F_x \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} & F_y \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} & F_z \\ F_x & F_y & F_z & 0 \end{pmatrix} \\
=& - F_{xz}F_yF_{yx}F_z + F_xF_{xz}F_{yy}F_z - F_xF_{xy}F_{yz}F_z + F_{xx}F_yF_{yz}F_z + \\
& + F_{xy}F_{yx}F_z^2 - F_{xx}F_{yy}F_z^2 + F_{xz}F_y^2F_{zx} - F_xF_yF_{yz}F_{zx} + \\
& - F_{xy}F_yF_zF_{zx} + F_xF_{yy}F_zF_{zx} - F_xF_{xz}F_yF_{zy} + F_x^2F_{yz}F_{zy} + \\
& + F_{xx}F_yF_zF_{zy} - F_xF_{yx}F_zF_{zy} + F_xF_{xy}F_yF_{zz} - F_{xx}F_y^2F_{zz} + \\
& + F_xF_yF_{yx}F_{zz} - F_x^2F_{yy}F_{zz};
\end{aligned}
$$

$\nabla F H^*(F) \nabla F^T =$

$$
\begin{aligned}
=&(F_x, F_y, F_z)\begin{pmatrix} F_{yy}F_{zz} - F_{yz}F_{zy} & F_{yz}F_{zx} - F_{yx}F_{zz} & F_{yx}F_{zy} - F_{yy}F_{zx} \\ F_{xz}F_{zy} - F_{xy}F_{zz} & F_{xx}F_{zz} - F_{xz}F_{zx} & F_{xy}F_{zx} - F_{xx}F_{zy} \\ F_{xy}F_{yz} - F_{xz}F_{yy} & F_{yx}F_{xz} - F_{xx}F_{yz} & F_{xx}F_{yy} - F_{xy}F_{yx} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} = \\
=& - F_{xz}F_yF_{yx}F_z + F_xF_{xz}F_{yy}F_z - F_xF_{xy}F_{yz}F_z + F_{xx}F_yF_{yz}F_z + F_{xy}F_{yx}F_z^2 + \\
& - F_{xx}F_{yy}F_z^2 + F_{xz}F_y^2F_{zx} - F_xF_yF_{yz}F_{zx} - F_{xy}F_yF_zF_{zx} + F_xF_{yy}F_zF_{zx} + \\
& - F_xF_{xz}F_yF_{zy} + F_x^2F_{yz}F_{zy} + F_{xx}F_yF_zF_{zy} - F_xF_{yx}F_zF_{zy} + F_xF_{xy}F_yF_{zz} + \\
& - F_{xx}F_y^2F_{zz} + F_xF_yF_{yx}F_{zz} - F_x^2F_{yy}F_{zz}.
\end{aligned}
$$

Le due espressioni sono identiche e, se cambiate di segno, coincidono con gli sviluppi dei numeratori in enunciato e nella formula (2.8). □

Ricaviamo ora una formula per la curvatura media di una superficie in forma implicita. Ci serviremo di una identità di cui, non trattandosi di un risultato noto, riportiamo una dimostrazione:

Lemma 2.2.3. *Per ogni coppia di vettori a e b di $\mathbb{R}^3$ e per ogni M, matrice simmetrica 3×3, si ha*

$$b \wedge (aM) - a \wedge (bM) = (a \wedge b)M - \mathrm{Tr}(M)(a \wedge b), \tag{2.10}$$

Dimostrazione. Sia M uan matrice simmetrica 3×3. Definiamo

$$
\begin{aligned}
\varphi_M : \quad \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^3 \\
(a, b) &\longmapsto b \wedge (aM) - a \wedge (bM).
\end{aligned}
$$

Mostriamo che φ_M è bilineare. Siano $a, b, c \in \mathbb{R}^3$ e $\lambda \in \mathbb{R}$. Allora

$$\begin{aligned}
\varphi_M(a+b,c) &= c \wedge ((a+b)M) - (a+b) \wedge (cM) \\
&= c \wedge (aM + bM) - a \wedge (cM) - b \wedge (cM) \\
&= (c \wedge (aM) - a \wedge (cM)) + (c \wedge (bM) - b \wedge (cM)) \\
&= \varphi_M(a,c) + \varphi_M(b,c).
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\varphi_M(\lambda a,c) &= c \wedge (\lambda aM) - (\lambda a) \wedge (cM) \\
&= c \wedge \lambda(aM) - \lambda(a \wedge (cM)) \\
&= \lambda(c \wedge (aM) - \lambda(a \wedge (cM)) \\
&= \lambda(c \wedge (aM) - a \wedge (cM)) \\
&= \lambda\varphi_M(a,c).
\end{aligned}$$

Per la linearità nel secondo argomento notiamo che

$$\varphi_M(c, a+b) = -\varphi_M(a+b, c)$$

per il quale si è già provata la linearità. A questo punto è sufficiente provare l'identità (2.10) per una base. Poichè M è supposta simmetrica, essa è diagonalizzabile, dunque possiamo scegliere una base ortonormale di suoi autovettori: $\{e_1, e_2, e_3\}$. Indichiamo con λ_1, λ_2, λ_3 gli autovalori corrispondenti. Supponiamo sia

$$e_1 \wedge e_2 = e_3; \qquad e_2 \wedge e_3 = e_1; \qquad e_3 \wedge e_1 = e_2;$$

che si può riassumere come

$$e_i \wedge e_{i+1} = e_{i+2} \qquad \text{e} \qquad e_i \wedge e_{i+2} = -e_{i+1},$$

dove i pedici si intendono presi modulo 3. Allora, per qualunque $i \in \{1,2,3\}$ si ha:

$$e_i \wedge (e_iM) - e_i \wedge (e_iM) = 0 = \mathrm{Tr}M(e_i \wedge e_i) - (e_i \wedge e_i)M$$

dunque l'identità è verificata. Consideriamo ora e_i e e_{i+1}. Si ha:

$$\begin{aligned} e_{i+1} \wedge (e_i M) - e_i \wedge (e_{i+1} M) &= e_{i+1} \wedge \lambda_i e_i - e_i \wedge \lambda_{i+1} e_{i+1} \\ &= -(\lambda_i + \lambda_{i+1})(e_i \wedge e_{i+1}) \\ &= -(\lambda_i + \lambda_{i+1})(e_i \wedge e_{i+1}) \pm \lambda_{i+2}(e_i \wedge e_{i+1}) \\ &= \lambda_{i+2} e_{i+2} - (\lambda_i + \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2})(e_i \wedge e_{i+1}) \\ &= (e_i \wedge e_{i+1})M - \mathrm{Tr}(M)(e_i \wedge e_{i+1}). \end{aligned}$$

