Hilbertraumwertige Superlösungen stochastischer Rückwärts-Differentialgleichungen

Masterarbeit

vorgelegt von
Matthias Sroczinski

an der

Universität Konstanz

Mathematisch- Naturwissenschaftliche Sektion
Fachbereich für Mathematik und Statistik

bei
Prof. Dr. Robert Denk
Prof. Dr. Michael Kupper

Konstanz, 18.02.2015

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung und Überblick

Stochastische Rückwärts-Differentialgleichungen (*engl.*: backward stochastic differential equation oder kurz BSDE) gehen zurück auf Bismut [Bis73]. Auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ mit Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ hat eine BSDE die Form

$$\begin{aligned} dY_t &= -g_t(Y_t, Z_t)dt + Z_t dW_t \quad (t \in [0,T)), \\ Y_T &= \xi. \end{aligned} \tag{1.1}$$

Dies ist als Integralgleichung

$$\begin{aligned} Y_s - \int_s^t g_u(Y_u, Z_u)du + \int_s^t Z_u dW_u = Y_t \ \text{ f.s.} \ \ (0 \le s \le t \le T), \\ Y_T = \xi \ \text{ f.s.} \end{aligned} \tag{1.2}$$

zu verstehen. Dabei sind ein $\mathbb{R}^d$-wertiger Wiener Prozess $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ und messbare Funktionen $g : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d} \to \mathbb{R}$ sowie $\xi : \Omega \to \mathbb{R}^n$ gegeben. g heißt Generator und ξ Endbedingung der Gleichung. Eine Lösung von (1.1) ist ein Paar $(Y, Z) = (Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ von $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^{n\times d}$-wertigen stochastischen Prozessen, wobei Y adaptiert und Z f.s. integrierbar und progressiv ist. Y nennt man den Werteprozess, Z den Kontrollprozess der Lösung. Klassischerweise wird die Wohlgestelltheit von BSDEs, das heißt die Existenz und Eindeutigkeit einer Lösung, unter bestimmten Bedingungen an den Generator und an die Endbedingung untersucht. Das erste Resultat für nichtlineare Generatoren stammt von Pardoux und Peng, die in [PP90] die Wohlgestelltheit für Gleichungen mit Lipschitz-Generatoren und L^2-Endbedingungen bewiesen. Im rellwertigen Fall ($n = 1$) zeigte Kobylansky in [Kob00] die Existenz und Eindeutigkeit der Lösung, für eine beschränkte Endbedingung und einen Generator $g_t(y, z)$, der quadratisches Wachstum in z aufweist. Briand und Hu erhielten dies auch für unbeschränkte Endbedingungen (siehe [BH06] und [BH08]). Für Generatoren mit superquadratischem Wachstum ist die Wohlgestelltheit im allgemeinen jedoch nicht mehr gegeben, selbst wenn die Endbedingung beschränkt ist. Dies zeigten Delbaen et al. in [DHB11]. Auch für mehrdimensionale quadratische BSDEs ($n > 1$) lassen sich Beispiele finden, für die keine globale Lösung existiert (siehe etwa [FdR11]). Tevzadze konnte jedoch die Wohlgestelltheit im mehrdimensionalen für kleine Endbedingungen zeigen (siehe [Tev08]).

Für den reellwertigen Fall werden auch Superlösungen von (1.2) untersucht. Eine Superlösung ist ein Paar (Y, Z) von $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^{1\times d}$-wertigen Prozessen, welche die Ungleichungen

$$\begin{aligned} Y_s - \int_s^t g_u(Y_u, Z_u)du + \int_s^t Z_u dW_u \geq Y_t \quad \text{f.s.} \quad (0 \leq s \leq t \leq T), \\ Y_T \geq \xi \quad \text{f.s.} \end{aligned} \tag{1.3}$$

erfüllen. Erstmals erwähnt wurde das Konzept einer Superlösung in [EKPQ97]. Peng bewies in [Pen99] ein Resultat über monotone Grenzwerte von Superlösungen von BSDEs mit Lipschitz-Generatoren und L^2-Endbedingungen. Drapeau et al. zeigten in [DHK13] für BSDEs mit Generatoren, die konvex in z, monoton in y, halbstetig von unten und durch eine affine Funktion von unten beschränkt sind, die Existenz einer eindeutigen minimalen Superlösung, das heißt einer Superlösung $(\hat{Y}, \hat{Z})$, so dass für jede weitere Superlösung (Y, Z) die Ungleichung $\hat{Y}_t \leq Y_t$ für alle $t \in [0, T]$ f.s. gilt.

Die Theorie der hilbertraumwertigen stochastischen Integration (siehe etwa [PR07] Kapitel 2) erlaubt uns eine BSDE der Form (1.2) auch auf Hilberträumen zu betrachten. Dazu fixiere zwei separable Hilberträume $(H, \langle \cdot, \cdot \rangle_H)$ und $(K, \langle \cdot, \cdot \rangle_K)$ sowie einen I_H-zylindrischen Wiener Prozess W. In diesem Fall ist der Generator eine Funktion $g : \Omega \times [0, T] \times K \times \mathcal{S}_2(H, K) \to K$ und die Enbedingung ξ eine K-wertige Zufallsvariable. $\mathcal{S}_2(H, K)$ ist dabei der Raum der Hilbert-Schmidt-Operatoren von H nach K. Eine Lösung ist nun ein Paar (Y, Z) von $K \times \mathcal{S}_2(H, K)$-wertigen stochastischen Prozessen. Für Lipschitz-Generatoren wird die Wohlgestelltheit einer solchen Gleichung etwa in [HP90] bewiesen. Von Superlösungen zu sprechen ergibt hier einen Sinn, wenn wir den Hilbertraum K mit einer Halbordnung versehen, so dass K ein Banachverband wird. In dieser Arbeit wird dazu eine Orthonormalbasis $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von K fixiert. Für $k \in \mathbb{N}$ und $x \in K$ setze dann $x^k := \langle x, e_k \rangle_K$ und definiere die Halbordnung $\leq_K$ auf K durch

$$x \leq_K y :\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} : x^k \leq y^k \quad (x, y \in K).$$

Es lässt sich leicht nachvollziehen, dass $(K, \|\cdot\|_K, \leq_K)$ tatsächlich ein Banachverband ist. Eine hilbertraumwertige Superlösung einer BSDE mit Generator $g : \Omega \times [0, T] \times K \times \mathcal{S}_2(H, K) \to K$ und Enbedingung $\xi : \Omega \to K$

ist für uns also ein Paar (Y, Z) von $K \times \mathcal{S}_2(H, K)$-wertigen stochastischen Prozessen, das

$$\begin{aligned} Y_s - \int_s^t g_u(Y_u, Z_u)du + \int_s^t Z_u dW_u \geq_K Y_t \quad \text{f.s.} \quad (0 \leq s \leq t \leq T), \\ Y_T \geq_K \xi \quad \text{f.s.} \end{aligned} \tag{1.4}$$

oder äquivalent

$$\begin{aligned} (Y_s)^k - \left(\int_s^t g_u(Y_u, Z_u)du \right)^k + \left(\int_s^t Z_u dW_u \right)^k \geq (Y_t)^k \quad \text{f.s.} \ (0 \leq s \leq t \leq T), \\ Y_T^k \geq \xi^k \quad \text{f.s.} \quad (k \in \mathbb{N}) \end{aligned} \tag{1.5}$$

genügt. Zusätzlich werden wir fordern, dass Y fast sicher câdlag Pfade besitzt und Z in $L^2(\Omega \times [0, T], \mathcal{S}_2(H, K))$ liegt, das stochastische Integral $\int Z dW$ also ein stetiges L^2-Martingal ist.

In der vorliegenden Arbeit beschäftigen wir uns einerseits mit der Existenz einer minimalen Superlösung für einen bestimmten Typ von Generatoren und andererseits mit monotonen Limiten von Superlösungen von BSDEs mit Lipschitz-Generatoren. Dabei bauen wir auf den reellwertigen Resultaten in [DHK13] und [Pen99] auf. Die Kapitel 2-4 dienen zur Darstellung wichtiger Begriffe und Resultate, die wir benötigen, um stochastische Analysis mit Werten in Banachverbänden zu betreiben. In den Kapitel 5 und 6 werden dann Superlösungen von BSDEs untersucht. Konkret ist die Arbeit wie folgt gegliedert:

In **Kapitel 2** werden einige Resultate zur stochastischen Analysis in (separablen) Banachräumen weitgehend ohne Beweise wiedergegeben. Die wichtigsten Punkte sind dabei das Bochnerintegral, die Radon-Nikodym-Eigenschaft, banachraumwertige Martingale sowie das hilbertraumwertige Itô-Integral.

In **Kapitel 3** beschäftigen wir uns mit Banachverbänden. Zunächst werden grundlegende Begriffe eingeführt. Anschließend betrachten wir ordnungsstetige Banachverbände etwas genauer, insbesondere mit Hinblick auf die Radon-Nikodym-Eigenschaft. Auch hierbei wird mehrheitlich auf Beweise verzichtet. Für das weitere Vorgehen ist der Abschnitt über banachverbandwertige L^p-Räume zentral. Wir werden beweisen, dass für $p \in [1, \infty)$ und einen ordnungsstetigen separablen Banachverband E auch E-wertige

L^p-Räume ausgestattet mit der punktweisen Ordnung ordnungsstetige Banachverbände sind.

Kapitel 4 hat banachverbandwertige Submartingale zum Thema. Dieses Konzept wurde erstmals in [Sca61] erwähnt. Zuerst wird bewiesen, dass jedes Submartingal in diskreter Zeit mit Werten in einem separablen Banachverband, welcher die Radon-Nikodym-Eigenschaft besitzt, konvergiert, falls es L^1-beschränkt ist und zu jedem Zeitpunkt f.s. positive Werte annimmmt. Dieses Resultat geht auf Heinich (siehe [Hei78]) zurück. In dieser Arbeit wird allerdings ein anderer Beweis geführt, der auf den Ergebnissen in [DGL81] beruht. Wir verwenden dies anschließend, um die Regularität banachverbandwertiger Submartingale in kontinuierlicher Zeit zu untersuchen. Gezeigt wird hierbei folgendes: Ist E ein separabler Banachverband mit der Radon-Nikodym-Eigenschaft und $(X_t)_{t\in[0,T]}$ ein E-wertiges Submartignal, welches f.s. positive Werte annimmt, so existieren die Grenzwerte $X_{t+} := \lim_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s$ für alle $t \in [0,T]$ f.s. und der Prozess $(X_{t+})_{t\in[0,T]}$ ist ein càdlag Submartingal mit $X_{t+} \geq X_t$. Dabei folgen wir dem Vorgehen in [Fra85].

Kapitel 5 widmet sich schließlich Superlösungen, die (1.4) erfüllen. Wir definieren dazu die Menge

$$\mathcal{A}(\xi, g) := \left\{(Y,Z) \in \mathcal{S}(K) \times L^2_{\mathcal{F}}(\Omega \times [0,T], \mathcal{S}_2(H,K)) : (Y,Z) \text{ erfüllt } (1.4)\right\},$$

wobei $\mathcal{S}(K)$ die Menge alle K-wertigen càdlag Prozesse ist, und werden zeigen, dass unter bestimmten Annahmen an den Generator und die Endbedingung ein eindeutiges Paar $(\hat{Y}, \hat{Z}) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ existiert, sodass für alle $(Y,Z) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ bereits $\hat{Y}_t \leq_K Y_t$ gilt, (1.4) also eine eindeutige minimale Superlösung besitzt. Im gesamten Kapitel betrachten wir dabei Generatoren, die nur positive Werte in K annehmen und eine Diagonalstruktur bezüglich der gewählten Basis von K aufweisen. Mit letzterem ist gemeint, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ eine messbare Funktion $g^k : \Omega \times [0,T] \times \mathbb{R} \times H'$ mit

$$(g_t(y,z))^k = g_t^k(y^k, z^k) \quad (t \in [0,T], y \in K, z \in \mathcal{S}_2(H,K))$$

existiert, wobei wir für $z \in \mathcal{S}_2(H,K)$ das Funktional $z^k \in H'$ durch $z^k := \langle z\bullet, e_k\rangle_K$ definieren. Wir gehen folgendermaßen vor: Zuerst werden wir sehen, dass der Werteprozess jeder Superlösung ein K-wertiges Supermartingal und die Menge $\mathcal{A}_t(\xi, g) := \{Y_t : (Y,Z) \in \mathcal{A}(\xi, g)\}$ im Banachverband $L^1(\Omega, K)$ von unten beschränkt ist. Da $L^1(\Omega, K)$ ordnungsvollständig ist, existiert somit für alle $t \in [0,T]$ die Zufallsvariable $\hat{\mathcal{E}}_t^g(\xi) := \inf \mathcal{A}_t(\xi, g)$. Es stellt sich heraus, dass auch der Prozess $\hat{\mathcal{E}}^g(\xi) := (\hat{\mathcal{E}}^g_t)_{t\in[0,T]}$ ein Supermartingal definiert und mit dem Hauptresultat aus Kapitel 4 ergibt sich, dass das càdlag Supermartingal $\mathcal{E}^g_t(\xi) := \lim_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} \hat{\mathcal{E}}^g_s(\xi)$ existiert und $\mathcal{E}^g_t(\xi) \leq \hat{\mathcal{E}}^g_t(\xi)$ für alle $t \in [0,T]$ erfüllt. Dieser Prozess ist nun ein natürlicher Kandidat für den Werteprozess der minimalen Superlösung. Um einen Kontrollprozess $\hat{Z} \in L^2(\Omega \times [0,T], \mathcal{S}_2(H,K))$ mit $(\mathcal{E}^g(\xi), \hat{Z}) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ zu finden, konstruieren wir zunächst eine Folge von Superlösungen $(Y^n, Z^n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{A}(\xi, g)$, so dass $(Y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf einer dichten Teilmenge von $[0,T]$ f.s. von oben gegen $\hat{\mathcal{E}}^g(\xi)$ konvergiert. Die Supermartingal-Eigenschaft liefert uns zudem, dass $(Y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ $P \otimes dt$ fast überall gegen $\mathcal{E}^g(\xi)$ konvergiert. Mit Methoden der stochastischen Anlysis ergibt sich, dass die zugehörige Folge der Kontrollprozesse $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega \times [0,T], \mathcal{S}_2(H,K))$ beschränkt ist. Unter Verwendung von Kompaktheitsargumenten erhalten wir daraus, dass eine Folge in der asymptotischen komplexen Hülle (einer Teilfolge) von $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ $P \otimes dt$ fast überall und in $L^2(\Omega \times [0,T], \mathcal{S}_2(H,K))$ gegen einen Prozess $\hat{Z}$ konvergiert. Stellen wir weitere Forderung an den Generator, lässt sich schließlich nachweisen, dass $(\mathcal{E}^g(\xi), \hat{Z})$ tatsächlich eine Superlösung von (1.4) ist. Daraus folgt unmittlebar, dass $\mathcal{E}^g(\xi)$ eine Modifikation von $\hat{\mathcal{E}}^g(\xi)$ und $(\mathcal{E}^g(\xi), \hat{Z})$ minimale Superlösung von (1.4) ist.

In **Kapitel 5** wenden wir uns monotonen Grenzwerten von Superlösungen zu. Wir lassen dabei die Positivität-und Diagonalbedingung an den Generator fallen, fordern aber, dass dieser gleichmäßig Lipschitz-stetig in x und y ist. Außerdem betrachten wir [Pen99] folgend das Problem

$$Y_t = Y_T + \int_t^T g_s(Y_s, Z_s)ds + (A_T - A_t) - \int_t^T Z_s dW_s, \qquad (1.6)$$

welches zu zu (1.4) äquivalent ist, wenn man nur Superlösungen mit $Y_T = \xi$ zulässt und $(A_t)_{t\in[0,T]}$ ein K-wertiger monoton wachsender càdlag Prozess mit $A_0 = 0$ ist. Wir behandeln nun Folgen von Prozessen $(Y^i, Z^i, A^i) \in L^2(\Omega \times [0,T], K) \times L^2(\Omega \times [0,T], \mathcal{S}_2(H,K)) \times L^2(\Omega \times [0,T], K)$, die (1.6) erfüllen, wobei die Folge von Werteprozessen $(Y^i)_{i\in\mathbb{N}}$ an jedem Zeitpunkt monoton von unten gegen einen Prozess $Y \in L^2(\Omega \times [0,T], K)$ konvergiert. Gezeigt wird dann folgendes: Ist $(A^i)_{i\in\mathbb{N}}$ sogar eine Folge stetiger Prozesse und erfüllt Y die Bedingung

$$\mathrm{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \sup_{t\in[0,T]} |Y^k_t|^2\right] < \infty,$$

so existiert ein Kontrollprozess $Z \in L^2(\Omega \times [0,T], \mathcal{S}_2(H,K))$ und ein monoton wachsender càdlag Prozess $A \in L^2(\Omega \times [0,T], K)$, so dass (Y, Z, A) (1.6) erfüllen. Der monotone Grenzwert Y ist also ebenfalls der Werteprozess einer Superlösung.