Consideriamo ora e_i e e_{i+2}. Si ha:

$$\begin{aligned} e_{i+2} \wedge (e_i M) - e_i \wedge (e_{i+2} M) &= e_{i+2} \wedge \lambda_i e_i - e_i \wedge \lambda_{i+2} e_{i+2} \\ &= -(\lambda_i + \lambda_{i+2})(e_i \wedge e_{i+2}) \\ &= -(\lambda_i + \lambda_{i+2}) e_{i+1} \pm \lambda_{i+1}(e_i \wedge e_{i+2}) \\ &= \lambda_{i+1} e_{i+1} - (\lambda_i + \lambda_{i+1} + \lambda_{i+2})(e_i \wedge e_{i+2}) \\ &= (e_i \wedge e_{i+2})M - \mathrm{Tr}(M)(e_i \wedge e_{i+2}). \end{aligned}$$

□

Teorema 2.2.4 (Formula per la curvatura media)**.** *Data una superficie in forma implicita, $F(x, y, z) = 0$, in ogni punto in cui la superficie è regolare, ossia $\nabla F \neq 0$, si ha:*

$$\mathcal{H} = \frac{\nabla F H(F) \nabla F^T - \|\nabla F\|^2 \mathrm{Tr}(H(F))}{2\|\nabla F\|^3}. \tag{2.11}$$

Dimostrazione. Dimostriamo che la formula scritta sopra è equivalente alla (1.6). Come si è visto nel Teorema 2.2.1, si ha:

$$\mathbf{N}_u = \frac{X_u H(F)}{\|\nabla F\|} + \nabla F^{\|} \qquad \text{e} \qquad \mathbf{N}_v = \frac{X_v H(F)}{\|\nabla F\|} + \nabla F^{\|},$$

da cui:

$$\begin{aligned} X_v \wedge \mathbf{N}_u &= \frac{X_v \wedge (X_u H(F))}{\|\nabla F\|} + \nabla F^{\perp}; \\ X_u \wedge \mathbf{N}_v &= \frac{X_u \wedge (X_v H(F))}{\|\nabla F\|} + \nabla F^{\perp}. \end{aligned}$$

Allora:

$$X_v \wedge \mathbf{N}_u - X_u \wedge \mathbf{N}_v = \frac{X_v \wedge (X_u H(F)) - X_u \wedge (X_v H(F))}{\|\nabla F\|} + \nabla F^{\perp}.$$

Sfruttando il Lemma 2.2.3 possiamo scrivere:

$$X_v \wedge \mathbf{N}_u - X_u \wedge \mathbf{N}_v = \frac{(X_v \wedge X_u)H(F) - \mathrm{Tr}(H(F))(X_v \wedge X_u)}{\|\nabla F\|} + \nabla F^{\perp}.$$

Ora, ∇F e $(X_u \wedge X_v)$ sono entrambi ortogonali alla superficie, quindi, per qualche costante λ, sarà $(X_u \wedge X_v) = \lambda \nabla F$. Quindi:

$$\langle (X_v \wedge X_u)\,,\,(X_v \wedge \mathbf{N}_u - X_u \wedge \mathbf{N}_v)\rangle = \frac{\lambda^2 \nabla F H(F) \nabla F^T - \lambda^2 \mathrm{Tr}(H(F))\|\nabla F\|^2}{\|\nabla F\|};$$

e

$$\|X_v \wedge X_u\|^2 = \lambda^2 \|\nabla F\|^2.$$

Pertanto:

$$\begin{aligned}\mathcal{H} &= \frac{\langle X_u \wedge X_v\,,\,(X_v \wedge \mathbf{N}_u - X_u \wedge \mathbf{N}_v)\rangle}{2\|X_u \wedge X_v\|^2}\\ &= \frac{\nabla F H(F) \nabla F^T - \|\nabla F\|^2 \mathrm{Tr}(H(F))}{2\|\nabla F\|^3}.\end{aligned}$$

□

Corollario 2.2.5.

$$\mathcal{H} = -\,\mathbf{div}\,(\mathbf{N}(F)) = -\,\langle \nabla\,,\,\frac{\nabla F}{\|\nabla F\|}\rangle\,. \tag{2.12}$$

□

Notiamo, anche qui, come la formula (2.12) sia un'estensione della (2.7) data nel caso di curve piane.

Ancora una volta, poichè la superficie data da $F(x, y, z) = 0$ coincide con quella data da $cF(x, y, z) = 0$ per ogni $c \neq 0$, è opportuno discutere l'invarianza delle formule per la curvatura rispetto a trasformazioni di questo tipo. Nel caso delle curve, abbiamo visto che la curvatura rimaneva invariata in modulo, ma cambiava di segno a seconda del segno della costante c. Per quanto riguarda le curvature delle superfici, accade che la curvatura di Gauss sia totalmente invariante, mentra la curvatura media continua a comportarsi come la curvatura delle curve piane. Infatti, sostituendo F con cF in (2.8), compare un fattore c^4 sia a numeratore che a denominatore, ciò che lascia invariata l'espressione di $\mathcal{K}$. Tale fattore, però, risulta essere c^3 nel caso della curvatura media data in (2.11), ne consegue che $\mathcal{H}$ rimane invariata solo in modulo, mentre il suo segno cambia se c è negativa. Si vede quindi che la curvatura media stabilisce un'analogia più forte con la curvatura con segno delle curve piane di quanto non faccia la curvatura di Gauss.

Analogamente a quanto fatto per le curve piane, quando abbiamo calcolato la curvatura di una circonferenza, ora calcoleremo le curvature di una sfera definita in forma implicita.

Esempio 2.2.6 (Sfera)**.** Una sfera in $\mathbb{R}^3$ è l'insieme delle terne $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ che soddisfano

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0.$$

Il gradiente è dato da

$$\nabla F = (2x, 2y, 2z)$$

mentre per l'Hessiano si ha:

$$H(F) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

da cui:

$$H^*(F) = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

e infine $\mathrm{Tr}(H(F)) = 6$.
Possiamo dunque calcolare

$$\mathcal{K} = \frac{\nabla F H^*(F) \nabla F^T}{\|\nabla F\|^4} = \frac{(2x, 2y, 2z) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix}}{(4x^2 + 4y^2 + 4z^2)^2} = \frac{16(x^2 + y^2 + z^2)}{16(x^2 + y^2 + z^2)^2} = \frac{1}{r^2}$$

e

$$\begin{aligned}
\mathcal{H} &= \frac{\nabla F H(F) \nabla F^T - \|\nabla F\|^2 \mathrm{Tr}(H(F))}{2\|F\|^3} \\
&= \frac{(2x, 2y, 2z) \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \\ 2z \end{pmatrix} - 6(4x^2 + 4y^2 + 4z^2)}{2(4x^2 + 4y^2 + 4z^2)^{3/2}} \\
&= \frac{8r^2 - 24r^2}{2(8r^3)} = -\frac{1}{r}.
\end{aligned}$$

2.3 Curvatura e torsione di curve nello spazio

In questa sezione utilizziamo i risultati descritti nelle precedenti per ricavare delle formule per il calcolo della curvatura e della torsione di curve nello spazio. Chiaramente, non è possibile definire una curva non piana come una (iper)superficie di livello. Questa, infatti, è ottenuta intersecando un insieme di punti di $\mathbb{R}^n$ con un iperpiano, che ha dimensione $n-1$. Ne consegue che se intersechiamo un sottoinsieme bidimensionale di punti di $\mathbb{R}^3$ con un piano, otteniamo una curva piana, mentre in dimensione superiore otterremo sempre insiemi di dimensione maggiore di uno, quindi non curve. Le curve nello spazio, allora, vengono definite in forma implicita come intersezione di due superfici:

$$\{F(x,y,z)=0\}\cap\{G(x,y,z)=0\}.$$

La curvatura delle curve nello spazio è definita, essenzialmente, attraverso il vettore tangente. Sappiamo che ∇F e ∇G sono ortogonali alle superfici rappresentate da $F(x,y,z)=0$ e $G(x,y,z)=0$ rispettivamente. Il loro prodotto vettoriale, quindi, sarà tangente alla curva intersezione. Poniamo $\mathrm{Tan}(F,G)=\nabla F\wedge\nabla G$ da cui:

$$\mathbf{T}(F,G):=\frac{\mathrm{Tan}(F,G)}{\|\mathrm{Tan}(F,G)\|}=\frac{\nabla F\wedge\nabla G}{\|\nabla F\wedge\nabla G\|}.$$

Ricaviamo una formula per il calcolo della curvatura di una curva nello spazio.

Teorema 2.3.1 (Formula per la curvatura di una curva nello spazio)**.**

$$\kappa=\frac{\|[\mathrm{Tan}(F,G)\nabla(\mathrm{Tan}(F,G))]\wedge\mathrm{Tan}(F,G)\|}{\|\mathrm{Tan}(F,G)\|^3}. \tag{2.13}$$

Dimostrazione. Partiamo dalla prima delle formule di Frenet (1.2). Moltiplicando vettorialmente per $\mathbf{T}$ e passando alle norme si ottiene:

$$\kappa=\left\|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\wedge\mathbf{T}\right\|.$$

Ora,

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds}=\left(\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right)=\left(\frac{dx}{ds}+\frac{dy}{ds}+\frac{dz}{ds}\right)\begin{pmatrix}\frac{\partial\mathbf{T}}{\partial x}\\ \frac{\partial\mathbf{T}}{\partial y}\\ \frac{\partial\mathbf{T}}{\partial z}\end{pmatrix}=\mathbf{T}(\nabla(\mathbf{T})),$$

quindi:

$$\kappa=\|[\mathbf{T}(\nabla(\mathbf{T}))]\wedge\mathbf{T}\|.$$

Da cui, sostituendo $\mathbf{T}$, si ottiene:

$$\begin{aligned}\kappa&=\frac{\|[\mathrm{Tan}(F,G)\nabla(\mathrm{Tan}(F,G))]\wedge\mathrm{Tan}(F,G)\|}{\|\mathrm{Tan}(F,G)\|^3}\\&=\frac{\|[(\nabla F\wedge\nabla G)(\nabla(\nabla F\wedge\nabla G))]\wedge(\nabla F\wedge\nabla G)\|}{\|\nabla F\wedge\nabla G\|^3}.\end{aligned}$$ □

Vediamo, ancora, come si applica la formula data al caso delle circonferenze. Esistono molti modi per definire una circonferenza come intersezione di superfici in forma impli-

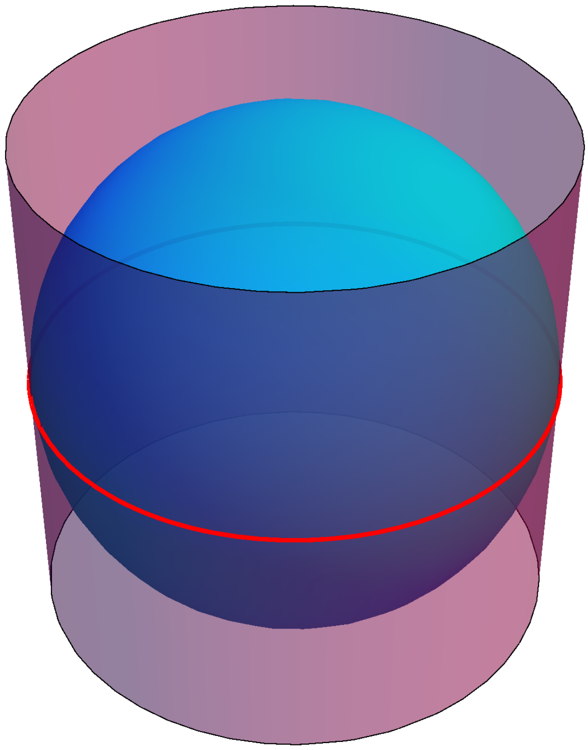

Figura 2.1: Circonferenza intersezione di sfera e cilindro.

cita: il più immediato è quello di intersecare una sfera con un piano, un altro è quello di intersecare tra loro due sfere e un altro ancora è quello di considerare una sfera tangente internamente ad un cilindro. Quest'ultimo, pur essendo il meno usuale, risulta più semplice dal punto di vista dei calcoli, quindi lo riportiamo in dettaglio.