2 Stochastische Analysis auf Banachräumen

Wir beginnen diese Arbeit mit der Darstellung einiger Resultate zur stochastischen Analysis in Banachräumen. Im ersten Abschnitt wird die Konstruktion des Bochnerintegrals wiedergegeben. Der zweite Abschnitt fasst die wesentlichen Begriffe zu banachraumwertigen stochastischen Prozessen zusammen. Im dritten Abschnitt werden schließlich hilbertraumwertige Wiener Prozesse und das Itô-Integral bezüglich solcher Prozesse eingeführt. Alle drei Teile dienen vor allem der Fixierung der Notation und dazu, auf wichtige Resultate später innerhalb der Arbeit verweisen zu können. Wir verzichten deshalb darin weitestgehend auf Beweise. Eine ausführlichere Behandlung des Bochnerintegrals bietet zum Beispiel [AB06] (Kapitel 11.8). Für eine detailierte Darstellung des Itô-Integrals in Hilberträumen siehe etwa [PR07].

Zunächst wollen wir aber einige Dinge bezüglich der Notation, die während der gesamten Arbeit verwendet wird, anmerken.

2.0.1 Notation. Für zwei Banachverbände $(E, \|\cdot\|_E)$ und $(U, \|\cdot\|_U)$ sowie $T \in [0, \infty)$ und eine beliebige Menge Ω verwenden wir folgende Bezeichnungen:

- $\mathcal{B}(E)$ sei die (bzgl. der Normtopologie) Borelsche σ-Algebra auf $(E, \|\cdot\|_E)$.
- E' sei der topologische Dualraum von E.
- $L(E, U)$ sei der Raum der linearen beschränkten Operatoren von E nach U. Ist $U = E$ schreiben wir $L(E)$.
- Für eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ und $x \in E$, schreiben wir $x_n \rightharpoonup x$, falls $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in E schwach gegen x konvergiert.
- $(C([0, T], E), \|\cdot\|_{C([0,T],E)})$ sei der Raum der stetigen Funktionen von $[0, T]$ nach E versehen mit der Supremumsnorm

$$\|f\|_{C([0,T],E)} = \sup_{t\in[0,T]} \|f(t)\|_E \quad (f \in C([0, T], E)).$$

- λ sei das Lebesgue-Maß auf $([0,T], \mathcal{B}([0,T]))$.
- Für $B \subset \Omega$ sei $\mathbb{1}_B : \Omega \to \mathbb{R}$ die Indikatorfunktion

$$\mathbb{1}_B(\omega) = \begin{cases} 1 & \omega \in B \\ 0 & \omega \notin B. \end{cases}$$

2.1 Banachraumwertige Integrale und Maße

2.1.1 Das Bochner-Integral

Wir beschränken uns hier auf die Integration von Funktionen auf einem endlichen Maßraum mit Werten in separablen Banachräumen. Resultate über das relle Lebesgue-Integral setzten wir dabei als bekannt vorraus.

Fixiere im Folgenden einen endlichen Maßraum $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ und einen separablen Banachraum $(E, \|\cdot\|)$ ausgestattet mit der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}(E)$. Mit $\mathcal{L}((\Omega,\mathcal{F}), E)$ bezeichnen wir den Raum der $\mathcal{F} - \mathcal{B}(E)$ messbaren Funktionen und mit $\mathcal{L}((\Omega,\mathcal{F}))$ den Raum der $\mathcal{F}$-messbaren reellwertigen Funktionen. Falls offensichtlich ist, bezüglich welcher σ-Algebra auf Ω die Messbarkeit betrachtet wird, schreiben wir nur $\mathcal{L}(\Omega, E)$ bzw. $\mathcal{L}(\Omega)$.

Wie üblich sagen wir, dass eine Eigenschaft $\mathcal{E}$ von Elementen von Ω μ-fast überall (μ-f.ü.) gilt, falls eine μ-Nullmenge $N \in \mathcal{F}$ mit $\{\omega \text{ erfüllt } \mathcal{E}\} \subset N$ existiert.

Ist U ein weiterer Banachraum, $G : E \to U$ eine $\mathcal{B}(E) - \mathcal{B}(U)$ messbare Funktion und $f \in \mathcal{L}(\Omega, E)$ dann setzen wir $G(f) := G \circ f$.

Als erstes definieren wir das Integral für E-wertige Stufenfunktionen.

2.1.1 Definition. (i) Eine (E-wertige) Stufenfunktion $s : \Omega \to E$ ist eine Funktion der Gestalt

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

mit $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in E$ und $A_i \in \mathcal{F}$ für $1 \leq i \leq n$. Die Menge aller Sufenfunktionen bezeichnen wir mit $S(\Omega, E)$.

(ii) Für $s \in S(\Omega, E)$ definieren wir das Integral bzgl. des Maßes μ durch

$$\int s d\mu = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

2.1.2 Bemerkung. Es lässt sich leicht nachvollziehen, dass $S(\Omega, E)$ ein Unterraum von $\mathcal{L}(\Omega, E)$ ist und das Integral unabhängig von der Darstellung der Stufenfunktion $s \in S(\Omega, E)$ ist. Außerdem lässt sich immer eine Darstellung von $s \in S(\Omega, E)$ finden, bei der die Familie $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ paarweise disjunkt ist. Dies wollen wir im Folgenden deshalb ohne Einschränkung immer annehmen.

Die Erweiterung des Integrals auf eine breitere Klasse von Funktionen liefern folgende Sätze.

2.1.3 Satz. *$f : \Omega \to E$ ist genau dann messbar, falls eine Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S(\Omega, E)$ existiert mit $\lim_{n\to\infty} s_n(x) = f(x)$ für alle $x \in \Omega$.*

Beweis: Siehe [DPZ92] (S.16 Lemma I.1.1). □

2.1.4 Satz. *Sei $f \in \mathcal{L}(\Omega, E)$, dann sind äquivalent:*

(i) Es gibt eine Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S(\Omega, E)$ mit $f_n(x) \to f(x)$ für alle $x \in \Omega$ und

$$\int \|f_n - f\| d\mu \to 0 \quad (n \to \infty).$$

(ii) $\int \|f\| d\mu < \infty$.

In diesem Fall existiert $\lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu$ in E und für jede weitere Folge $(g_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S(\Omega, E)$, welche (i) erfüllt, gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int g_n d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Beweis: Siehe [DU77] (S.45 Theorem, II.2.1) für die Äquivalenz und [AB06] (S.425 Lemma 11.41) für die zweite Aussage. □

Damit können wir das Bochnerintegral für alle Funtkionen $f \in \mathcal{L}(\Omega, E)$ definieren, die $\int \|f\| d\mu < \infty$ erfüllen.

2.1.5 Definition. Sei $f \in \mathcal{L}(\Omega, E)$ mit $\int \|f\| d\mu < \infty$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset S(\Omega, E)$ eine Folge wie in Satz 2.1.4 (i). Dann heißt f integrierbar (bzgl. μ) und das (Bochner-) Integral von f bzgl. μ ist definiert durch

$$\mathrm{Int}[f] := \int f d\mu := \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Schließlich setze

$$\mathcal{L}^1((\Omega, \mathcal{F}, \mu), E) := \left\{ f \in \mathcal{L}(\Omega, E) : \int \|f\| d\mu < \infty \right\}.$$

Oft schreiben wir stattdessen auch einfach $\mathcal{L}^1(\Omega, E)$ oder $\mathcal{L}^1(\mu; E)$.

2.1.6 Definition. Für $A \in \mathcal{F}$ und $f \in \mathcal{L}(\Omega, E)$ mit $f\mathbb{1}_A \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$ setze

$$\int_A f d\mu := \int f\mathbb{1}_A d\mu.$$

Die folgenden Lemmas gelten offensichtlich für Stufenfunktionen, und für ein beliebiges $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$ folgen sie dann durch Übergang auf den Grenzwert. Wir verzichten deshalb hier auf die Beweise.

2.1.7 Lemma. *$\mathcal{L}^1(\Omega, E)$ ist ein Unterraum von $\mathcal{L}(\Omega, E)$und die Abbildung $\mathrm{Int} : \mathcal{L}^1(\Omega, E) \to E$ ist linear mit $\| \mathrm{Int}[f]\| \le \int \|f\| d\mu$.*

2.1.8 Lemma. *Für eine Nullmenge $N \in \mathcal{F}$ und $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$ gilt*

$$\int_N f d\mu = 0.$$

2.1.9 Lemma. *Sei U ein weiterer separabler Banachraum, $T \in L(E, U)$ und $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, E)$. Dann ist $Tf \in \mathcal{L}^1(\Omega, U)$ und*

$$T \int f d\mu = \int T f d\mu.$$

Nun können wir banachraumwertige L^p-Räume definieren.

2.1.10 Definition. Für $p \in [1, \infty)$ und $f \in \mathcal{L}(\Omega, E)$ setze

$$\|f\|_{L^p(\Omega,E)} := \left(\int \|f\| d\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

und $\mathcal{L}^p(\Omega, E) := \{f \in \mathcal{L}(\Omega, E) : \|f\|_{L^p(\Omega,E)} < \infty\}$.

2.1.11 Bemerkung. Per Defintion gilt für $f \in \mathcal{L}(\Omega, E)$

$$f \in \mathcal{L}^p(\Omega, E) \Leftrightarrow \|f\| \in \mathcal{L}^p(\Omega).$$

Deshalb ist $\mathcal{L}^p(\Omega, E)$ analog zum reellen Fall ein Unterraum von $\mathcal{L}(\Omega, E)$ und $\|\cdot\|_{L^p(\Omega,E)}$ eine Seminorm auf $\mathcal{L}^p(\Omega, E)$.

2.1.12 Definition. Setze

$$N := \{f \in \mathcal{L}^p(\Omega, E) : f = 0 \ \mu\text{-f.ü.}\}$$

und definiere die Quotientenräume

$$L^0(\Omega, E) := \mathcal{L}(\Omega, E)/N$$

bzw. für $p \in [1, \infty)$

$$L^p(\Omega, E) := \mathcal{L}^p(\Omega, E)/N.$$

2.1.13 Bemerkung. Genau wie im Reellen ist die Funktion

$$\begin{aligned} \|\cdot\|_{L^p(\Omega,E)} : L^p(\Omega, E) &\to [0, \infty) \\ [f] &\mapsto \left(\int \|f\| d\mu\right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

wohldefiniert und eine Norm auf $L^p(\Omega, E)$ $(p \in [1, \infty))$.

Auch der folgende Satz lässt sich wie im Reellen beweisen.

2.1.14 Satz. *Für $p \in [1, \infty)$ ist $(L^p(\Omega, E), \|\cdot\|_{L^p(\Omega,E)})$ ein Banachraum und $S(\Omega, E)/N$ ist dicht in $L^p(\Omega, E)$.*

2.1.15 Notation. Wir unterschieden in diesem Kapitel in der Notation nun nicht mehr zwischen der Funktion $f \in \mathcal{L}(\Omega, E)$ und der Äquivalenzklasse $[f] \in L^0(\Omega, E)$. Desweiteren sagen wir, dass eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^0(\Omega, E)$ μ-f.ü. gegen $f \in L^0(\Omega, E)$ konvergiert, wenn dies für eine (und damit jede) Wahl von Vetretern der Folge und des Grenzwertes gilt.

Die Konvergenz in $L^p(\Omega, E)$ ist weder stärker noch schwächer als die punktweise Konvergenz f.ü.. Wie im rellen Fall gilt jedoch ein Satz über majorisierte Konvegenz.

2.1.16 Satz. *Seien* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^0(\Omega, E)$ *und* $f \in L^0(\Omega, E)$ *mit* $f_n \to f$ μ*-f.ü.. Existiert eine Funktion* $g \in L^1(\Omega)$ *mit* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|f_n\| \leq |g|$ μ*-f.ü., dann ist* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega, E)$, $f \in L^1(\Omega, E)$ *und*

$$\int f d\mu = \lim_{n\to\infty} \int f_n d\mu.$$

Beweis: Wende den Satz über majorisierte Konvergenz für relle Funktionen auf die Folge $(\|f_n - f\|)_{n\in\mathbb{N}}$, welche die Majorante $2|g|$ besitzt, an. □

2.1.17 Korollar. *Sei* $f \in L^1(\Omega, E)$ *und* $A = \bigcup_{i\in\mathbb{N}} A_i$ *mit* $(A_i)_{i\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ *paarweise disjunkt. Dann gilt*

$$\int_A f d\mu = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{A_i} f d\mu$$

Umgekehrt folgt aus der L^p-Konvergenz einer Folge die Existenz einer μ-f.ü. konvergenten Teilfolge.

2.1.18 Satz. *Sei* $p \in [1, \infty)$ *und sei* $f \in L^p(\Omega, E)$ *und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega, E)$ *eine Folge mit* $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega,E)} = 0$*. Dann existiert eine Teilfolge* $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *von* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $f_{n_k} \to f$ μ*-f.ü.* $(k \to \infty)$.

Beweis: Wieder wende das entsprechende Resultat über reelle Funktionen auf die Folge $(\|f_n - f\|_E)_{n\in\mathbb{N}}$ an. □

Zuletzt wird in diesem Abschnitt noch der Begriff der uniformen Integrierbarkeit eingeführt.

2.1.19 Definition. Eine Menge $H \subset L^1(\Omega, E)$ heißt uniform integrierbar (u.i.), falls

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{f\in H} \int_{\{\|f\|>n\}} \|f\| d\mu = 0.$$

Eine Menge $H \subset L^1(\Omega, E)$ E-wertiger Funktionen ist offensichtlich genau dann u.i., falls die Menge $\{\|f\| : f \in H\}$ reeller Funtkionen u.i. ist. Die folgenden Resultate über E-wertige uniform integrierbare Funktionen lassen sich damit genau wie im Reellen beweisen.

2.1.20 Lemma. $H \subset L^1(\Omega, E)$ *ist genau dann u.i., falls* H *in* $L^1(\Omega, E)$ *beschränkt ist und folgendes gilt:*

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall A \in \mathcal{F} \ \forall f \in H : \left(\mu(A) < \delta \Rightarrow \int_A \|f\| d\mu < \epsilon \right).$$

2.1.21 Definition. Wir sagen eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \in L^0(\Omega, E)$ konvergiert gegen $f \in L^0(\Omega, E)$ bezüglich des Maßes μ, falls

$$\forall \epsilon > 0 \; \forall \delta > 0 \; \exists N \in \mathbb{N} \; \forall n \geq N : \mu\left(\|f_n - f\| \geq \delta\right) < \epsilon.$$

2.1.22 Bemerkung. Da das Maß endlich ist, lässt sich leicht nachvollziehen, dass die Konvergenz μ-f.ü. die Konvergenz bzgl. des Maßes μ impliziert.

2.1.23 Lemma. *Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega, E)$ und $f \in L^0(\Omega, E)$ mit $f_n \to f$ bzgl. des Maßes μ. Dann sind äquivalent:*

(i) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist u.i,

(ii) $f \in L^1(\Omega, E)$ und $f_n \to f$ $(n \to \infty)$ in $L^1(\Omega, E)$.

2.1.24 Lemma. *Sei $p \in (1, \infty]$ und $H \subset L^p(\Omega, E)$ beschränkt. Dann ist H u.i..*

2.1.2 Vektormaße und die Radon-Nikodym-Eigenschaft

Im letzten Abschnitt hatten die Integranden Werte in Banachräumen, das Maß war jedoch rellwertig und positiv. In diesem Anschnitt sollen nun banachraumwertige Maße eingeführt werden. Eine ausführliche Behandlung solcher Maße findet sich zum Beispiel in [DU77].

In diesem Abschnitt sei $\mathcal{A}$ eine Algebra auf einer Menge Ω und $(E, \|\cdot\|)$ ein Banachraum.

2.1.25 Definition. (i) Eine Funktion $F : \mathcal{A} \to E$ heißt ein endlich additives Vektormaß oder schlicht Vektormaß, falls für alle disjunkten Mengen $A_1, A_2 \in \mathcal{A}$ stets $F(A_1 \,\dot{\cup}\, A_2) = F(A_1) + F(A_2)$ gilt.