Esempio 2.3.2 (Circonferenza come intersezione di sfera e cilindro)**.** Consideriamo la sfera definita da $F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$ e il cilindro definito da $G(x,y,z) = x^2 + y^2 - r^2 = 0$. Essi sono la sfera di raggio r con centro l'origine e il cilindro infinito di raggio r attorno all'asse z. La loro intersezione è la circonferenza di raggio r, centrata nell'origine e giacente sul piano xy: possiamo vederla disegnata in rosso in **Figura 2.1**. Come sappiamo, la sua curvatura vale $\frac{1}{r}$. Si ha:

$$\nabla F = (2x, 2y, 2z), \qquad \nabla G = (2x, 2y, 0),$$

da cui:

$$\mathrm{Tan}(F,G) = \nabla F \wedge \nabla G = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 2x & 2y & 0 \end{vmatrix} = (-4yz, 4xz, 0).$$

Si ha poi

$$\|\mathrm{Tan}(F,G)\|^3 = (16x^2z^2 + 16y^2z^2)^{\frac{3}{2}} = 64z^3(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}} = 64z^3r^3$$

e

$$\nabla(\mathrm{Tan}(F,G)) = \begin{pmatrix} 0 & 4z & 0 \\ -4z & 0 & 0 \\ -4y & 4x & 0 \end{pmatrix}.$$

Ora

$$\begin{aligned}\mathrm{Tan}(F,G)\nabla(\mathrm{Tan}(F,G) &= (-4yz, 4xz, 0) \begin{pmatrix} 0 & 4z & 0 \\ -4z & 0 & 0 \\ -4y & 4x & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-16xz^2, -16yz^2, 0)\end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned}\mathrm{Tan}(F,G)\nabla(\mathrm{Tan}(F,G)) \wedge \mathrm{Tan}(F,G) &= (-16xz^2, -16yz^2, 0) \wedge (-4yz, 4xz, 0) \\ &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -16xz^2 & -16yz^2 & 0 \\ -4yz & -4xz & 0 \end{vmatrix} \\ &= (0, 0, -64x^2z^3 - 64y^2z^3) \\ &= (0, 0, -64z^3(x^2+y^2)) \\ &= (0, 0, -64z^3r^2).\end{aligned}$$

In conclusione:

$$\kappa = \frac{\|[\mathrm{Tan}(F,G)\nabla(\mathrm{Tan}(F,G))] \wedge \mathrm{Tan}(F,G)\|}{\|\mathrm{Tan}(F,G)\|^3} = \frac{64z^3r^2}{64z^3r^3} = \frac{1}{r}.$$

Vediamo un altro esempio riguardante un'altra curva famosa ottenuta intersecando una sfera con un cilindro.

Esempio 2.3.3 (La curva di Viviani [1])**.** La **curva di Viviani** è la curva ottenuta intersecando una sfera con un cilindro, tangente ad essa internamente e la cui circonferenza di base ha diametro pari al raggio della sfera. Un esempio è mostrato in **Figura 2.2**, dove la curva intersezione è disegnata in rosso. Noi consideriamo la sfera unitaria di centro l'origine, di equazione

$$F(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$$

e il cilindro di raggio $1/2$ con asse la retta parallela all'asse z per il punto $(1/2, 0, 0)$ che

[1]Vincenzo Viviani (1622–1703). Nel 1692 propose l'**Aenigma Geometricum de miro opificio Testudinis Quadrabilis Hemisphericae**, noto come il **celebre enigma fiorentino**. Si chiede di ricavare quattro finestre uguali da una cupola emisferica, in modo che la parte rimanente sia perfettamente quadrabile. La soluzione del problema consiste nel ricavare le quattro finestre seguendo il profilo della curva di Viviani.

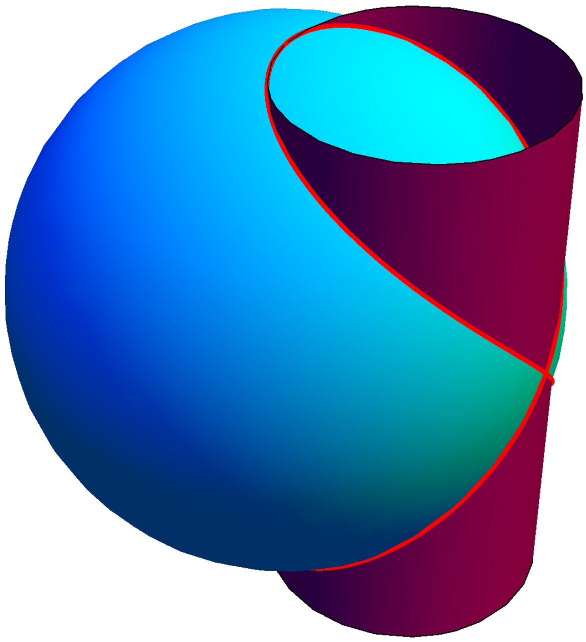

Figura 2.2: Finestra di Viviani.

ha equazione

$$G(x,y,z) = (x - \frac{1}{2})^2 + y^2 - \frac{1}{4} = 0.$$

Si ha:

$$\nabla F = (2x, 2y, 2z) \qquad \text{e} \qquad \nabla G = (2x-1, 2y, 0),$$

da cui:

$$\mathrm{Tan}(F,G) = \nabla F \wedge \nabla G = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2x & 2y & 2z \\ 2x-1 & 2y & 0 \end{vmatrix} = (-4yz, 4xz - 2z, 2y)$$

e

$$\|\mathrm{Tan}(F,G)\| = 4\sqrt{(1-2x)^2 z^2 + (1-4z^2)y^2}.$$

Ora:

$$\nabla(\mathrm{Tan}(F,G)) = \begin{pmatrix} 0 & -4z & -4y \\ 4z & 0 & 4x-2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

quindi:

$$\begin{aligned} \mathrm{Tan}(F,G)\nabla(\mathrm{Tan}(F,G)) &= (-4yz, 4xz-2z, 2y) \begin{pmatrix} 0 & -4z & -4y \\ 4z & 0 & 4x-2 \\ 0 & 2 & 0 \end{pmatrix} \\ &= (-8(y^2 + (-1+2x)z^2), 4y(-1+2x-4z^2), 4(-1+2x)z), \end{aligned}$$

e

$$[\mathrm{Tan}\nabla(\mathrm{Tan})]\wedge\mathrm{Tan} = (-8((1-2x)^2z^2+y^2(1-2x+4z^2)), 16y^3, -16(1-4x+4x^2+4y^2)z^3).$$

Abbiamo quindi tutti gli elementi per calcolare:

$$\begin{aligned}\kappa &= \frac{\|[\mathrm{Tan}(F,G)\nabla(\mathrm{Tan}(F,G))]\wedge\mathrm{Tan}(F,G)\|}{\|\mathrm{Tan}(F,G)\|^3}\\ &= \frac{\sqrt{4y^6+4(1-4x+4x^2+4y^2)^2z^6+((1-2x)^2z^2+y^2(1-2x+4z^2))^2}}{((1-2x)^2z^2+y^2(1+4z^2))^{\frac{3}{2}}}.\end{aligned}$$

Per le curve nello spazio, oltre alla curvatura è possibile definire la *torsione*. Cerchiamo quindi una formula che ci permetta di calcolarla per le curve definite in forma implicita.

Teorema 2.3.4. *Sia* $\{F(x,y,z)=0\}\cap\{G(x,y,z)=0\}$ *una curva regolare con curvatura non nulla. Poniamo*

$$\begin{aligned}T_* &= \mathrm{Tan}(F,G) = \nabla F\wedge\nabla G;\\ \Gamma &= T_*(\nabla T_*) = (\nabla F\wedge\nabla G)(\nabla(\nabla F\wedge\nabla G));\\ \Lambda &= T_*(\nabla(\nabla T_*))T_*^{\mathsf{T}} + \Gamma\nabla T_* = T_*(\nabla(\nabla T_*))T_*^{\mathsf{T}} + T_*(\nabla T_*)\nabla T_*.\end{aligned}$$

Si ha allora:

$$\tau = \frac{\det(T_*,\Gamma,\Lambda)}{\|T_*\wedge\Gamma\|^2}. \tag{2.14}$$

Dimostrazione. Vogliamo mostrare che la formula (2.14) è equivalente alla (1.1). Partiamo proprio da quest'ultima:

$$\tau = \frac{\det(\mathbf{T},\frac{d\mathbf{T}}{ds},\frac{d^2\mathbf{T}}{ds^2})}{\kappa^2}$$

e vediamo di riscrivere i termini che compaiono nel determinante a numeratore. Si ha:

$$\mathbf{T} = \frac{T_*}{\|T_*\|},$$

e

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{\|T_*\|\frac{dT_*}{ds} - \frac{d\|T_*\|}{ds}T_*}{\|T_*\|^2} = \frac{1}{\|T_*\|}\frac{dT_*}{ds} - \frac{1}{\|T_*\|}\frac{d\|T_*\|}{ds}T_*.$$

Ma

$$\frac{dT_*}{ds} = \frac{\partial T_*}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial T_*}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial T_*}{\partial z}\frac{dz}{ds} = \mathbf{T}\nabla T_* = \frac{T_*(\nabla T_*)}{\|T_*\|},$$

dunque:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{T_*\nabla T_*}{\|T_*\|^2} - \left(\frac{1}{\|T_*\|}\frac{d\|T_*\|}{ds}\right)T_* = \frac{\Gamma}{\|T_*\|^2} + T_*^{\|}.$$

Anche qui, indichiamo con $T_*^{\|}$ un termine parallelo a T_*. Dei termini che compaiono nella (1.1) manca solo $\dfrac{d^2\mathbf{T}}{ds^2}$. Si ha

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{T}}{ds^2} &= \frac{\|T_*\|^2\dfrac{d\Gamma}{ds}}{\|T_*\|^4} - \frac{2\|T_*\|\Gamma\dfrac{d\|T_*\|}{ds}}{\|T_*\|^4} = \frac{1}{\|T_*\|^2}\frac{d\Gamma}{ds} - \frac{2}{\|T_*\|^3}\frac{d\|T_*\|}{ds}\Gamma + \frac{d(T_*^{\|})}{ds}\\ &= \frac{1}{\|T_*\|^2}\frac{d\Gamma}{ds} - \frac{2}{\|T_*\|^3}\frac{d\|T_*\|}{ds}T_*(\nabla T_*) + \frac{d(T_*^{\|})}{ds}\\ &= \frac{1}{\|T_*\|^2}\frac{d\Gamma}{ds} + \left(\frac{T_*\nabla T_*}{\|T_*\|^2}\right)^{\|} + \frac{d(T_*^{\|})}{ds}.\end{aligned}$$

Ma

$$\begin{aligned}\frac{d\Gamma}{ds} &= \frac{d(T_*\nabla T_*)}{ds} = \frac{dT_*}{ds}\nabla T_* + T_*\frac{d\nabla T_*}{ds}\\ &= \frac{T_*\nabla T_*\nabla T_*}{\|T_*\|} + T_*\left(\frac{\partial\nabla T_*}{\partial x}\frac{dx}{ds} + \frac{\partial\nabla T_*}{\partial y}\frac{dy}{ds} + \frac{\partial\nabla T_*}{\partial z}\frac{dz}{ds}\right)\\ &= \frac{T_*\nabla T_*\nabla T_*}{\|T_*\|} + T_*\nabla(\nabla T_*)\mathbf{T}^{\mathsf{T}} = \frac{T_*\nabla T_*\nabla T_*}{\|T_*\|} + \frac{T_*\nabla(\nabla T_*)T_*^{\mathsf{T}}}{\|T_*\|},\end{aligned}$$

quindi:

$$\frac{d^2\mathbf{T}}{ds^2} = \frac{T_*\nabla T_*\nabla T_*}{\|T_*\|} + \frac{T_*\nabla(\nabla T_*)T_*^{\mathsf{T}}}{\|T_*\|} + \left(\frac{T_*\nabla T_*}{\|T_*\|^2}\right)^{\|} + \frac{d(T_*^{\|})}{ds},$$

e, poichè $\dfrac{d(T_*^{\|})}{ds}$ fornisce un termine parallelo a T_* e uno parallelo a $T_*\nabla T_*$, possiamo scrivere:

$$\begin{aligned}\frac{d^2\mathbf{T}}{ds^2} &= \frac{T_*\nabla T_*\nabla T_*}{\|T_*\|} + \frac{T_*\nabla(\nabla T_*)T_*^{\mathsf{T}}}{\|T_*\|} + \left(\frac{T_*\nabla T_*}{\|T_*\|^2}\right)^{\|} + T_*^{\|}\\ &= \frac{\Lambda}{\|T_*\|^3} + \left(\frac{T_*\nabla T_*}{\|T_*\|^2}\right)^{\|} + T_*^{\|}.\end{aligned}$$