(ii) Ein Vektormaß $F : \mathcal{A} \to E$ heißt σ-additiv, falls für alle paarweise disjunkten Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{F}$ mit $\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$ die Gleichheit $F\left(\dot{\bigcup}_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n\in\mathbb{N}} F(A_n)$ bzgl. der Normtopologie auf E gilt.

2.1.26 Bemerkung. Beachte, dass für ein Vektormaß $F : \mathcal{A} \to E$ und $A, B \in \mathcal{A}$ mit $B \subset A$ stets $F(A) = F(B) + F(A \setminus B)$ also $F(A \setminus B) = F(A) - F(B)$ gilt. Insbesondere ist $F(\emptyset) = 0$.

2.1.27 Definition. Sei $F : \mathcal{A} \to E$ ein Vektormaß. Die Funktion $\|F\|_V : \mathcal{A} \to [0, \infty]$ definiert durch

$$\|F\|_V(A) = \sup \left\{ \sum_{i=1}^{N} \|F(A_i)\| : A_i \in \mathcal{F}, A = \dot{\bigcup_{i=1}^{N}} A_i \right\}$$

heißt Variation von F. Ist $\|F\|_V(\Omega) < \infty$, nennen wir F ein Maß mit endlicher Variation.

2.1.28 Definition. Sei $F : \mathcal{A} \to E$ ein Vektormaß und $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ ein endliches positives reelles Maß auf $(\Omega, \mathcal{A})$. Dann heißt F μ-stetig, falls

$$\lim_{\mu(A) \to 0} F(A) = 0$$

gilt, das heißt

$$\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall A \in \mathcal{A} : \mu(A) < \delta \Rightarrow F(A) < \epsilon.$$

In diesem Fall schreiben wir $F \ll \mu$.

2.1.29 Satz. *Sei $\mathcal{F}$ eine σ-Algebra auf Ω, $F : \mathcal{F} \to E$ ein σ-additives Vektormaß und $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ ein endliches σ-additives positives reelles Maß. Dann gilt $F \ll \mu$ genau dann, falls für alle $B \in \mathcal{F}$ aus $\mu(B) = 0$ auch $F(B) = 0$ folgt.*

Beweis: Siehe [DU77] (S.10, Theorem I.2.1) □

2.1.30 Lemma. *Sei μ ein endliches reelles positives σ-additives Maß auf $\mathcal{A}$ und $F : \mathcal{A} \to E$ ein μ-stetiges Vektormaß. Dann ist auch F σ-additiv.*

Beweis: Seien μ und F wie im Lemma. Weiter sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}$ eine abzählbare Familie paarweiser disjunkter Mengen mit $A = \dot{\bigcup}_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$. Für $N \in \mathbb{N}$ folgt dann aus der endlichen Additivität von F und Bemerkung 2.1.26

$$\begin{aligned} \left\| F(A) - \sum_{n=1}^{N} F(A_n) \right\| &= \left\| F(A) - F\left(\dot{\bigcup_{n=1}^{N}} A_n \right) \right\| \\ &= \left\| F\left(\dot{\bigcup_{n>N}} A_n \right) \right\|. \end{aligned}$$

Da μ σ-additiv und endlich ist, erhält man zudem

$$\lim_{N\to\infty} \mu\left(\dot{\bigcup_{n>N}} A_n\right) = 0.$$

Aus $F \ll \mu$ folgt damit schließlich auch

$$0 = \lim_{N\to\infty} \left\| F\left(\dot{\bigcup_{n>N}} A_n\right)\right\| = \lim_{N\to\infty} \left\| F(A) - \sum_{n=1}^{N} F(A_n)\right\|.$$

F ist also σ-additiv wie behauptet. □

Ist μ ein reelles positives σ-additives Maß auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$, dann können wir jeder bzgl. μ integrierbaren Funktion $f \in L^1(\mu; E)$ ein Vektormaß ν_f wie folgt zuordnen.

2.1.31 Satz. *Sei $\mu : \mathcal{F} \to [0, \infty)$ ein relles σ-additives positives Maß auf dem Messraum $(\Omega, \mathcal{F})$. Zu $f \in L^1(\mu, E)$ definiere $\nu_f : \mathcal{F} \to E$ durch*

$$\nu_f(A) = \int_A f d\mu.$$

Dann ist ν_f ein σ-additives μ-stetiges Vektormaß mit

$$\|\nu_f\|_V(A) = \int_A \|f\|_E d\mu. \tag{2.1}$$

Beweis: Siehe [DU77] (S.46 Theorem II.2.4) □

Im reellen Fall gilt nach dem Satz von Radon-Nikodym auch die Umkehrung: Für jedes μ-stetige signierte Maß ν mit endlicher Variation, exsistiert eine Funktion $f \in L^1(\mu)$ mit $\nu(A) = \int_A f d\mu$ $(A \in \mathcal{F})$. Für Banachräume gilt dies jedoch im Allgemeinen nicht. Dies motiviert folgende Definition.

2.1.32 Definition. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. Wir sagen E besitzt die Radon-Nikodym-Eigenschaft (RNE) bzgl. μ, falls für jedes σ-additive μ-stetige Vektormaß $F : \mathcal{F} \to E$ mit beschränkter Variation ein $g \in L^1(\mu, E)$ existiert, sodass für alle $A \in \mathcal{F}$

$$F(E) = \int_A g d\mu$$

gilt. Falls E die Radon-Nikodym-Eigenschaft bzgl. allen endlichen Maßräumen besitzt, nennen wir E einen Banachraum mit Radon-Nikodym-Eigenschaft (RNE).

Folgende Aussagen über Banachräume mit (RNE) werden in dieser Arbeit benötigt.

2.1.33 Satz. *Jeder reflexive Banachraum beistzt die Radon-Nykodim-Eigenschaft.*

Beweis: Siehe [DU77] (S.76, Corollary III.2.13). □

2.1.34 Satz. *Falls E ein Banachraum mit (RNE) ist, so auch jeder abgeschlossene Unterraum von E.*

Beweis: Siehe [DU77] (S.80, Theorem III.3.2). □

2.1.35 Satz. *Der Banchraum c_0 aller reellen Nullfolgen ausgestattet mit der Supremumsnorm besitzt die (RNE) nicht.*

Beweis: Siehe [DU77] (S. S.60 Example II.1.1). □

Aus den letzten beiden Sätzen erhalten wir unmittelbar folgendes Korollar.

2.1.36 Korollar. *Ist E ein Banachraum mit RNE, so ist kein Unterraum von E isomorph zu c_0.*

2.2 Banachraumwertige stochastische Prozesse

In diesem Abschnitt wird die Notation bezüglich stochastischen Prozessen festgelegt, die wir im weiteren Verlauf der Arbeit verwenden werden. $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei im Folgenden ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum und $(E, \|\cdot\|)$ ein separabler reeller Banachraum. Eine $\mathcal{F} - \mathcal{B}(E)$ messbare Funktion nennen wir auch (E-wertige) Zufallsvariable.

Wir sagen eine Eigenschaft $\mathcal{E}$ von Elementen aus Ω gilt fast sicher (f.s.), falls $P(\{\omega \in \Omega : \omega \text{ erfüllt } \mathcal{E}\}) = 0$ (Beachte dabei, dass $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ vollständig ist).

Sei J eine Indexmenge. Ein (E-wertiger) stochastischer Prozess mit Parameterbereich J ist eine Familie von E-wertigen Zufallsvariablen $X = (X_j)_{j \in J} \subset \mathcal{L}(\Omega, E)$. Für $\omega \in \Omega$ heißt die Abbildung $j \to X_j(\omega)$ ein Pfad von X.

Zwei Prozesse X und Y heißen ununterscheidbar, falls

$$P(\{X_j = Y_j \text{ für alle } j \in J\}) = 1.$$

Wir nennen zwei Mengen $A, B \subset \Omega \times J$ gleich bis auf Ununterscheidbarkeit, falls

$$P(\{\mathbb{1}_A(\omega, j) = \mathbb{1}_B(\omega, j) \text{ für alle } j \in\}) = 1.$$

Wir nennen einen Prozess X eine Modifikation oder Version eines Prozesses Y, falls

$$P(X_j = Y_j) = 1 \quad (j \in J).$$

Ist U ein weiterer Banachraum, $f : E \to U$ eine $\mathcal{B}(E) - \mathcal{B}(U)$ messbare Abbildung und $X = (X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ ein E-wertiger Prozess. Dann schreiben wir $f(X)$ für den U-wertigen Prozess $(f \circ X_j)_{j\in\mathbb{N}}$.

In dieser Arbeit betrachten wir nur $J \in \{[0, T], \mathbb{N}\}$, wobei $T \in [0, \infty)$ ein endlicher Zeithorizont ist. Prozesse mit Parameterbereich $\mathbb{N}$ nennen wir auch Prozesse in diskreter Zeit, Prozesse mit Parameterbereich $[0, T]$ Prozesse in kontinuierlicher Zeit. Auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ sei stets eine Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_j)_{j\in J}$ gegeben. Für $j \in J$ setze $L^p_j(\Omega, E) := L^p((\Omega, \mathcal{F}_j, P), E)$. Wie üblich nennen wir einen Prozess X adaptiert, falls X_j für alle $j \in J$ $\mathcal{F}_j - \mathcal{B}(E)$ messbar ist.

Die Menge aller Stoppzeiten $\tau : \Omega \to [0, T]$ bzw. $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ der Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ bzw. $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen wir mit $\mathcal{T}$ bzw. $\mathcal{T}_\mathbb{N}$, und für $\tau \in \mathcal{T}$ oder $\tau \in \mathcal{T}_\mathbb{N}$ definieren wir die σ-Algebra der Stoppzeit τ durch

$$\mathcal{F}_\tau := \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \le j\} \in \mathcal{F}_j \ (j \in J)\}.$$

Für zwei Stoppzeiten $\sigma, \tau \in T$ mit $\sigma \le \tau$ f.s. definiere das halboffene stochastische Intervall

$$(\sigma, \tau] := \{(\omega, t) \in \Omega \times [0, T] : \sigma(\omega) < t \le \tau(\omega)\}.$$

Analog definiere $[\sigma, \tau), (\sigma, \tau), [\sigma, \tau]$.

Für $p \in [1, \infty)$ setze schließlich $L^p_\tau(\Omega, E) := L^p((\Omega, \mathcal{F}_\tau, P), E))$.

Bis zum Ende dieses Abschnitts betrachten wir nur noch Prozesse in kontinuierlicher Zeit.

2.2.1 Definition. Eine Filtrierung $\mathbb{F} = (F_t)_{t\in[0,T]}$ heißt normal, falls $\mathbb{F}$ folgende Bedingungen erfüllt:

(i) $\mathcal{F}_0$ enthält alle P-Nullmengen aus $\mathcal{F}$ ($\mathbb{F}$ ist vollständig).

(ii) Für alle $t \in [0,T)$ gilt $\mathcal{F}_t = \bigcap_{s>t} \mathcal{F}_s$ ($\mathbb{F}$ ist rechtsstetig).

2.2.2 Definition. Sei $\mathcal{E}$ eine Eigenschaft von Funktionen $f : [0,T] \to E$ (z.B. Stetigkeit, Rechtsstetigkeit usw.). Dann sagen wir ein E-wertiger Prozess $(X_t)_{t\in[0,T]}$ hat Eigenschaft $\mathcal{E}$ (ist z.B. stetig, rechtsstetig usw.), falls

$$P(\omega \in \Omega : t \mapsto X_t(\omega) \text{ erfüllt } \mathcal{E}) = 1.$$

2.2.3 Lemma. *Sei X ein E-wertiger Prozess und Y eine Modifikation von X. Falls X und Y beide rechtsstetig sind, sind sie ununterscheidbar.*

Beweis: Setze $N_X := \{\omega \in \Omega : t \mapsto X_t(\omega) \text{ ist rechtsstetig}\}$ und $N_Y := \{\omega \in \Omega : t \mapsto Y_t(\omega) \text{ ist rechtsstetig}\}$. Dann gilt nach Vorrausetzung $P(N_X \cap N_Y) = 1$. Außerdem definiere $\mathbb{Q}_T = \mathbb{Q} \cap [0,T] \cup \{T\}$ und $N_q = \{X_q = Y_q\}$ für $q \in \mathbb{Q}_T$. Da Y eine Modifikation von X ist, folgt $P(N_q) = 1$ ($q \in \mathbb{Q}_T$), und da $\mathbb{Q}_T$ abzählbar ist, auch $P(\bigcap_{q\in\mathbb{Q}_T} N_q) = 1$. Setze nun $N := \bigcap_{q\in\mathbb{Q}_T} N_q \cap N_X \cap N_Y$. Ist $\omega \in N$, so folgt nach Definition von N $X_T(\omega) = Y_T(\omega)$. Für $t \in [0,T)$ beliebig wähle eine Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{Q}_T$ mit $t_n \downarrow t$. Aus $\omega \in N$ ergibt sich

$$X_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} X_{t_n}(\omega) = \lim_{n\to\infty} Y_{t_n}(\omega) = Y_t.$$

Somit ist $N \subset \{X_t = Y_t \text{ für alle } t \in [0,T]\}$. Wegen $P(N) = 1$ sind X und Y ununterscheidbar. □

Wir setzen nun $\Omega_T = \Omega \times [0,T]$ und betrachten den Maßraum $(\Omega_T, \mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,T]), P \otimes \lambda)$. Einen Prozess $(X_t)_{t\in[0,T]}$ können wir auch als Abbildung $X : \Omega_T \to E, (\omega,t) \mapsto X_t(\omega)$ betrachten. Dadurch ergeben sich verschiedene Messbarkeitsbegriffe.

2.2.4 Definition. Sei $(X_t)_{t\in[0,T]}$ ein E-wertiger Prozess, dann heißt X

(i) messbar falls die Abbildung $X : \Omega_T \to E$ $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,T]) - \mathcal{B}(E)$ messbar ist,

(ii) progressiv messbar oder schlicht progressiv, falls für alle $t \in [0,T]$, die Abbildung $\Omega \times [0,t] \to E$, $(\omega,s) \mapsto X_s(\omega)$ $\mathcal{F}_t \otimes \mathcal{B}([0,t]) - \mathcal{B}(E)$ messbar ist.

2.2.5 Bemerkung. Wir nennen eine Menge $B \in \Omega_T$ progressiv, falls der Prozess $X = \mathbb{1}_B$ progressiv ist. Die Familie aller progressiven Mengen ist eine σ-Algebra auf Ω_T und heißt die progressive σ-Algebra, die wir mit Prog bezeichnen. Setze $L^p_{\mathcal{F}}(\Omega_T, E) := L^p((\Omega_T, \mathrm{Prog}, P), E)$.

2.2.6 Definition. Die σ-Algebra

$$\mathcal{P} = \sigma\left(\{(s,t) \times F_s : 0 \leq s < t \leq T, F_s \in \mathcal{F}_s\} \cup \{\{0\} \times F_0 : F_0 \in \mathcal{F}_0\}\right).$$

heißt σ-Algebra der vorhersagbaren Mengen. Ein $\mathcal{P} - \mathcal{B}(E)$ messbarer Prozess heißt vorhersagbar. Wir setzten $L^p_{\mathcal{P}}(\Omega_T, E) := L^p((\Omega_T, \mathcal{P}, P), E)$ $p \in [1, \infty)$.

2.2.7 Lemma. *Jeder linksstetige oder rechtsstetige adaptierte Prozess ist progressiv messbar.*

Beweis: Siehe [KS05] (S.5 Proposition 1.1.13). □

Messbarkeitsaussagen über E-wertige Prozesse lassen sich mit folgendem Resultat auf Messbarkeitsaussagen über reellwertige Prozesse reduzieren.

2.2.8 Lemma. *Es gilt $\mathcal{B}(E) = \sigma(\mathcal{A})$ mit*

$$\mathcal{A} = \left\{\phi^{-1}(A) : \phi \in E', A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})\right\}.$$

Insbesondere ist $X : \Omega \to E$ genau dann $\mathcal{F} - \mathcal{B}(E)$ messbar, falls $x'(X)$ für alle $x' \in E'$ $\mathcal{F} - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbar ist.

Beweis: Siehe [DPZ92] (S.17 Proposition I.1.3). □

2.2.9 Korollar. *Ein E-wertiger Prozess $X : \Omega_T \to E$ ist genau dann adaptiert (messbar, progressiv, vorhersagbar), falls $x'(E)$ für alle $x' \in E'$ adaptiert (messbar, progressiv, vorhersagbar) ist.*

2.3 Banachraumwertige Martingale

In diesem Abschnitt sowie auch in dem darauf folgenden, werden wir weitestgehend der Argumentation aus [PR07] folgen und auch die Beweise größtenteils aus diesem Artikel zitieren.