Possiamo ora sostituire in (1.1), tenendo presente che i termini $T_*^{\|}$ e $\left(\frac{T_*\nabla T_*}{\|T_*\|^2}\right)^{\|}$ non danno contributo nel calcolo del determinante. Si ha pertanto:

$$\tau = \frac{\det(\mathbf{T}, \frac{d\mathbf{T}}{ds}, \frac{d^2\mathbf{T}}{ds^2})}{\kappa^2} = \frac{\det(T_*, \Gamma, \Lambda)}{\kappa^2\|T_* \wedge \Gamma\|^6}.$$

Ora, sostituendo κ dalla (2.13) si ottiene proprio

$$\tau = \frac{\det(T_*, \Gamma, \Lambda)}{\|T_* \wedge \Gamma\|^2}.$$

□

2.4 L'esempio della Giroide

Uno dei motivi che hanno spinto alla ricerca di formule che permettessero di calcolare le curvature di curve e superfici in forma implicita, è legato allo studio di alcune superfici minime. Una di queste è la *Giroide*. Si tratta di una superficie minima regolarmente immersa e triplamente periodica, scoperta nel 1970 da A. Schoen. È possibile parametrizzare la Giroide attraverso la rappresentazione di Weierstrass, facendo uso di complicate funzioni ellittiche. Una rappresentazione grafica della Giroide parametrizzata è mostrata in **Figura 2.3**. Come già detto, essa ha una parametrizzazione molto complicata e difficile

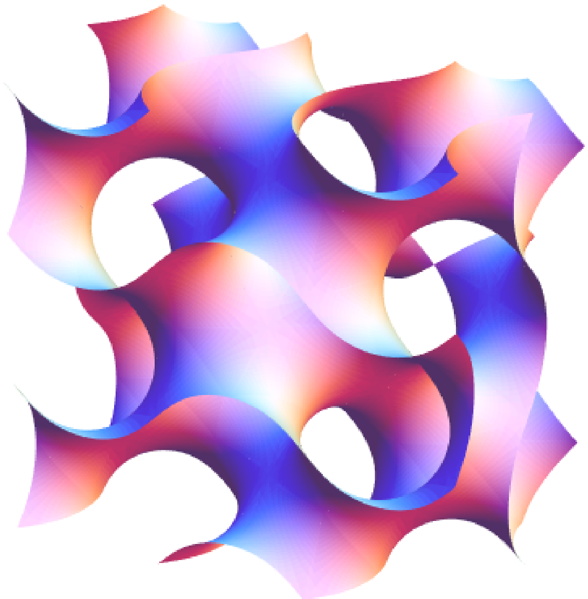

Figura 2.3: Giroide di Schoen.

da studiare. Se, però, si considera la seguente funzione

$$\mathcal{G}(x, y, z) = \cos(x)\sin(y) + \cos(y)\sin(z) + \cos(z)\sin(x), \tag{2.15}$$

e si cerca la rappresentazione grafica della superficie di livello $\mathcal{G}(x, y, z) = 0$, si ottiene la superficie rappresentata in **Figura 2.4**. La somiglianza con la Giroide è sorprendente, a occhio sono indistinguibili. Ci chiediamo allora se $\mathcal{G}(x, y, z) = 0$ sia proprio la Giroide; in tal caso, infatti, avremmo trovato una rappresentazione estremamente semplice di questa superficie. Ora, la Giroide sappiamo essere una superficie minima, quindi, se la superficie di livello 0 della (2.15) fosse anch'essa una Giroide, dovrebbe avere curvatura media nulla. Possiamo allora applicare la formula (2.11) per calcolare $\mathcal{H}$; otteneniamo una frazione il

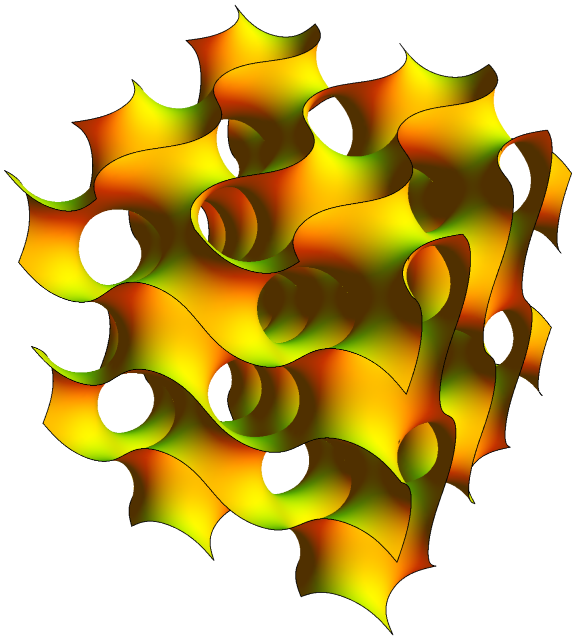

Figura 2.4: Grafico di $\mathcal{G}(x, y, z) = 0$.

cui numeratore è:

$$\begin{aligned} N_{\mathcal{H}}(x, y, z) = & \cos^3 x(-1 + \cos(2y) + 2\cos(2z)) \sin y + \\ & + \cos^2 x \cos y(-2 + \cos(2y) + \cos(2z)) \sin z + \\ & + \cos y(2 + \cos(2x) + \cos(2z)) \sin^2 y \sin z + \\ & -2 \cos x \sin y(\cos^2 y(\cos^2 z - 2\sin^2 x) + (\sin^2 x - \sin^2 y) \sin^2 z) \end{aligned}$$

Con un calcolo diretto si vede che

$$N_{\mathcal{H}}(\pi, \pi, \frac{\pi}{2}) = 2, \qquad N_{\mathcal{H}}(\pi, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{4}) = 1, \qquad N_{\mathcal{H}}(0, 0, 1) = (\cos(2) - 1)\sin(1).$$

Quindi esistono dei punti in cui la superficie di livello $\mathcal{G}(x, y, z) = 0$ ha curvatura media diversa da zero, quindi non è una superficie minima. Possiamo allora concludere che la (2.15) non è una giroide. Essa, tuttavia, ne costituisce un'ottima approssimazione, molto utile per la modellizzazione.