Für die Definition von E-wertigen Martingalen benötigen wir zunächst den Satz über die Existenz des bedingten Erwartungswertes für E-wertige Zufallsvariablen. Dazu sei im folgenden $\mathcal{F}_0 \subset F$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$.

2.3.1 Definition und Satz. *Sei $X \in L^1(\Omega, E)$. Dann existiert ein eindeutiges*
$Z \in L^1((\Omega, \mathcal{F}_0, P), E))$ mit

$$\int_A X dP = \int_A Z dP \quad (A \in \mathcal{F}_0). \tag{2.2}$$

Wir nennen Z den bedingten Erwartungswert von X (bzgl. $\mathcal{F}_0$) und setzen $Z =: \mathrm{E}[X|\mathcal{F}_0]$. Es gilt

$$\|\mathrm{E}[X|\mathcal{F}_0]\| \leq \mathrm{E}[\|X\||\mathcal{F}_0] \ \ \textit{f.s.}. \tag{2.3}$$

Beweis: Siehe [PR07] (S.17 Proposition 2.2.1). □

2.3.2 Lemma. *Für alle $p \in [1, \infty)$ ist die Abbildung*

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_p : L^p(\Omega, E) &\to L^p((\Omega, \mathcal{F}_0), E) \\ f &\mapsto \mathrm{E}[f|\mathcal{F}_0] \end{aligned}$$

wohldefiniert, linear und stetig mit Norm kleiner 1.

Beweis: Für $X \in L^p(\Omega, E)$ folgt aus (2.3)

$$\begin{aligned} \|\mathrm{E}[X|\mathcal{F}_0]\|^p_{L^p(\Omega,E)} &= \mathrm{E}\left[\|\mathrm{E}[X|\mathcal{F}_0]\|^p\right] \\ &\leq \mathrm{E}\left[(\mathrm{E}[\|X\||\mathcal{F}_0]))^p\right] \\ &\leq \mathrm{E}\left[\mathrm{E}\left[\|X\|^p|\mathcal{F}_0\right]\right] = \|X\|^p_{L^p(\Omega,E)}, \end{aligned} \tag{2.4}$$

wobei wir die Monotonie und die Jensensche Ungleichung für den reellen bedingten Erwartungswert ausgenutzt haben. Damit ist E_p wohldefiniert. Die Linearität folgt direkt aus der Definition des bedingten Erwartungswertes und die Abschätzung für die Norm von E_p aus (2.4). □

2.3.3 Lemma. *Ist U in weiterer Banachraum und $T : E \to U$ ein linearer stetiger Operator, so gilt für alle $X \in L^1(\Omega, E)$*

$$T\mathrm{E}[f|\mathcal{F}_0] = \mathrm{E}[Tf|\mathcal{F}_0].$$

Beweis: Dies folgt direkt aus Lemma 2.1.9 und der Eindeutigkeit des bedingten Erwartungswertes. □

Wir kommen nun zur zentralen Definition dieses Abschnitts.

2.3.4 Definition. Ein E-wertiger stochastischer Prozess $X = (X_j)_{j \in J} \subset \mathcal{L}(\Omega, E)$ heißt (E-wertiges) Martingal, falls

(i) X adaptiert ist,

(ii) $X_j \in L^1(\Omega, E)$ $(j \in J)$,

(iii) $E[X_{j_2} | \mathcal{F}_{j_1}] = X_{j_1}$ $(j_1, j_2 \in J$ mit $j_1 \leq j_2)$.

Wir erhalten folgenden Bezug zu reellen Martingalen.

2.3.5 Lemma. *Sei $p \in [1, \infty)$ und $X = (X_j)_{j \in J} \subset L^p(\Omega, E)$ ein E-wertiges Martingal. Dann ist $\|X\|^p$ ein reellwertiges Submartingal.*

Beweis: Siehe [PR07] (S.20 Proposition 2.2.6). □

Für rechtsstetige Martingale in kontinuierlicher Zeit gilt somit eine Doobsche Maximal-Ungleichung wie im reellen Fall.

2.3.6 Lemma. *Sei $p \in [1, \infty)$ und $M = (M_t)_{t \in [0,T]}$ ein E-wertiges rechtsstetiges Martingal mit $X_T \in L^p(\Omega, E)$. Dann gilt*

$$\mathrm{E}\left[\sup_{t \in [0,T]} \|M_t\|^p\right]^{\frac{1}{p}} \leq \frac{p}{p-1} \sup_{t \in [0,T]} \mathrm{E}\left[\|M_t\|^p\right]^{\frac{1}{p}} = \frac{p}{p-1} \mathrm{E}\left[\|M_T\|^p\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Beweis: Dies folgt direkt aus Lemma 2.3.5 und der Anwendung der Doobschen Maximal-Ungleichung für reelle Submartingale auf den Prozess $\|M\|$ (für dieses Resultat siehe etwa [KS05] S.14,15 Theorem 1.3.8 (iv)). □

Wir können einen stetigen Prozess $(X_t)_{t \in [0,T]}$ auch als Abbildung in $L^0(\Omega, C([0,T], E))$ auffassen. Ist M ein stetiges Martingal, folgt aus Lemma 2.3.6, dass $M \in L^2(\Omega, C([0,T], E))$ äquivalent zu $M_T \in L^2(\Omega, E)$ ist. Dies motiviert folgende Definition.

2.3.7 Definition. Wir definieren $\mathcal{M}_T^2(E)$ als den Raum aller stetigen Martingale $M \in L^2(\Omega, C([0,T], E))$.

2.3.8 Lemma. $(\mathcal{M}_T^2(E), \|\cdot\|_{L^2(\Omega,C([0,T],E))})$ *ist ein Banachraum und* $\|\cdot\|_{M_T^2(E)}$ *definiert durch*

$$\|M\|_{M_T^2(E)} = \|M_T\|_{L^2(\Omega;E)}$$

ist eine zu $\|\cdot\|_{L^2(\Omega,C([0,T],E))}$ *äquivalente Norm.*

Beweis: Siehe [PR07] (S.21, Proposition 2.2.9). □

2.4 Stochastische Integration auf Hilberträumen

In diesem Abschnitt werden wir das stochastische Integral bezüglich eines hilbertraumwertigen Wiener Prozesses einführen. Dazu seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ und $(K, \langle\cdot,\cdot\rangle_K)$ separable reelle Hilberträume. Zuerst benötigen wir einige Begriffe über Operatoren in $L(H, K)$.

2.4.1 Spurklasse- und Hilbert-Schmidt-Operatoren

Für $T \in L(H, K)$ sei $T^* \in L(K, H)$ der zu T adjungierte Operator. Für $T \in L(H)$ schreiben wir $T \geq 0$, falls $\langle Tx, x\rangle_H \geq 0$ für alle $x \in H$. Nach dem Spektralsatz für beschränkte selbstadjungierte Operatoren existiert für jeden Operator $T \in L(H, K)$ mit $T^* = T \geq 0$ ein eindeutiger Operator $S \in L(H, K)$ mit $S^* = S \geq 0$ und $S^2 = T$. Diesen Operator bezeichnen wir mit $T^{\frac{1}{2}}$. Desweiteren ist für alle $T \in L(H, K)$ der Operator $T^*T \geq 0$ und selbstadjungiert.

Zuerst führen wir den Begriff des Hilbert-Schmidt-Operators ein und zitieren die wichtigsten Eigenschaften.

2.4.1 Lemma. *Sei* $T \in L(H, K)$. *Konvergiert die Reihe* $\sum_{k\in\mathbb{N}} \|Tf_k\|_K^2$ *für eine Orthonormalbasis* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *von* H*, so konvergiert die Reihe für alle Orthonormalbasen von* H *und der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Basis.*

Beweis: Siehe [PR07] (S. 111, Remark B.0.6 (i)). □

Fixiere Im Folgenden eine Orthonormalbasis $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von H und eine Orthonormalbasis $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von K.

2.4.2 Definition. Für $T \in L(H, K)$ setzte

$$\|T\|_{\mathcal{S}_2(H,K)} := \left(\sum_{k \in \mathbb{N}} \|T f_k\|_K^2 \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Der Raum

$$\mathcal{S}_2(H, K) := \left\{ T \in L(H, K) : \|T\|_{\mathcal{S}_2(H,K)} < \infty \right\}$$

heißt der Raum der Hilbert-Schmidt-Operatoren von H nach K.

2.4.3 Lemma. *(i) Die Abbildung*

$$\langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}_2(H,K)} : \mathcal{S}_2(H, K) \times \mathcal{S}_2(H, K) \to \mathbb{R}, \quad (T, S) \mapsto \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle T f_k, S f_k \rangle_K$$

definiert ein Skalarprodukt auf $\mathcal{S}_2(H, K)$ *und* $(\mathcal{S}_2(H, K), \langle \cdot, \cdot \rangle_{\mathcal{S}_2(H,K)})$ *ist ein separabler Hilbertraum mit Orthonormalbasis* $(e_k \otimes f_j)_{k,j \in \mathbb{N}}$, *wobei* $e_k \otimes f_j := \langle \cdot, f_j \rangle_H e_k$ $(j, k \in \mathbb{N})$.

(ii) Sei K_1 *ein weiterer Hilbertraum und* $T \in \mathcal{S}_2(H, K)$. *Dann ist für alle* $S \in L(K, K_1)$ $ST \in \mathcal{S}_2(H, K_1)$ *und für alle* $Q \in L(K_1, H)$ *ist* $TQ \in \mathcal{S}_2(K_1, K)$.

Beweis: Siehe [PR07] (S.112 Proposition B.0.7 und S.111 Remark B.0.6 (ii)). □

2.4.4 Bemerkung. Für $k \in \mathbb{N}$ und $T \in \mathcal{S}_2(H, K)$ definere $T^k = \langle T \cdot, e_k \rangle_K$. Dann ist $T^k \in H'$ und es gilt

$$\|T\|_{\mathcal{S}_2(H,K)}^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} \|T^k\|_{H'}^2.$$

2.4.5 Bemerkung. Sei $T \in H'$. Dann folgt aus dem Satz von Riesz

$$\|T\|_{H'}^2 = \sum_{l \in \mathbb{N}} \|T f_l\|^2 = \|T\|_{\mathcal{S}_2(H,\mathbb{R})}.$$

Insbesondere ist $H' = \mathcal{S}_2(H, \mathbb{R})$.

Wir kommen nun zu Spurklasse-Operatoren.

2.4.6 Lemma. *Sei $T \in L(H)$ mit $T^* = T \geq 0$. Konvergiert die Reihe*

$$\operatorname{tr} T := \sum_{k \in \mathbb{N}} \langle Q f_k, f_k \rangle_H,$$

so konvergiert die Reihe für alle Orthonormalbasen von H und der Grenzwert ist unabhängig von der Wahl der Basis.

Beweis: Siehe [PR07] (S.110 Remark B.0.4 und S.113 Remark B.0.9). □

2.4.7 Definition. Für $T \in L(H)$ mit $T^* = T \geq 0$ setze

$$\|T\|_{\mathcal{S}_1(H)} = \operatorname{tr} T.$$

Der Raum

$$\mathcal{S}_1(H) := \left\{ T \in L(H) : T^* = T \geq 0, \|T\|_{\mathcal{S}_1(H)} < \infty \right\}$$

heißt der Raum aller Spurklasse-Operatoren über H.

Beweis: Siehe [PR07] (S.9 Proposition 2.1.5) □

2.4.8 Bemerkung. Wegen $\|S\|^2_{\mathcal{S}_2(H,K)} = \|S^*S\|^2_{\mathcal{S}_1(H)}$ ($S \in L(H,K)$, $S \geq 0$) als Gleicheit in $[0, \infty]$, ist S genau dann ein Hilbert-Schmidt-Operator, falls S^*S ein Spurklasse-Operator ist. In diesem Fall ist $S^* \in \mathcal{S}_2(K,H)$ mit $\|S^*\|_{Ss_2(K,H)} = \|S\|_{\mathcal{S}_2(H,K)}$.

Andererseits ist $S \in L(H)$ mit $S^* = S \geq 0$ genau dann ein Spurklasse-Operator, falls $S^{\frac{1}{2}}$ ein Hilbert-Schmidt-Operator ist. Denn in diesem Fall ist $(S^{\frac{1}{2}})^* S^{\frac{1}{2}} = S$.

Zuletzt benötigen wir noch den Begriff der Pseudo-Inversen.

2.4.9 Definition. Sei $T \in L(H,K)$ dann heißt die Abbildung

$$T^{-1} := \left(T|_{(\ker T)^\perp} \right)^{-1} : R(T) \to H$$

die Pseudoinverse von T.

2.4.10 Bemerkung. Sei $T \in L(H,K)$ und $H_0 = R(T)$. Dann definiert

$$\langle x, y, \rangle_{H_0} := \langle T^{-1}x, T^{-1}y \rangle_H$$

ein Skalarprodukt auf H_0 und $(H_0, \langle \cdot, \cdot \rangle_{H_0})$ ist ein Hilbertraum.

Ist $(e_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von $(\ker T)^\perp$, so ist $(Te_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Orthonomralbasis von H_0.

2.4.11 Lemma. *Sei $T \in L(H,K)$ und $Q = TT^* \in L(K)$. Dann ist $R(T) = R(Q^{\frac{1}{2}})$ und $\|Q^{-\frac{1}{2}}x\|_K = \|T^{-1}x\|_H = \|x\|_{H_0}$ ($x \in R(T)$).*

Beweis: Siehe [PR07] (S.117 Corollary C.0.6). □

2.4.2 Hilbertraumwertige Wiener Prozesse

Wir beginnen mit der Definition von Gaußmaßen auf einem Hilbertraum.

2.4.12 Definition. Ein Maß μ auf $(H, \mathcal{B}(H))$ heißt Gaußmaß, falls für alle $\phi \in H'$ $\mu \circ \phi^{-1}$ ein reelles Gaußmaß ist.

Es gilt folgende Charakterisierung von Gaußmaßen auf Hilberträumen.

2.4.13 Satz. *Ein Maß μ auf $(H, \mathcal{B}(H))$ ist genau dann ein Gaußmaß, falls ein $m \in H$ und ein $Q \in \mathcal{S}_1(H)$ existieren, so dass für alle $x \in H$*

$$\hat{\mu}(x) := \int_H \exp(i\langle x, y\rangle_H) d\mu(y) = \exp\left(i\langle x, m\rangle_H - \frac{1}{2}\langle Qx, x\rangle_H\right).$$

In diesem Fall sind m und Q eindeutig bestimmt und wir schreiben $\mu = N(m, Q)$.

Beweis: Siehe [PR07] (S.9, Theorem 2.1.2). □

2.4.14 Definition. Eine Zufallsvariable $X : \Omega \to H$ heißt (H-wertige) Gaußsche Zufallsvariable, falls ein $m \in H$ und ein $Q \in \mathcal{S}_1(H)$ existieren, so dass $P \circ X^{-1} = N(m, Q)$. In diesem Fall sagen wir X ist $N(m, Q)$ verteilt.

Nun können wir H-wertige Wiener-Prozesse definieren.

2.4.15 Definition. Sei $Q \in S_1(H)$. Ein H-wertiger Prozess $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ heißt Q-Wiener Prozess, falls

(i) $W_0 = 0$ f.s.,

(ii) W ein stetiger Prozesse ist,

(iii) für alle $0 \le t_1 < t_2 < \ldots < t_n \le T$, $n \in \mathbb{N}$ die Zufallsvariablen

$$\{W_{t_1}, W_{t_1} - W_{t_1}, \ldots W_{t_n} - W_{t_{n-1}}\}$$

unabhängig sind,

(iv) $W_t - W_s$ $N(0,(t-s)Q)$ für alle $0 \leq s < t \leq T$ verteilt ist.

2.4.16 Definition. Ein Q-Wiener-Prozess heißt Q-Wiener-Prozess bzgl. einer Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, falls W adaptiert ist bzgl. $\mathbb{F}$ und $W_t - W_s$ unabhängig von $\mathcal{F}_s$ ist $(0 \leq s < t \leq T)$.

Zu einem Q-Wiener Prozess können wir auf kanonische Weise eine solche Filtrierung definieren, die darüberhinaus normal ist.

2.4.17 Definition und Satz. *Sei W ein Q-Wiener Prozess. Setze $\mathcal{N} := \{N \in \mathcal{F} : P(N) = 0\}$ sowie*

$$\mathcal{F}_t^0 := \sigma(\{W_s : 0 \leq s \leq t\}), \tag{2.5}$$

$$\tilde{\mathcal{F}}_t := \sigma(\mathcal{F}_t^0 \cup \mathcal{N}), \tag{2.6}$$

$$\mathcal{F}_t := \bigcap_{s>t} \tilde{\mathcal{F}}_s^0 \ (t \in [0,T)), \quad \mathcal{F}_T = \tilde{F}_T. \tag{2.7}$$

Dann ist $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ eine normale Filtrierung auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und W ist ein Q-Wiener Prozess bzgl. $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$. Wir nennen $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ die von W erzeugte normale Filtrierung.

Beweis: Siehe [PR07] (S.16, Proposition 2.1.13) □

2.4.18 Lemma. *Sei W ein Q-Wiener Prozess bzgl. einer Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$. Dann ist $W \in M_T^2(H)$.*

Beweis: Siehe [PR07] (S.21, Proposition 2.2.10). □

Ein H-wertiger Wiener-Prozess kann eindeutig über abzählbar viele unabhängige reelle Wiener Prozesse charakterisiert werden.

2.4.19 Satz. *Sei $Q \in S_1(H)$ und $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine ONB von H bestehend aus Eigenvektoren von Q mit zugehörigen Eigenwerten $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ein H-wertiger Prozess W ist genau dann ein Q-Wiener Prozess, falls*

$$W_t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \sqrt{\lambda_n} \beta_t^n e_n,$$

wobei $\{\beta^n : n \in \{k : \lambda_k \neq 0\}\}$ eine unabhängige Familie reeller Wiener-Prozesse ist. Dabei ist die Gleichheit sowie die Konvergenz der Reihe in $L^2(\Omega, C([0,T], H))$ gegeben. Insbesondere existiert zu jedem $Q \in \mathcal{S}_1(H)$ ein Q-Wiener Prozess.

Beweis: Siehe [PR07] (S.13, Proposition 2.1.10). □

2.4.3 Das Itô-Integral

Nun sind wir in der Lage das stochastische Integral bezüglich eines Q-Wiener Prozesses zu definieren. Dazu fixiere eine normale Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$, einen Spurklasseoperator $Q = Q^* \geq 0$ auf H und einen Q-Wiener Prozess W bezüglich der Filtrierung $\mathbb{F}$. Wir setzen $H_0 := R(Q^{\frac{1}{2}})$ und versehen diesen mit der Norm aus Bemerkung 2.4.10.

2.4.20 Definition. Sei $\phi = (\phi_t)_{t\in[0,T]}$ ein $L(H,K)$-wertiger stochastischer Prozess. Dann heißt ϕ einfach, falls

$$\phi = \sum_{m=0}^{k-1} \phi^m \mathbb{1}_{(t_m,t_{m+1}]},$$

wobei $k \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 \ldots < t_k = T$ und $\phi^m : \Omega \to L(H,K)$ eine $\mathcal{F}_{t_m} - L(H,K)$ messbare Stufenfunktion ist $(0 \leq m \leq k-1)$.

Die Menge aller einfachen Prozesse bezeichnen wir mit $\mathcal{E}(H,K)$.

Für $\phi \in \mathcal{E}(H,K)$ definiere den stochastischen Prozess $(\mathrm{Int}[\phi]_t)_{t\in[0,T]}$ durch

$$\mathrm{Int}[\phi]_t := \int_0^t \phi_s dW_s := \sum_{m=0}^{k-1} \phi^m (W_{t_{m+1}\wedge t} - W_{t_m \wedge t}).$$

Diesen Prozess nennen wir das stochastische Integral (Itô-Integral) von ϕ (bzgl. W).

2.4.21 Satz. *Sei* $\phi \in \mathcal{E}(H,K)$*. Dann ist* $\mathrm{Int}[\phi] \in \mathcal{M}_T^2(K)$, $\mathrm{Int} : \mathcal{E}(H,K) \to M_T^2(K)$ *ist linear und es gilt*

$$\| \mathrm{Int}[\Phi] \|_{\mathcal{M}_T^2(K)} = \| \phi Q^{\frac{1}{2}} \|_{L^2(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H,K))} \tag{2.8}$$

Beweis: Siehe [PR07] (S.23 Proposition 2.3.2 und S.25 Proposition 2.3.5). □

Nach Bemerkung 2.4.8 ist $Q^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{S}_2(H,K)$ und nach Lemma 2.4.3 ist für alle $T \in L(H,K)$ auch $TQ^{\frac{1}{2}} \in \mathcal{S}_2(H,K)$. Sei $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orhonormalbasis von $\left(\ker Q^{\frac{1}{2}}\right)^{\perp}$. Dann ist nach Bemerkung 2.4.10 $(Q^{\frac{1}{2}} e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von H_0 und es gilt

$$\|TQ^{\frac{1}{2}}\|^2_{\mathcal{S}_2(H,K)} = \sum_{n\in\mathbb{N}} \|TQ^{\frac{1}{2}} e_n\|_K^2 = \|T|_{H_0}\|_{\mathcal{S}_2(H_0,K)}.$$

(Beachte dabei, dass wir $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ durch ein Basis von $\ker Q^{\frac{1}{2}}$ zu einer Basis von H erweitern können.) Indem wir $T \in L(H,K)$ mit der Äquivalenzklasse $\{S \in L(H,K) : Sx = Tx \ (x \in H_0)\}$ identifizieren, können wir $L(H,K)$ als Teilmenge von $\mathcal{S}_2(H_0,K)$ auffassen. Insbesondere betrachten wir $\mathcal{E}(H,K)$ als eine Teilmenge von $L^2(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H_0,K))$ ohne die Notation zu ändern. (2.8) lautet damit

$$\| \operatorname{Int}[\Phi]\|_{\mathcal{M}_T^2(K)} = \|\phi\|_{L^2(\Omega_T,\mathcal{S}_2(H_0,K))}.$$

Wir können also $\operatorname{Int} : \mathcal{E}(H,K) \to \mathcal{M}_T^2(K)$ eindeutig zu einer Isometrie $\operatorname{Int} : \overline{\mathcal{E}(H,K)} \to \mathcal{M}_T^2(K)$ fortsetztem (wobei der Abschluss bzgl. $\|\cdot\|_{L^2(\Omega_T,\mathcal{S}_2(H_0,K))}$ gemeint ist).

2.4.22 Satz. *Bezüglich* $\|\cdot\|_{\mathcal{S}_2(H_0,K)}$ *gilt*

$$\overline{\mathcal{E}(H,K)} = L^2_{\mathcal{P}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H_0,K)).$$

Beweis: Siehe [PR07] (S.29, Proposition 2.3.8). □

2.4.23 Definition. Die eindeutige isometrische Fortsetzung von Int zu einem Operator $\overline{\mathcal{E}(H,K)} \to \mathcal{M}^2(K)$ bezeichnen wir ebenfalls mit Int und für einen stochastischen Prozess $Z \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H_0,K))$ heißt

$$\operatorname{Int}[Z]_t =: \int_0^t Z_s dW_s$$

das stochastische (Itô-) Integral von Z bzgl. W und die Gleichheit

$$\| \operatorname{Int}[Z]\|_{\mathcal{M}_T^2(K)} = \|\phi\|_{L^2(\Omega_T,\mathcal{S}_2(H_0,K))}$$

nennen wir Itô-Isometrie.

Wir wollen nun die Klasse der Integratoren erweitern. Dazu führen wir den Begriff eines Q-zylindrischen Wiener-Prozesses ein, wobei $Q = Q^* \geq 0$ ein beliebiger injektiver Operator in $L(H)$ ist.

Fixiere im folgenden ein solches Q und wähle ein Orthonormalbasis $(\tilde{e}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus Eigenvektoren von Q mit zugehörigen Eigenwerten $(\lambda_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Setze weiter $H_0 = R(Q^{\frac{1}{2}})$ versehen mit dem Skalarprodukt aus Bemerkung 2.4.10. Dann ist $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ definiert durch $e_k := \sqrt{\lambda_k}\tilde{e_k}$ eine Orthonormalbasis von H_0.

2.4.24 Bemerkung. In obiger Situation existiert stets ein Hilbertraum H_1 und eine Hilbert-Schmidt-Einbettung $J \in \mathcal{S}_2(H_0, H_1)$. Wir können zum Beispiel $H_1 = H_0$ und $Jx := \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu_k \langle x, e_k\rangle_{H_0} e_k$ mit $\mu_k > 0$ und $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \ell^2$ wählen.

Wir fixieren nun einen solchen Hilbertraum H_1 und eine Hilbert-Schmidt-Einbettung $J \in \mathcal{S}_2(H_0, H_1)$.

2.4.25 Bemerkung. Definiere $Q_1 = JJ^*$. Dann ist $Q_1 \in \mathcal{S}_1(H_1)$ mit $Q_1 = Q_1^* \geq 0$ (siehe Bemerkung 2.4.8), es gilt $J(H_0) = R(Q^{\frac{1}{2}})$ und $(Je_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist eine Orthonormalbasis von $R(Q^{\frac{1}{2}})$ (siehe Bemerkung 2.4.10 und Lemma 2.4.11). Daraus folgt unmittelbar, dass $T \in \mathcal{S}_2(H_0, K)$ äquivalent zu $TJ^{-1} \in \mathcal{S}_2(R(Q_1^{\frac{1}{2}}), K)$ ist mit $\|T\|_{\mathcal{S}_2(H_0,K)} = \|TJ^{-1}\|_{\mathcal{S}_2(R(Q_1^{\frac{1}{2}}),K)}$.

Mit folgendem Satz können wir Q-zylindrische Wiener Prozesse definieren.

2.4.26 Satz. *Seien $Q \in L(H)$, H_1, $J \in \mathcal{S}_2(H_0, H_1)$ und Q_1 wie oben definiert. $(\beta^n)_{n\in\mathbb{N}}$ sei eine Familie unabhängiger reeller Wiener Prozesse bzgl. der Filterierung $\mathbb{F}$. Dann konvergiert die Reihe*

$$W_t = \sum_{n\in\mathbb{N}} \beta_t^n J e_n \tag{2.9}$$

in $M_T^2(H_1)$ und definiert einen Q_1-Wiener Prozess auf H_1 bzgl $\mathbb{F}$. Diesen Prozess nennen wir Q-zylindrischen Wiener Prozess (in H).

Wir werden nun das Integral eines Prozesses $Z \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H_0, K))$ bezüglich des Q-zylindrischen Wiener Prozesses definieren. Nach Bemerkung 2.4.25 ist $Z \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H_0, K))$ äquivalent zu $Z \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(R(Q_1^{\frac{1}{2}}), K))$. Damit ergibt folgende Definition Sinn.

2.4.27 Definition. Für $Z \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H_0, K))$ definiere das stochastische Integral bezüglich eines Q-zylindrischen Wiener Prozesses W durch

$$\mathrm{Int}[Z]_t = \int_0^t Z_s dW_S := \int_0^t Z_s J^{-1} dW_s, \tag{2.10}$$

wobei die rechte Seite als Integral im Sinne von Definition 2.4.23 zu verstehen ist.

2.4.28 Bemerkung. Da für W die Darstellung (2.9) gilt, folgt für einfache Prozesse unmittelbar, dass das Integral aus (2.10) unabhängig von der Wahl von H_1 und J ist. Durch den Übergang auf den Grenzwert gilt dies für alle $Z \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H_0, K))$.

Wegen $\|T\|_{\mathcal{S}_2(H_0,K)} = \|TJ^{-1}\|_{\mathcal{S}_2(R(Q_1^{\frac{1}{2}}),K)}$ für alle $T \in \mathcal{S}_2(H_0, K)$ (siehe Bemerkung 2.4.25) erhalten wir auch für das Integral bezüglich eines Q-zylindrischen Wiener Prozesses die Itô-Isometrie

$$\| \operatorname{Int}[Z]_T \|_{L^2(\Omega,K)} = \| \operatorname{Int}[Z] \|_{M_T^2(K)} = \|Z\|_{L^2(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H_0,K))}.$$

2.4.29 Definition. Sei $Z \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H_0, K))$. Für den Prozess $\operatorname{Int}[Z]$ schreiben wir auch $\int ZdW$. Außerdem setzten wir für $0 \le s \le t \le T$

$$\int_s^t Z_u dW_s := \int_0^t Z_u dW_u - \int_0^s Z_u dW_u.$$

Zuletzt werden wir einige Eigenschaften des stochastischen Integrals zitieren, die wir im Verlaufe der Arbeit benötigen. Dazu sei W ein Q-zylindrischer Wiener Prozess bzgl. der Filtrierung $(F_t)_{t\in[0,T]}$ ($Q \in L(H)$ injektiv mit $Q = Q^* \ge 0$).

2.4.30 Lemma. *Sei K_1 ein weiterer separabler reeller Hilbertraum und $T \in L(K, K_1)$. Für $Z \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H_0, K))$ ist $TZ \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H_0, K_1))$ und die Prozesse $\operatorname{Int}[TZ]$ und $T \operatorname{Int}[Z]$ sind ununterscheidbar.*

Beweis: Siehe [PR07] (S.35, Lemma 2.4.1). □

2.4.31 Satz. *Sei $Z \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H_0, K))$ und $\tau \in \mathcal{T}$. Dann ist auch $\mathbb{1}_{(0,\tau]} Z \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H_0, K))$ und es gilt*

$$\int_0^t \mathbb{1}_{(0,\tau]} Z_s dW_s = \int_0^{\tau\wedge t} Z_s dW_s,$$

für alle $t \in [0, T]$ fast sicher. Das heißt die Prozesse $\operatorname{Int}[\mathbb{1}_{(0,\tau]} Z]$ und $\operatorname{Int}[Z]_{\tau\wedge\bullet}$ sind ununterscheidbar.

Beweis: Siehe[PR07] (S.31, Lemma 2.3.9). □

2.4.32 Bemerkung. Mit denselben Argumenten wie im Beweis von 2.4.31 lässt sich für $Z \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H_0, K))$, $\tau \in \mathcal{T}$ und $B \in \mathcal{F}_\tau$ zeigen:

$$\int_0^t \mathbb{1}_B \mathbb{1}_{(\tau,T]} Z_s dW_s = \mathbb{1}_B \int_0^t \mathbb{1}_{(\tau,T]} Z_s dW_s$$

für alle $t \in [0, T]$, fast sicher.

Insbesondere ergibt sich mit der Notation aus Definition 2.4.29 sowie $Z_s \mathbb{1}_{(\tau,T]} = Z_s - Z_s \mathbb{1}_{(0,\tau]}$ (als Gleichheit $P \otimes \lambda$ fast überall) folgendes:

$$\int_s^t \mathbb{1}_B \mathbb{1}_{(\tau,T]} Z_s dW_s = \mathbb{1}_B \int_{s\vee\tau}^{t\vee\tau} Z_s dW_s$$

für alle $0 \leq s \leq t \leq T$, fast sicher.

2.4.33 Definition. Sei $Z \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H_0, K))$ und $M := \mathrm{Int}[Z]$. Dann heißt der Prozess $\langle M \rangle$ definiert durch

$$\langle M \rangle_t := \int_0^t \|Z_s\|^2_{\mathcal{S}_2(H_0,K)} ds \quad (t \in [0, T]).$$

die quadratische Variation von M.

2.4.34 Lemma. *Sei $Z \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H_0, K)$ und $M := \mathrm{Int}[Z]$. Dann ist M der eindeutige stetige monoton wachsende Prozess, so dass $\|M\|^2 - \langle M \rangle$ ein Martingal ist.*

Beweis: Siehe [PR07] (S.37, Lemma 2.4.3). □

2.4.35 Bemerkung. Insbesondere stimmt für $Z \in L^2_{\mathcal{P}}(\Omega_T, H_0')$ die quadratische Variation des reellen Martingals $\mathrm{Int}[Z]$ im Sinne von Definition 2.4.33 mit jener im Sinne von reellen Semimartingalen überein (siehe [Pro04], S.66 Defintion II.6.1 und S.71 Theorem 27).

2.4.36 Satz. *Sei $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ die von einem zylindrischen Wiener Prozess erzeugte Filtrierung (siehe Satz 2.4.17). Dann besitzt jedes reellwertige lokale Martingal bezüglich $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ eine stetige Version. Außerdem ist jede Zufallsvariable $X \in \mathcal{L}((\Omega, \mathcal{F}_0, P), E)$ fast sicher konstant.*

Beweis: Siehe [EK08] (S. 126, Theorem 2.4 und S.127 Proposition 3.1) □

Wir haben das Itô-Integral bis jetzt für vorhersagbare Integranden betrachtet. Wegen der Itô-Isometrie sind die Integranden aber nur $P \otimes \lambda$-f.ü. eindeutig bestimmt. Folgender Satz erlaubt uns daher das Itô-Integral auch für progressiv messbare Integranden zu betrachten.