Appendice A

Programmi per il calcolo delle curvature con *Mathematica*

Per effettuare il calcolo delle curvature, oltre che per rappresentare le curve e le superfici, possiamo servirci del programma *Mathematica*.

Possiamo definire un comando per calcolare la curvatura con segno di una curva piana. Il seguente miniprogramma sfrutta la formula (2.1):

```
planeimplicit[F_][x_, y_] :=
Module[{nablaF, normnablaF, TF, HF},
 nablaF = {D[F[xx, yy], xx], D[F[xx, yy], yy]};
 normnablaF = Sqrt[nablaF[[1]]^2 + nablaF[[2]]^2];
 TF = (1/normnablaF)*{-D[F[xx, yy], yy], D[F[xx, yy], xx]};
 HF = {{D[F[xx, yy], xx, xx], D[F[xx, yy], xx, yy]},
   {D[F[xx, yy], yy, xx], D[F[xx, yy], yy, yy]}};
 FullSimplify[(-(TF.HF.TF))/(normnablaF),
   Assumptions -> F[xx, yy] == 0]
  /. {xx -> x, yy -> y}
 ]
```

Il seguente miniprogramma implementa la formula (2.8) e permette di calcolare la curvatura di Gauss di una superficie in forma implicita:

```
gaussimplicit[F_][x_, y_, z_] :=
Module[{nablaF, HF, normnablaF, HFstar},
 nablaF = {D[F[xx, yy, zz], xx], D[F[xx, yy, zz], yy],
   D[F[xx, yy, zz], zz]};
 HF = {{D[F[xx, yy, zz], xx, xx], D[F[xx, yy, zz], xx, yy],
    D[F[xx, yy, zz], xx, zz]},
   {D[F[xx, yy, zz], yy, xx], D[F[xx, yy, zz], yy, yy],
    D[F[xx, yy, zz], yy, zz]},
   {D[F[xx, yy, zz], zz, xx], D[F[xx, yy, zz], zz, yy],
    D[F[xx, yy, zz], zz, zz]}};
 HFstar = {{Cofactor[HF, {1, 1}], Cofactor[HF, {1, 2}],
    Cofactor[HF, {1, 3}]},
   {Cofactor[HF, {2, 1}], Cofactor[HF, {2, 2}], Cofactor[HF, {2, 3}]},
   {Cofactor[HF, {3, 1}], Cofactor[HF, {3, 2}],
    Cofactor[HF, {3, 3}]}};
 normnablaF = Sqrt[nablaF[[1]]^2 + nablaF[[2]]^2 + nablaF[[3]]^2];
 FullSimplify[(nablaF.HFstar.nablaF)/(normnablaF^4),
   Assumptions -> F[xx, yy, zz] == 0]
   /. {xx -> x, yy -> y, zz -> z}
 ]
```

Il seguente miniprogramma definisce una funzione per il calcolo della curvatura media di una superficie definita in forma implicita e riproduce la formula (2.11):

```
meanimplicit[F_][x_, y_, z_] :=
Module[{nablaF, HF, normnablaF},
 nablaF = {D[F[xx, yy, zz], xx], D[F[xx, yy, zz], yy],
 D[F[xx, yy, zz], zz]};
 HF = {{D[F[xx, yy, zz], xx, xx], D[F[xx, yy, zz], xx, yy],
            D[F[xx, yy, zz], xx, zz]},
      {D[F[xx, yy, zz], yy, xx], D[F[xx, yy, zz], yy, yy],
            D[F[xx, yy, zz], yy, zz]},
      {D[F[xx, yy, zz], zz, xx], D[F[xx, yy, zz], zz, yy],
            D[F[xx, yy, zz], zz, zz]}};
 normnablaF = Sqrt[nablaF[[1]]^2 + nablaF[[2]]^2 + nablaF[[3]]^2];
 Simplify[(nablaF.HF.nablaF - normnablaF^2 Tr[HF])/(2 normnablaF^3),
            Assumptions -> F[xx, yy, zz] == 0]
      /. {xx -> x, yy -> y, zz -> z}
]
```

Per applicare il comando appena definito alla funzione definita in (2.15), definiamo la $\mathcal{G}$ in questo modo:

```
pseudoGyroid[x_, y_, z_] =
Cos[x] Sin[y] + Cos[y] Sin[z] + Cos[z] Sin[x]
```

e lanciamo il comando per la curvatura media così:

```
meanimplicit[pseudoGyroid][x, y, z]
```

ottenendo come output:

```
(Cos[x]^3 (-1 + Cos[2 y] + 2 Cos[2 z]) Sin[y] +
  Cos[x]^2 Cos[y] (-2 + Cos[2 y] + Cos[2 z]) Sin[z] +
  Cos[y] (2 + Cos[2 x] + Cos[2 z]) Sin[y]^2 Sin[z] -
  2 Cos[x] Sin[y] (Cos[y]^2 (Cos[z]^2 - 2 Sin[x]^2) +
  (Sin[x]^2 -Sin[y]^2) Sin[z]^2))/(4 ((Cos[x] Cos[z] -
     Sin[x] Sin[y])^2 + (Cos[y] Cos[z] -
     Sin[x] Sin[z])^2 + (Cos[x] Cos[y] - Sin[y] Sin[z])^2)^(3/2))
```

Mathematica consente di verificare se una data funzione è identicamente nulla, o più in generale se una determinata uguaglianza sussiste o meno. Data una funzione f è sufficiente digitare f === 0 ottenendo come output `True`, se f è identicamente nulla, `False` altrimenti. Definiamo allora una funzione di tre variabili come il numeratore della curvatura media ottenuta per `pseudoGyroid` e effettuiamo il controllo:

```
In[5]:= f[x_, y_, z_] =
       (Cos[x]^3 (-1 + Cos[2 y] + 2 Cos[2 z]) Sin[y] +
       Cos[x]^2 Cos[y] (-2 + Cos[2 y] + Cos[2 z]) Sin[z] +
       Cos[y] (2 + Cos[2 x] + Cos[2 z]) Sin[y]^2 Sin[z] -
       2 Cos[x] Sin[y] (Cos[y]^2 (Cos[z]^2 - 2 Sin[x]^2) +
       (Sin[x]^2 - Sin[y]^2) Sin[z]^2))

Out[5]= Cos[x]^3 (-1 + Cos[2 y] + 2 Cos[2 z]) Sin[y] +
             Cos[x]^2 Cos[y] (-2 + Cos[2 y] + Cos[2 z]) Sin[z] +
             Cos[y] (2 + Cos[2 x] + Cos[2 z]) Sin[y]^2 Sin[z] -
             2 Cos[x] Sin[y] (Cos[y]^2 (Cos[z]^2 - 2 Sin[x]^2) +
             (Sin[x]^2 - Sin[y]^2) Sin[z]^2)

In[6]:= f[x, y, z] === 0

Out[6]= False
```

Appendice B

Elenco delle formule

In questa appendice vengono raccolte insieme tutte le formule presentate per la curvatura di curve e superfici in forma implicita, per una più facile consultazione.