2.4.37 Satz. *Sei K_1 ein separabler Hilbertraum und $Z : \Omega_T \to K_1$ ein progressiv messbarer Prozess (oder sogar ein adaptierter $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,T]) - \mathcal{B}(K)$-messbarer Prozess). Dann existiert ein vorhersagbarer Prozess $\tilde{Z} : \Omega_T \to K_1$ mit*

$$\tilde{Z} = Z \quad P \otimes \lambda\text{-}f.\ddot{u}..$$

Beweis: Siehe [CW14] (S.65 Theorem 3.6 und S.66 Theorem 3.7). □

2.4.38 Bemerkung. Satz 2.4.37 impliziert insbesondere, dass für einen separablen Hilbertraum K_1 die Hilberträume $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, K_1)$ und $L^2_{\mathcal{P}}(\Omega_T, K_1)$ übereinstimmen. Das heißt insbesondere, dass wir bei der Konstruktion des stochastischen Integrals als Abschluss der einfachen Funktionen $\mathcal{E}(H,K)$ auch $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H_0,K))$ betrachten und das Itô-Integral analog für progressiv messbare Integranden definieren können. Diese Version des Integralbegriffs werden wir in dieser Arbeit verwenden.

3 Banachverbände

In diesem Kapitel werden wir zunächst eine kurze Einführung in die Theorie der Banachverbände geben. Für eine ausührliche Darstelllung der Theorie siehe etwa [AB06] (Kapitel 8 und 9) oder [LT79]. Anschließend werden wir uns mit den Eigenschaften der Räume $L^p(\Omega, E)$ beschäftigen, wobei E ein separabler Banachverband ist.

3.1 Grundlagen und Notation

3.1.1 Definition. Sei $(M, \leq)$ eine partiell geordnete Menge. Für $A \subset M$ schreiben wir

(i) $A \geq v$ $(A \leq v)$, falls A von unten (oben) durch v beschränkt ist, das heißt, falls $a \geq v$ $(a \leq v)$ für alle $a \in A$.

(ii) $A \downarrow$ $(A \uparrow)$, falls A nach unten (oben) gerichtet ist, das heißt, falls für alle $a, b \in A$ ein $c \in A$ existiert, so dass $c \leq a, b$ $(c \geq a, b)$.

(iii) $A \downarrow\geq v$ $(A \uparrow\leq v)$, falls A nach unten (oben) gerichtet ist und $A \leq v$ $(A \geq v)$.

(iv) $v = \inf A$ $(v = \sup A)$, falls $A \geq v$ $(A \leq v)$ und für alle $w \in M$ aus $A \geq w$ $(A \leq w)$ schon $w \leq v$ $(w \geq v)$ folgt. v heißt in diesem Fall das Infimum (Supremum) von A.

(v) $A \downarrow v$ $(A \uparrow v)$, falls $A \downarrow$ $(A \uparrow)$ und $\inf A = v$, $(\sup A = v)$.

Speziell setzen wir $\inf\{a, b\} =: a \wedge b$ und $\sup\{a, b\} =: a \vee b$ für $a, b \in A$.

Für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ schreiben wir $a_n \downarrow$ $(a_n \uparrow)$, falls $a_{n+1} \leq a_n$ $(a_{n+1} \geq a_n)$ für alle $n \in \mathbb{N}$; in diesem Fall nennen wir $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton fallend (monoton wachsend).

3.1.2 Definition. Eine partiell geordnete Menge $(M, \leq)$ heißt Verband, falls für alle $a, b \in M$ auch $a \wedge b$ und $a \vee b$ in M existieren.

3.1.3 Definition. Ein reller Vektorraum V ausgestatten mit einer Halbordnung $\leq$ heißt ein Vektorverband oder Riesz-Raum, falls $(V, \leq)$ ein Verband ist und die partielle Ordnung mit der Vektorraumstruktur kompatibel ist, das heißt, falls

$$\forall x, y, z \in V: \ x \leq y \Rightarrow x + z \leq y + z, \tag{3.1}$$

$$\forall x, y \in V, \ \alpha \in \mathbb{R}, \ \alpha \geq 0: \ x \leq y \Rightarrow \alpha x \leq \alpha y. \tag{3.2}$$

Für $x \in V$ setze:

$$\begin{aligned} x^+ &:= x \vee 0, \\ x^- &:= -x \vee 0, \\ |x| &:= x \vee -x. \end{aligned}$$

In der folgenden Bemerkung werden einige nützlliche Identitäten und Ungleichungen in einem Vektorverband zusammengefasst (siehe etwa [AB06], S.318, Theorem 8.6).

3.1.4 Bemerkung. Sei $(V, \leq)$ ein Vektorverband, dann gilt für alle $x, y, z \in V$ und $\alpha \in \mathbb{R}$:

(i) $x = x^+ - x^-$,

(ii) $|x| = x^+ + x^-$,

(iii) $x \vee y = -\left((-x) \wedge (-y)\right)$,

(iv) $x \wedge y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$,

(v) $x + (y \wedge z) = (x + z) \wedge (x + z)$,

(vi) $|\alpha x| = |\alpha||x|$,

(vii) $|x + y| \leq |x| + |y|$,

(viii) $||x| - |y|| \leq |x - y|$,

Insbesondere folgt daraus, dass ein partiell geordneter Vektorverband $(V, \leq)$, dessen Halbordnung (3.1) und (3.2) erfüllt, bereits ein Vektorverband ist, falls für alle $x \in V$ $|x| = x \vee -x$ existiert.

Wir werden in dieser Arbeit folgende Begriffe aus der Theorie der Vektorverbände verwenden.

3.1.5 Definition. Sei V ein Vektorverband. Ein Untervektorraum $U \subset V$ heißt Unterverband falls für $x, y \in U$ auch $x \wedge y \in U$ sowie $x \vee y \in U$.

Ein Unterverband $U \subset V$ heißt Ideal in V, falls für alle $g \in U$ und $f \in V$ mit $|f| \leq |g|$ auch $f \in U$ gilt.

3.1.6 Definition. Sei $(V, \leq)$ ein Vektorverband. Dann heißt die Menge aller positiven Elemente von V

$$V^+ := \{v \in V | v \geq 0\}$$

der positive Kegel von V.

3.1.7 Definition. Seien V und W zwei Vektorverbände. Ein linearer Operator $T : V \to W$ heißt

(i) positiv, falls für alle $x \in V^+$ auch $Tx \in W^+$,

(ii) ein Verbands-Homomorphismus, falls $T(x \wedge y)=T(x) \wedge T(y)$ und $T(x \vee y) = T(x) \vee T(y)$ für alle $x, y \in V$.

3.1.8 Definition. Ein Vektorverband $(V, \leq)$ heißt ordnungsvollständig (σ-ordnungsvollständig), falls jede von unten beschränkte Menge $A \subset V$ (jede von unten beschränkte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$) ein Infimum besitzt.

3.1.9 Bemerkung. Für $A \subset V$ definiere

$$S_A = \{\inf\{a_1, \ldots, a_n\} : n \in \mathbb{N},\ a_1, \ldots, a_n \in A\}\,.$$

Dann gilt offensichtlich $S_A \downarrow$ und für $v \in V$ gilt $S_A \geq v$, genau dann wenn $A \geq v$. Damit besitzt A genau dann ein Infimum, falls S_A ein solches besitzt. Der Vektorverband $(V, \leq)$ ist also genau dann ordnungsvollständig, falls jede nach unten gerichtete, von unten beschränkte Menge ein Infimum besitzt.

3.1.10 Definition. Eine Norm $\| \cdot \|$ auf einem Vektorveband V heißt Verbandsnorm, falls folgendes gilt:

$$\forall x, y \in V : |x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|.$$

Damit können wir nun den Begriff des Banachverbandes definieren.

3.1.11 Definition. Ein Banachverband ist normierter Vektorverband $(E, \| \cdot \|, \leq)$, so dass $\| \cdot \|$ eine Verbandsnorm auf $(E, \leq)$ und $(E, \| \cdot \|)$ ein Banachraum ist.

Im folgenden sei $(E, \|\cdot\|, \leq,)$ stets ein Banachverband.

3.1.12 Notation. Um Verwechslungen zu vermeiden, nennen wir eine im Sinne von Definition 3.1.1 von oben bzw. unten beschränkte Teilmenge von E auch ordnungsbeschränkt von oben bzw. von unten. Eine Menge $A \subset E$, für die $\{\|a\| : a \in A\}$ in $\mathbb{R}$ beschränkt ist, nennen wir normbeschränkt.

3.1.13 Lemma. *Die Abbildungen $E \times E \to E,\ (x,y) \mapsto x \wedge y$, $E \times E \to E,\ (x,y) \mapsto x \vee y$ und $E \to E : x \mapsto |x|$ sind bzgl. der Normtopologie stetig und der positive Kegel E^+ ist abgeschlossen.*

Beweis: Für alle $x, y \in E$ gilt $||x| - |y|| \leq |x - y|$ (siehe Bemerkung 3.1.4 (viii)). Da $\|\cdot\|$ eine Verbandsnorm ist, folgt unmittelbar

$$\| \, |x| - |y| \, \| \leq \|x - y\|.$$

Das heißt die Abbildung $x \mapsto |x|$ ist stetig. Die Stetigkeit der anderen Abbildungen ergibt sich dann aus den Identitäten in Bemerkung 3.1.4. Die Abbildung $f : E \to E,\ x \mapsto |x| - x$ ist daher ebenfalls stetig. Da $x \geq 0$ äquivalent zu $x = |x|$ ist, erhalten wir $E^+ = f^{-1}(\{0\})$. E^+ ist damit als Urbild einer abgeschlossenen Menge unter einer stetigen Abbildung abgeschlossen. □

3.1.14 Lemma. *Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ eine Folge mit $x_n \downarrow$. Konvergiert $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen ein $x \in E$, so gilt*

$$x = \lim_{n\to\infty} x_n = \inf_{n\in\mathbb{N}} x_n.$$

Beweis: Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ eine nach unten gerichtete Folge. Ist $n \in \mathbb{N}$ beliebig, dann gilt $x_i \leq x_n$ für alle $i \geq n$. Aus der Abgeschlossenheit von E^+ folgt daher auch $x = \lim_{i\to\infty} x_i \leq x_n$. Der Grenzwert ist also tatsächlich eine untere Schranke von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Ist $y \in E$ mit $y \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann folgt wieder aus der Abgeschlossenheit des positiven Kegels $y \leq \lim_{n\to\infty} x_n = x$. Daher ist x die kleinste untere Schranke der Folge. □

3.1.15 Lemma. *Seien E, U Banachverbände, $D \subset E$ ein dichter Unterverband und $T : E \to U$ ein linearer, stetiger Operator. Falls für alle $x \in D \cap E^+$ auch $Tx \in U^+$ gilt, ist T positiv.*

Beweis: In der Situation des Lemmas sei $x \in E^+$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$. Nach Lemma 3.1.13 folgt daraus auch $\lim_{n\to\infty} |x_n| = |x| = x$. Da D ein Unterverband ist, ist $(|x_n|)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$, also $T|x_n| \geq 0$ $(n \in \mathbb{N})$. Mit der Abgeschlossenheit von E^+ und der Stetigkeit von T ergibt sich schließlich

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} T|x_n| = Tx.$$

□

3.1.16 Definition. Den topologischen Dualraum E' versehen wir mit folgender Halbordnung:

$$x' \leq_{E'} y' :\Leftrightarrow \forall x \in E^+ : x'(x) \leq y'(x), \quad (x', y' \in E').$$

3.1.17 Satz. *Sei $(E, \leq)$ ein Banachverband. Dann ist auch $(E', \leq_{E'})$ ein Banachverband.*

Beweis: Siehe [AB06] (S.350 Lemma 9.4). □

Der positive Kegel von E lässt sich nun über den positiven Kegel von E' charakterisieren.

3.1.18 Satz. *Sei E ein Banachverband und $x \in E$. Dann ist $x \in E^+$ genau dann, falls $x'(x) \geq 0$ für alle $x' \in (E')^+$.*

Beweis: Siehe [AB06] (S.332 Corollary 8.35 und S.337 Theorem 8.48). □

3.2 Ordnungsstetigkeit und die Radon-Nykodim-Eigenschaft

Eine wichtige Eigenschaft, die einen nützlichen Zusammenhang zwischen der Topologie und der Ordnungstruktur auf einem Banachverband herstellt, ist die Ordnungsstetigkeit.

3.2.1 Definition. Ein Banachverband $(E, \|\cdot\|, \leq)$ heißt ordnungsstetig, falls aus $A \downarrow 0$ in E stets $\{\|x\| : x \in A\} \downarrow 0$ in $\mathbb{R}$ folgt und σ-ordnungstetig, falls dies lediglich für Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$ gilt.

Jedoch haben nicht alle Banachverbände diese Eigenschaft wie folgendes Beispiel zeigt.

3.2.2 Beispiel. Sei ℓ_∞ der Banchraum aller reellwertigen beschränkten Folgen ausgestattet mit der Supremumsnorm

$$\|(a_k)_{k\in\mathbb{N}}\|_\infty := \sup_{k\in\mathbb{N}} |a_k|.$$

Definiere folgende Halbordnung auf ℓ_∞:

$$(a_k)_{k\in\mathbb{N}} \leq (b_k)_{k\in\mathbb{N}} :\Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} : a_k \leq b_k \quad ((a_k)_{k\in\mathbb{N}}, (b_k)_{k\in\mathbb{N}} \in l_\infty).$$

Es ist unmittelbar klar, dass ℓ_∞ bezüglich dieser Ordnung ein Vektorverband und $\|\cdot\|_\infty$ eine Verbandsnorm auf ℓ_∞ ist. Damit ist ℓ_∞ ein Banachverband. Definiere nun die Folge $(a^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset l_\infty$ durch

$$a_k^n = \begin{cases} 1 & k \geq n, \\ 0 & k < n. \end{cases}$$

Offensichtlich ist $a^{n+1} \leq a^n$ und $a^n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Ist $b \in l_\infty$ eine weitere Folge mit $a^n \geq b$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so gilt $b_k \leq a_k^{k+1} = 0$ für alle $k \in \mathbb{N}$ und damit $b \leq 0$. Insgesamt erhält man also $a^n \downarrow 0$ in l_∞. Andererseits ist $\|a^n\|_\infty = 1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Das heißt $(a^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht gegen 0. Damit ist l_∞ nicht ordnungsstetig.

Direkt aus der Definition der Ordnungsstetigkeit ergibt sich das nächste Resultat

3.2.3 Lemma. *Sei $(E, \|\cdot\|, \leq)$ ein ordnungsstetiger Banachverband $A \subset E$, $x \in E$ und gelte $A \downarrow x$. Dann existiert eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ mit*

$$x_n \downarrow x, \quad \lim_{n\to\infty} x_n = x.$$

Beweis: In der Situation des Lemmas definiere

$$A - x = \{a - x : a \in A\}.$$

Aus $A \downarrow x$ folgt offensichtlich $A - x = \{a - x : a \in A\} \downarrow 0$. Aus der Ordnungsstetigkeit erhält man somit $\{\|a - x\| : a \in A\} \downarrow 0$ in $\mathbb{R}$. Insbesondere existiert eine Folge $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ mit $\|\tilde{x}_n - x\| \to 0$ $(n \to \infty)$. Definiere nun $x_1 = \tilde{x}_1$ und wähle für alle $n \in \mathbb{N}$ rekursiv $x_{n+1} \leq x_n \wedge \tilde{x}_{n+1}$. Ein solches

x_{n+1} existiert jeweils, da A nach unten gerichtet ist. Dann gilt $x_n \downarrow$ per Definition. Außerdem folgt aus $x \leq x_n \leq \tilde{x}_n$

$$|x_n - x| = x_n - x \leq \tilde{x}_n - x = |\tilde{x}_n - x|.$$

Da $\|\cdot\|$ eine Verbandsorm ist, ergibt sich so

$$\|x_n - x\| \leq \|\tilde{x}_n - x\|.$$

Somit konvergiert auch $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen x. $x_n \downarrow x$ folgt unmittelbar aus Lemma 3.1.14. $\square$

Es gibt einige äquivalente Charakterisierungen für die Ordnungsstetigeit eines Banchverbandes. Die für uns wichtigen werden in folgendem Satz aufgelistet.

3.2.4 Satz. *Sei $(E, \|\cdot\|, \leq)$ ein Banachverband. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) E ist ordnungsstetig.

(ii) E ist σ-ordnungsvollständig und σ-ordnungsstetig.

(iii) Jede nach unten gerichtete von unten beschränkte Folge in E konvergiert.

(iv) E ist ordnungsvollständig und ordnungsstetig.

(v) Es existiert kein Unterverband von E, der zu l_∞ Verbands-isomorph ist.

Beweis: Siehe [LT79] (S.28). $\square$

Daraus ergibt sich insbesondere, dass jeder Banachverband mit (RNE) ordnungsstetig ist.

3.2.5 Korollar. *Sei E ein Banachverband mit (RNE). Dann ist E ordnungsstetig. Insbesondere ist jeder reflexive Banachverband ordnungsstetig.*

Beweis: Sei E ein Banachverband mit (RNE). Nach Satz 2.1.35 hat c_0 die (RNE) nicht. Wegen Satz 2.1.34 ist damit kein Unterraum von E isomorph zu c_0. Offensichtlich kann dann auch kein Unterraum isomorph zu l_∞ sein, woraus mit Satz 3.2.4 die Ordnungsstetigkeit folgt. Die zweite Aussage ergibt sich unmittelbar aus Satz 2.1.33. $\square$

In einem ordnungsstetigen Banachverband konvergiert jede monoton wachsende von oben ordnungsbeschränkte Folge. Das nächste Resultat gibt ein Kriterium dafür, wann dies sogar für monoton wachsende normbeschränkte Folgen gilt. Dies ist offensichtlich eine stärkere Aussage, da jede monoton wachsende Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem Banchverband, die durch ein x von oben ordnungsbeschränkt ist, durch $\|x\| + \|x_1\|$ normbeschränkt ist.

3.2.6 Satz. *Für einen Banachverband E sind äquivalent:*

(i) *Kein Unterraum von E ist isomorph zu c_0.*

(ii) *Jede monoton wachsende normbeschränkte Folge in E konvergiert.*

Beweis: Siehe [LT79] (S.34). □

3.2.7 Bemerkung. Da in einem Banachverband mit RNE kein Unterraum isomorph zu c_0 sein kann, konvergiert in jedem Banachverband mit RNE, jede monoton wachsende beschränkte Folge.

Zuletzt zitieren wir noch den folgenden Renormierungs-Satz für separable ordnungstetige Banachverbände aus [LT79].

3.2.8 Satz. *Sei $(E, \|\cdot\|, \leq)$ ein separabler ordnungsstetiger Banachverband. Dann existiert eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Verbandsnorm $\tilde{\|}\cdot\tilde{\|}$ auf E und eine abzählbare Menge $D \subset (E')^+$ mit*

(i) $\tilde{\|}x\tilde{\|} = \sup_{x'\in D} x'(|x|)$ *($x \in E$),*

(ii) *Für alle $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset E$,$x \in E$ ist $\lim_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ äquivalent zu $\lim_{n\to\infty} x'(x_n) = x'(x)$ für alle $x' \in D$ und $\lim_{n\to\infty} \tilde{\|}x_n\tilde{\|} = \tilde{\|}x\tilde{\|}$.*

Beweis: Siehe [LT79] (S.535 Corollary I.2 und S.536). □

3.3 Banachverbandwertige L^p-Räume

In diesem Abschnitt sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein endlicher Maßraum. In Kapitel 1 haben wir das Bochner-Integral für Funktionen mit Werten in einem (separablen) Banachraum $(E, \|\cdot\|)$ vorgestellt. In diesem Kapitel sei nun $(E, \|\cdot\|, \leq)$ ein separabler Banachverband.

Zunächst betrachten wir den Vektorraum aller Funktionen $F(\Omega, E) = \{f : \Omega \to E\}$ von Ω nach E. Diesen statten wir mit folgender partieller Ordnung aus:

$$f \leq_{F(\Omega,E)} g \;:\Leftrightarrow\; \forall \omega \in \Omega : \; f(\omega) \leq g(\omega), \quad (f, g \in F(\Omega, E)).$$

Es lässt sich numittelbar verifizieren, dass $F(\Omega, E)$ mit dieser Halbordnung ein Vektorverband ist und für $f, g \in F(\Omega, E)$ folgende Gleichheiten gelten:

(i) $f \wedge g = \omega \mapsto (f(\omega) \wedge g(\omega))$,

(ii) $f \vee g = \omega \mapsto (f(\omega) \vee g(\omega))$,

(iii) $f^+ = \omega \mapsto (f(\omega))^+$,

(iv) $f^- = \omega \mapsto (f(\omega))^-$,

(v) $|f| = \omega \mapsto |f(\omega)|$.

Nun betrachten wir den Raum $\mathcal{L}(\Omega, E)$ der $\mathcal{F}-\mathcal{B}(E)$ messbaren Funktionen als Unterraum von $F(\Omega, E)$. Mit $\leq_{\mathcal{L}(E)}$ bezichnen wir die Einschränkung der Halbordnung $\leq_{F(\Omega,E)}$ auf $\mathcal{L}(\Omega, E)$. Man erhält folgende Resultate bezüglich des Raumes $(\mathcal{L}(\Omega, E), \leq_{\mathcal{L}(E)})$.

3.3.1 Lemma. *Die Räume* $(\mathcal{L}(\Omega, E), \leq_{\mathcal{L}(E)})$ *und* $(S(\Omega, E), \leq_{\mathcal{L}(E)})$ *sind Vektorverbände.*

Beweis: Nach Bemerkung 3.1.9 genügt es zu zeigen, dass für $f \in \mathcal{L}(\Omega, E)$ bzw. $f \in S(\Omega, E)$, auch $|f| \in \mathcal{L}(\Omega, E)$ bzw. $|f| \in S(\Omega, E)$ gilt.

Wir beweisen dies zunächst für $S(\Omega, E)$. Sei dazu $s = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$ mit $n \in \mathbb{N}$, $a_i \in B$, $A_i \in \mathcal{A}$ paarweise disjunkt eine Stufenfunktion. Dann gilt

$$|s|(\omega) = |s(\omega)| = \sum_{i=1}^{l} |a_i| \mathbb{1}_{A_i}.$$

Also ist $|s|$ ebenfalls eine Stufenfunktion.

Sei nun $f \in \mathcal{L}(\Omega, E)$. Da E separabel ist, existiert nach Satz 2.1.3 eine Folge $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset S(\Omega, E)$ mit $f(\omega) = \lim_{n \to \infty} s_n(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega$. Nach dem ersten Teil des Beweises ist auch $(|s_n|)_{n \in \mathbb{N}} \subset S(\Omega, E)$. Aus Lemma 3.1.13 erhalten wir für alle $\omega \in \Omega$

$$|s_n|(\omega) = |s_n(\omega)| \to |f(\omega)| = |f|(\omega) \quad (n \to \infty).$$

$(|s_n|)_{n \in \mathbb{N}}$ ist also eine Folge von Stufenfunktionen, die punktweise gegen $|f|$ konvergiert. Damit ist $|f|$ nach Satz 2.1.3 messbar. $\square$

3.3.2 Korollar. *Für $f, g \in \mathcal{L}(\Omega, E)$ ist die Menge $\{f \leq g\}$ messbar.*

Beweis: Es gilt:

$$\{f \leq g\} = \{f - g \leq 0\} = \{((f - g) \vee 0) = 0\}$$

Nach Lemma 3.3.1 ist $((f-g)\vee 0) \in \mathcal{L}(\Omega, E)$ und damit ist $\{((f - g) \vee 0) = 0\}$ messbar. □

3.3.3 Lemma. *Falls E ordnungsstetig ist, ist $\mathcal{L}(\Omega, E)$ σ-ordnungsvollständig.*

Beweis: Sei E ein ordnungsstetiger Banachverband und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{L}(\Omega, E)$ eine Folge mit $f_n \downarrow\geq_{\mathcal{L}(E)} g$ für ein $g \in \mathcal{L}(\Omega, E)$. Das heißt für alle $\omega \in \Omega$ gilt $f_n(\omega) \downarrow\geq g(\omega)$ in E. Da E ordnungsstetig ist, existiert nach Satz 3.2.4 für alle $\omega \in \Omega$ ein $f(\omega) \in E$ mit $f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega)$. Nach Lemma 3.1.14 gilt dann auch

$$f(\omega) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(\omega) \quad (\omega \in \Omega). \tag{3.3}$$

Die Abbildung $f : \omega \mapsto f(\omega)$ ist nun als punktweiser Grenzwert messbarer Funktionen messbar und da die Ordnung auf $\mathcal{L}(\Omega, E)$ punktweise definiert ist, folgt aus (3.3) sofort $f = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$ in $\mathcal{L}(\Omega, E)$. Jede nach unten gerichtete von unten beschränkte Folge besitzt also ein Infimum in $\mathcal{L}(\Omega, E)$. Nach Bemerkung 3.1.9 ist dies gerade äquivalent zur σ-Ordnungstetigkeit von $\mathcal{L}(\Omega, E)$. □

Auch die Räume $\mathcal{L}^p(\Omega, E)$ ($p \in [1, \infty)$) versehen wir mit der punktweisen Ordnung $\leq_{\mathcal{L}(E)}$.

3.3.4 Lemma. *Für $p \in [1, \infty)$ ist $(\mathcal{L}^p(\Omega, E), \leq_{\mathcal{L}(E)})$ ein Vektorverband und ein Ideal in $\mathcal{L}(\Omega, E)$.*

Beweis: Da E ein Banachverband ist, gilt für alle $f \in \mathcal{L}(\Omega, E)$, $\|f(\omega)\| = \|\,|f(\omega)|\,\|$ $(\omega \in \Omega)$ und damit $\|f\| = \|\,|f|\,\|$ in $\mathcal{L}(\Omega)$. Außerdem ist $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, E)$ äquivalent zu $\|f\| \in \mathcal{L}^p(\Omega)$. Insgesamt folgt aus $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, E)$ also stets $|f| \in \mathcal{L}^p(\Omega, E)$. Nach Bemerkung 3.1.4 ist $(\mathcal{L}^p(\Omega, E), \leq_{\mathcal{L}(E)})$ ein Vektorverband.

Dass $\mathcal{L}^p(\Omega, E)$ ein Ideal ist, sieht man wie folgt. Für alle $f, g \in \mathcal{L}(\Omega, E)$ folgt aus $|f| \leq_{\mathcal{L}(E)} |g|$ auch $\|f\| \leq_{\mathcal{L}(R)} \|g\|$. Aus der Monotonie des reellen Integrals ergibt sich damit $\|f\|_{L^p(\Omega,E)} \leq \|g\|_{L^p(\Omega,E)}$. Ist also $g \in \mathcal{L}^p(\Omega, E)$, gilt dies auch für alle f mit $|f| \leq_{\mathcal{L}(E)} |g|$. □

Sei nun $p \in [1, \infty) \cup \{0\}$. $[f]$ bezeichne im Folgenden eine Äquivalenzklasse in $L^p(\Omega, E)$ mit Vertreter $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, E)$. Auf $L^p(\Omega, E)$ definieren wir die Halbordnung $\leq_{L^0(E)}$ durch:

$$[f] \leq_{L^0(E)} [g] :\Leftrightarrow \mu(f \leq g) = 1.$$

Man kann leicht nachvollziehen, dass diese Halbordnung wohldefiniert ist und folgende Identitäten gelten:

$$[f] \wedge [g] = [f \wedge g], \tag{3.4}$$
$$[f] \vee [g] = [f \vee g], \tag{3.5}$$
$$|[f]| = [|f|]. \tag{3.6}$$

Damit erhalten wir folgendes Resultat.

3.3.5 Satz. $(L^0(\Omega, E), \leq_{L^0(E)})$ *ist ein Vektorverband, und für* $p \in [1, \infty)$ *ist* $(L^p(\Omega, E), \|\cdot\|_{L^p(E)}, \leq_{L^0(E)})$ *ein Banachverband und ein Ideal in* $L^0(\Omega, E)$.

Beweis: Die Verbandseigenschaft der Räume $L^p(\Omega, E)$ $(p \in [1, \infty) \cup \{0\})$ folgt sofort aus (3.4) und (3.5).

Sei nun $p \in [1, \infty)$. Dass $(L^p(\Omega, E), \|\cdot\|_{L^p(\Omega,E)})$ ein Banachraum ist, haben wir schon in Satz 2.1.14 festgestellt. Dass $\|\cdot\|_{L^p(\Omega,E)}$ eine Verbandsnorm ist, folgt wie im Beweis der Ideal-Eigenschaft von $\mathcal{L}^p(\Omega, E)$. □

Für $p = 1$ gilt insbesondere dieses Resultat.

3.3.6 Lemma. *Der Operator*

$$\begin{aligned} \mathrm{Int} : L^1(\Omega, E) &\to E \\ [f] &\mapsto \int f d\mu \end{aligned}$$

ist wohldefiniert, linear, stetig mit Norm nicht größer als 1 und positiv.

Beweis: Die Wohldefiniertheit folgt unmittelbar aus Lemma 2.1.8. Die Linearität und die Abschätzung für die Norm aus Lemma 2.1.7. Da $S(\Omega, E)/N$ ein dichter Unterverband von $L^1(\Omega, E)$ ist, genügt es nach Lemma 3.1.15 die Positivät für $s \in S(\Omega, E)/N$ nachzuweisen und damit für $s \in S(\Omega, E)$. Sei also $s \in (S(\Omega, E))^+$, das heißt

$$s = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbb{1}_{A_i}$$

für $n \in \mathbb{N}$, $(A_i)_{1\leq i\leq n} \subset \mathcal{F}$ paarweise disjunkt sowie $(a_i)_{1\leq i\leq n} \in E^+$. Dann gilt

$$\mathrm{Int}[s] = \sum_{i=1}^{n} a_i \mu(A_i).$$

Wegen $a_i \in E^+$ $(1 \leq i \leq n)$ ist auch $\sum_{i=1}^{n} a_i \mu(a_i) \in E^+$ und damit die Aussage gezeigt. □

Das letzte Resultat in diesem Abschnitt ist zentral für das weitere Vorgehen in unserer Arbeit.

3.3.7 Satz. *Sei E ein ordnungsstetiger separabler Banachverband. Dann ist für $p \in [1, \infty)$ auch $L^p(\Omega, E)$ ordnungsstetig.*

Beweis: Nach Satz 3.2.4 genügt es zu zeigen, dass in $L^p(\Omega, E)$ jede nach unten gerichtete von unten beschränkte Folge konvergiert. Sei also $([f]_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^p(\Omega, E)$ mit $[f]_n \downarrow\geq_{L^0(E)} [g]$ für ein $[g] \in L^p(\Omega, E)$. Das heißt für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_{n+1} \leq f_n$ μ-f.ü. und $f_n \geq g$ μ-f.ü.. Da dies abzählbar viele Eigenschaften sind, können wir durch geeignete Wahl von Repräsentanten ohne Einschränkung davon ausgehen, dass

$$g(\omega) \leq f_{n+1}(\omega) \leq f_n(\omega) \tag{3.7}$$

sogar für alle $\omega \in \Omega$ gilt. Das heißt nichts anderes als $f_n \downarrow\geq g$ in $\mathcal{L}^p(\Omega, E)$ und damit in $\mathcal{L}(\Omega, E)$. Im Beweis von Lemma 3.3.3 haben wir gesehen, dass in diesem Fall ein $f \in \mathcal{L}(\Omega, E)$ existiert mit

$$f(\omega) = \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = \inf_{n\in\mathbb{N}} f_n(\omega) \quad (\omega \in \Omega).$$

Mit (3.7) gilt somit für alle $\omega \in \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$

$$g(\omega) \leq f(\omega) \leq f_n(\omega) \leq f_1(\omega). \tag{3.8}$$

Insbesondere erhalten wir daraus

$$|f(\omega)| \leq |g(\omega)| + |f_1(\omega)| \quad (\omega \in \Omega).$$

Wegen $g, f_1 \in \mathcal{L}^p(\Omega, E)$ und da $\mathcal{L}^p(\Omega, E)$ ein Ideal in $\mathcal{L}(\Omega, E)$ ist, folgt somit $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, E)$. Außerdem ergibt sich aus (3.8)

$$\|f_n(\omega) - f(\omega)\| \leq \|f_1(\omega) - g(\omega)\|.$$

Demnach erhalten wir aus dem Satz über majorisierte Konvergenz und der punktweisen Konvergenz

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_{L^p(\Omega,E)} = 0.$$

Dies ist gleichbedeutend mit $[f]_n \to [f]$ in $L^p(\Omega, E)$. $\square$

3.3.8 Notation. Im weiteren Verlauf der Arbeit schreiben wir für eine Äquivalenzklasse $[f] \in L^p(\Omega, E)$ stets lediglich f.