Curve piane

Notazione

Curva in forma implicita: $F(x, y) = 0$.

Campo normale: $\nabla F = (F_x, F_y)$.

Campo tangente: $\mathrm{Tan}(F) = J\nabla F = (-F_y, F_x)$.

Hessiano: $H(F) = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{pmatrix} = \nabla(\nabla F)$.

Aggiunta dell'Hessiano: $H^*(F) = \begin{pmatrix} F_{yy} & -F_{yx} \\ -F_{xy} & F_{xx} \end{pmatrix} = -\nabla(\mathrm{Tan}(F))$.

Formule per il calcolo della curvatura

$$\kappa_2 = -\frac{\mathrm{Tan}(F)H(F)\mathrm{Tan}(F)^T}{\|\nabla F\|^3}, \qquad \kappa_2 = \frac{\mathrm{Tan}(F)\nabla(\mathrm{Tan}(F))\nabla F^T}{\|\nabla F\|^3},$$

$$\kappa_2 = -\frac{\det\big(\mathrm{Tan}(F)H(F), \quad \nabla F\big)}{\|\nabla F\|^3}, \qquad \kappa_2 = -\frac{\det\big(\mathrm{Tan}(F)\nabla(\mathrm{Tan}(F)), \quad \mathrm{Tan}(F)\big)}{\|\mathrm{Tan}(F)\|^3},$$

$$\kappa_2 = -\frac{\nabla F H^*(F)(\nabla F)^T}{\|\nabla F\|^3}, \qquad \kappa_2 = -\frac{\nabla(F)H(F)\nabla(F)^T - \|\nabla F\|^2\mathrm{Tr}(H(F))}{\|\nabla F\|^3},$$

$$\kappa_2 = \frac{\det\begin{pmatrix} H(F) & \nabla F^T \\ \nabla F & 0 \end{pmatrix}}{\|\nabla F\|^3}, \qquad \kappa_2 = -\left\langle \nabla\,,\ \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} \right\rangle.$$

Superfici

Notazione

Curva in forma implicita: $F(x, y, z) = 0$.

Campo normale: $\nabla F = (F_x, F_y, F_z)$.

Hessiano: $H(F) = \begin{pmatrix} F_{xx} & F_{xy} & F_{xz} \\ F_{yx} & F_{yy} & F_{yz} \\ F_{zx} & F_{zy} & F_{zz} \end{pmatrix} = \nabla(\nabla F)$.

Aggiunta dell'Hessiano: $H^*(F) = \begin{pmatrix} \mathrm{cof}(F_{xx}) & \mathrm{cof}(F_{xy}) & \mathrm{cof}(F_{xz}) \\ \mathrm{cof}(F_{yx}) & \mathrm{cof}(F_{yy}) & \mathrm{cof}(F_{yz}) \\ \mathrm{cof}(F_{zx}) & \mathrm{cof}(F_{zy}) & \mathrm{cof}(F_{zz}) \end{pmatrix}$.

Formule per le curvature

$$\mathcal{K} = \frac{\nabla F H^*(F) \nabla F^T}{\|\nabla F\|^4}, \qquad \mathcal{H} = \frac{\nabla F H(F) \nabla F^T - \|\nabla F\|^2 \mathrm{Tr}(H(F))}{2\|\nabla F\|^3},$$

$$\mathcal{K} = -\frac{\det \begin{pmatrix} H(F) & \nabla F^T \\ \nabla F & 0 \end{pmatrix}}{\|\nabla F\|^4}, \qquad \mathcal{H} = -\left\langle \nabla \, , \, \frac{\nabla F}{\|\nabla F\|} \right\rangle.$$

Curve nello spazio

Notazione

Curva in forma implicita: $\{F(x, y, z)\} \cap \{G(x, y, z)\}$.

Vettore tangente: $T_* = \mathrm{Tan}(F, G) = \nabla F \wedge \nabla G$;

$\Gamma = T_*(\nabla T_*) = (\nabla F \wedge \nabla G)(\nabla(\nabla F \wedge \nabla G))$;

$\Lambda = T_*(\nabla(\nabla T_*))T_*^{\mathsf{T}} + \Gamma \nabla T_* = T_*(\nabla(\nabla T_*))T_*^{\mathsf{T}} + T_*(\nabla T_*)\nabla T_*$.

Formule per la curvatura e la torsione

$$\kappa = \frac{\|[\mathrm{Tan}(F, G)\nabla(\mathrm{Tan}(F, G))] \wedge \mathrm{Tan}(F, G)\|}{\|\mathrm{Tan}(F, G)\|^3} = \frac{\|\Gamma \wedge T_*\|}{\|T_*\|^3}.$$

$$\tau = \frac{\det(T_*, \Gamma, \Lambda)}{\|T_* \wedge \Gamma\|^2}.$$

Bibliografia

[1] Manfredo P. do Carmo. *Differential Geometry of Curves and Surfaces*. Prentice-Hall, New Jersey, 1976.

[2] P. Dombrowsky. Krummungsgrossen gleichungsdefinierter untermannigfaltigkeiten riemannscher mannigflatigkeiten. 1968.

[3] W. Fulton. *Algebraic Curves: an Introduction to Algebraic Geometry*. Mathematical Lecture Notes, 1974.

[4] Ron Goldman. Curvature formulas for implicit curves and surfaces. 2005.

[5] M. Spivak. *A Comprehensive Introduction to Differential Geometry*. Publish or Perish, Boston, MA, 1975.

[6] T. J. Willmore. *An Introduction to Differential Geometry*. Clarendon Press, Oxford, 1959.