3.3.1 Hilbertraumwertige L^p-Räume

Sei $(K, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein separabler Hilbertraum, $\|\cdot\|$ die durch das Skalarprodukt induzierte Norm und $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von K.

3.3.9 Definition. Für $x \in K$ definiere die Projektionen

$$\begin{aligned} \pi_k : K &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \langle x, e_k\rangle \end{aligned}$$

und setze $x^k := \pi_k(x)$.

3.3.10 Definition. Auf K sei folgende Halbordnung gegeben:

$$x \leq_K y \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} :\ x^k \leq y^k \quad (x, y \in K).$$

Diese Halbordnung nennen wir die Halbordnung bzgl. der Basis $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Mit dieser Halbordnung wird K zu einem Banachverband, der sogar ordnungsstetig ist.

3.3.11 Satz. $(K, \|\cdot\|, \leq_K)$ *ist ein ordnungsstetiger Banachverband.*

Beweis: Dass oben definierte Halbordnung (3.1) und (3.2), erfüllt ist unmittelbar ersichtlich. Für $x, y \in K$ und $k \in \mathbb{N}$ definere

$$z^k := x^k \wedge y^k.$$

Dann gilt $|z^k| \leq |x^k| + |y^k|$ und damit ist

$$z := \sum_{k\in\mathbb{N}} z^k e_k$$

in K wohldefiniert. Aus der Definition der Ordnung $\leq_K$ folgt direkt

$$z = x \wedge y$$

in K. Genauso kann man $x \vee y$ definieren. K ist also ein Vektorverband und es gilt trivialerweise

$$|x| = \sum_{k \in \mathbb{N}} |x^k| e_k.$$

Sind nun $x, y \in K$ mit $|x| \leq_K |y|$, so erhält man daraus

$$\|x\|^2 = \sum_{k \in \mathbb{N}} |x^k|^2 \leq \sum_{k \in \mathbb{N}} |y^k|^2 = \|y\|^2.$$

$\| \cdot \|$ ist damit eine Vebandsnorm und $(K, \| \cdot \|, \leq_K)$ ein Banachverband.

Die Ordnungsstetigkeit folgt, da K reflexiv ist, aus Korollar 3.2.5. $\square$

Sofort aus Satz 3.3.7 erhält man folgendes Resultat für die Banachräume $L^p(\Omega, K)$.

3.3.12 Korollar. *Für $p \in [1, \infty)$ ist $L^p(\Omega, K)$ ein ordnungsstetiger Bnachverband.*

Die Ordnung in $L^0(\Omega, K)$ (und damit in $L^p(\Omega, K)$) lässt sich auch folgendermaßen charakterisieren.

3.3.13 Lemma. *Seien $f, g \in L^0(\Omega, K)$ dann gilt*

$$f \leq_{L^0(K)} g \Leftrightarrow \forall k \in \mathbb{N} : f^k \leq_{L^0(\mathbb{R})} g^k$$

Beweis: Seien $f, g \in L^0(\Omega, K)$ mit $f \leq_{L^0(K)} g$. Nach Definition von $\leq_{L^0(K)}$ ist dies gerade äquivalent zu $\mu(f \leq_K g) = 1$, was wiederum äquivalent zu $\mu(\forall k \in \mathbb{N} : f^k \leq g^k) = 1$ ist. Da $\mathbb{N}$ abzählbar gilt das genau dann, falls

$$\forall k \in \mathbb{N} : \mu(f^k \leq g^k) = 1.$$

Dies enspricht nach Definition der Ordnung in $L^0(\Omega)$ genau der behaupteten Äquivalenz. $\square$

Daraus ergibt sich unmittelbar folgendes Resultat.

3.3.14 Korollar. *Sei $F \subset L^p(\Omega, K)$ mit $\inf F = g$ für ein $g \in L^p(\Omega, K)$. Dann gilt $\inf F^k = g^k$ in $L^p(\Omega)$ für alle $k \in \mathbb{N}$, wobei $F^k = \{f^k : f \in F\}$ ist.*

3.4 Banachverbandwertige monotone Funktionen

Mit einem Abschnitt zu monotonen Funktionen auf Banachverbänden schließen wir den Grundlagenteil zu Banachverbänden ab. Im Folgenden sei $I = [a, b]$ für $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ ein abgeschlossenes Intervall und $(E, \|\cdot\|, \leq)$ ein Banachverband.

3.4.1 Definition. Eine Funktion $f : [a, b] \to E$ heißt monoton wachsend, falls

$$\forall t_1, t_2 \in [a, b] : t_1 \leq t_2 \Rightarrow f(t_1) \leq f(t_2)$$

und monoton fallend, falls

$$\forall t_1, t_2 \in [a, b] : t_1 \leq t_2 \Rightarrow f(t_1) \geq f(t_2)$$

3.4.2 Definition. Für eine Funtkion $f : I \to E$ definieren wir

$$D(f) := \{t \in I : f \text{ ist nicht stetig in } t\}$$

als die Menge aller Unstetigkeitsstellen von f.

Die folgenden Resultate gelten analog auch für monoton fallende Funktionen (betrachte $-f$ statt f).

3.4.3 Lemma. *Sei E ein ordnungsstetiger Banachverband und $f : I \to E$ monoton wachsend. Dann existiert für alle $t \in [a, b)$ der rechte Grenzwert*

$$f(t+) := \lim_{s \downarrow t} f(s)$$

und für alle $t \in (a, b]$ der linke Grenzwert

$$f(t-) := \lim_{s \uparrow t} f(s)$$

bzgl. der Normtopologie von E.

Beweis: Sei $f : I \to [a, b]$ monoton wachsend und $t \in [a, b)$ beliebig. Dann ist $\{f(s) : s > t\}$ nach unten gerichtet und von unten beschränkt. Da E ordnungsstetig ist, existiert $f(t+) = \inf\{f(s) : s > t\}$ und es gilt $\{\|f(s) - f(t+)\| : s > t\} \downarrow 0$ in $\mathbb{R}$. Das heißt gerade $f(t+) = \lim_{s \downarrow t} f(s)$. Die Existenz linker Ggenzwerte folgt analog. $\square$

3.4.4 Lemma. *Sei E ein ordnungsstetiger Banachverband und $f : I \to E$ monoton wachsend. Dann ist $D(f)$ abzählbar.*

Beweis: Nach Lemma 3.4.3 existieren für alle $t \in I$ die Genzwerte $f(t+)$ und $f(t-)$ (setzte $f(a-) = f(a)$ und $f(b+) = f(b)$). Das heißt die Menge der Unstetigkeitstellen ist gegeben durch

$$D(f) = \{t \in I : \|f(t+) - f(t-)\| > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{t \in I : \|f(t+) - f(t-)\| > \tfrac{1}{n}\}$$

Nehmen wir an, dass $D(f)$ überabzählbar ist, so muss also schon eine der Mengen aus obiger abzählbarer Vereinigung überabzählbar sein. Das heißt es existiert ein $\epsilon > 0$, so dass

$$D_\epsilon(f) = \{t \in [0, T] : \|f(t+) - f(t-)\| > \epsilon\}$$

überabzählbar ist. Als überabzählbare Menge besitzt $D_\epsilon(f)$ einen Häufungspunkt $t_0 \in I$. Sei $(t_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset D_\epsilon(f)$ eine Folge, die gegen t_0 konvergiert. Ohne Einschränkung gelte dabei $t_n \downarrow t_0$ (sonst betrachte eine Teilfolge oder eine Folge mit $t_n \uparrow t$). Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\|f(t_n+) - f(t_n-)\| > \epsilon$ nach Defintion von $D_\epsilon(f)$. Da f monoton wachsend ist, ergibt sich auch $f(t_n) \geq f(t_n+) > f(t_n-) \geq f(t_{n+1})$. Insgesamt erhalten wir also $\|f(t_n) - f(t_{n+1})\| > \epsilon$. Also konvergiert $(f(t_n))_{n \in \mathbb{N}}$ nicht gegen t_0, was im Widerspruch zu Lemma 3.4.3 steht. $\square$

Wir benötigen noch ein Resultat über monoton wachsende Funktionen mit Werten in einem Hilbertraum $(K, \langle \cdot, \cdot \rangle)$, wobei wir K mit der Halbordnung bezüglich einer Orthonormalbasis $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ austatten.

3.4.5 Lemma. *Sei $(K, \|\cdot\|)$ ein Hilbertraum ausgestattet mit der Halbordnung bezüglich einer Orthonormalbasis $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$ und $f : [a, b] \to K$ monoton wachsend. Dann gilt*

$$\sum_{t \in D(f)} \|\triangle f(t)\|^2 \leq \|f(a) - f(b)\|^2$$

mit $\triangle f_t := f(t+) - f(t-)$

Beweis: Nach Defintion der Ordnung auf K ist $f : [a, b] \to K$ genau dann monoton wachsend, falls $f^k : [a, b] \to \mathbb{R}$ für alle $k \in \mathbb{N}$ eine reelle monoton wachsende Funktion ist. Außerdem gilt $(\triangle f(t))^k = \triangle f^k(t)$. Für eine monoton wachsende Funtkion $g : [a, b] \to \mathbb{R}$, erhält man bekanntermaßen

$$\sum_{t \in D(f)} \triangle g(t) \leq g(a) - g(b).$$

Zusammen mit $\triangle f^k(t) \geq 0$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
\sum_{t\in D(f)} \|\triangle f(t)\|_K &= \sum_{t\in D(f)} \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\triangle f^k(t)\right)^2 \\
&= \sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{t\in D(f^k)} \left(\triangle f^k(t)\right)^2 \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(\sum_{t\in D(f^k)} \triangle f^k(t) \right)^2 \\
&\leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \left(f^k(T) - f^k(0)\right)^2 = \|f(b) - f(a)\|^2.
\end{aligned}$$

$\square$

4 Banachverbandwertige Submartingale

Mit den Resultaten aus den Kapiteln 1 und 2 sind wir nun in der Lage, stochastische Prozesse mit Werten in Banachverbänden zu untersuchen. Im gesamten Kapitel sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ ein vollständiger Wahrscheinlichkeitsraum und $(E, \|\cdot\|, \leq)$ ein separabler Banachverband.

4.1 Grundbegriffe

Die Halbordnung auf einem Banachverband erlaubt uns zusätzlich zu dem Begriff des E-wertigen Martingals auch den Begriff des E-wertigen Submartingals bzw. Supermartingals analog zum reellen Fall zu definieren.

Zunächst erhalten wir folgende wichtige Aussage über den bedingten Erwartungswert als Abbildung zwischen den Banachachverbänden $L^p(\Omega, E)$ und $L^p((\Omega, \mathcal{F}_0, P), E)$. Dabei sei $\mathcal{F}_0$ eine Unter-σ-Algebra von $\mathcal{F}$.

4.1.1 Lemma. *Für alle $p \in [1, \infty)$ ist der Operator $\mathrm{E}_p : L^p(\Omega, E) \to L^p((\Omega, \mathcal{F}_0, \mu), E)$, $X \mapsto \mathrm{E}[X|\mathcal{F}_0]$ positiv. Desweiteren gilt für alle $X \in L^1(\Omega, E)$*

$$\mathrm{E}[X_n^+|\mathcal{F}_0] \geq (\mathrm{E}[X_n|\mathcal{F}_0])^+$$

als Ungleichung in $L^1(\Omega, E)$.

Beweis: Wir haben in Lemma 2.3.2 schon gesehen, dass E_p linear und stetig ist. Nach Satz 2.1.14 liegt der Raum der (Äquivalenzklassen von) Stufenfunktionen $S(\Omega, E)/N$ dicht in $L^p(\Omega, E)$. Da E_p stetig ist, müssen wir die Positivität nach Lemma 3.1.15 nur für $s \in S(\Omega, E)$ zeigen. Sei also $s = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i} \in (L^p((\Omega, \mathcal{F}_0), E))^+$ eine Stufenfunktion mit $n \in \mathbb{N}$, $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \subset E^+$, $(A_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \mathcal{F}$ paarweise disjunkt. Wegen der Monotonie des reellen bedingten Erwartungswertes ist $E[\mathbb{1}_{A_i}|\mathcal{F}_0] \in (L^p((\Omega, \mathcal{F}_0, \mu)))^+$ $(1 \leq i \leq n)$, und mit $a_i \in E^+$ $(1 \leq i \leq n)$ folgt daraus unmittelbar

$$\mathrm{E}[s|\mathcal{F}_0] = \sum_{i=1}^n a_i \mathrm{E}[\mathbb{1}_{A_i}|\mathcal{F}_0] \in (L^p((\Omega, \mathcal{F}_0, P), E))^+ .$$

Auch die zweite Aussage beweisen wir zunächst für Stufenfunktionen. Sei $s = \sum_{i=1}^n a_i \mathbb{1}_{A_i}$ $(n \in \mathbb{N}$, $(a_i)_{1 \leq i \leq n} \subset E$,$(A_i)_{1 \leq i \leq n} \subset \mathcal{F}$ paarweise disjunkt). Dann gilt als Ungleichung auf dem Banchverband $L^1(\Omega, E)$

$$\begin{aligned}(\mathrm{E}[s_n|\mathcal{F}_0])^+ &= \left(\sum_{i=1}^n a_i \mathrm{E}[\mathbb{1}_{A_i}|\mathcal{F}_0]\right)^+ \\ &\leq \sum_{i=1} a_i^+ \mathrm{E}[\mathbb{1}_{A_i}|\mathcal{F}_0] \\ &= \mathrm{E}[s^+|\mathcal{F}_0].\end{aligned}$$

Sei nun $X \in L^1(\Omega, E)$ und $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Stufenfunktionen, die in $L^1(\Omega, E)$ gegen X konvergiert. Nach Lemma 3.1.13 ist $Y \mapsto Y^+$, als Abbildung von $L^1(\Omega, E)$ nach $L^1(\Omega, E)$ stetig. Da auch $E_1 : L^1(\Omega, E) \to L^1(\Omega, E)$ stetig ist, konvergiert in $L^1(\Omega, E)$ $(\mathrm{E}[s_n^+|\mathcal{F}_0])_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $\mathrm{E}[X^+|\mathcal{F}_0]$ und $\left((\mathrm{E}[s_n|\mathcal{F}_0])^+\right)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen $(\mathrm{E}[X|\mathcal{F}_0])^+$. Damit folgt die Aussage für beliebige $X \in L^1(\Omega, E)$ aus der Abgeschlossenheit des positiven Kegels in $L^1(\Omega, E)$. □

Sei nun $T \in [0, \infty)$ ein fester Zeithorizont, $J \in \{[0, T], \mathbb{N}\}$ und $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_j)_{j \in J}$ eine Filtrierung auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$.

4.1.2 Definition. Sei $X = (X_j)_{j \in \mathbb{N}}$ ein E-wertiger Prozess. Dann heißt X ein Sub- bzw. Supermartingal, falls

(i) X adaptiert ist,

(ii) $X_j \in L^1(\Omega, E)$ $(j \in J)$,

(iii) $E[X_{j_2}|\mathcal{F}_{j_1}] \geq X_{j_1}$ bzw. $E[X_{j_2}|\mathcal{F}_{j_1}] \leq X_{j_1}$ f.s. $(j_1, j_2 \in J$ mit $j_1 \leq j_2)$.

Außerdem benötigen wir noch den Begriff des rückwärts-Submartingals in diskreter Zeit.

4.1.3 Definition. Sei $(\mathcal{F}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine absteigende Familie von σ-Algebren auf $(\Omega, \mathcal{F})$, das heißt es gelte $\mathcal{F} \supset \mathcal{F}_1 \supset \mathcal{F}_2, \ldots$ und $X = (X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ein E-wertiger stochastischer Prozess. Dann heißt X ein rückwärts-Submartingal, falls

(i) X adaptiert ist,

(ii) $X_n \in L^1(\Omega, E)$ $(n \in \mathbb{N})$,

(iii) $E[X_n|\mathcal{F}_{n+1}] \geq X_{n+1}$ f.s. $(n \in \mathbb{N})$.

4.1.4 Definition. Ein E-wertiger Prozess X heißt positiv, falls $X_j \geq 0$ f.s. für alle $j \in J$ gilt.

Positive Submartingale spielen auf Banachverbänden eine besondere Rolle, da ihre Norm ein reelles Submartingal ist.

4.1.5 Lemma. *Sei X ein E-wertiges Submartingal. Dann gilt:*

(i) X^+ ist ein E-wertiges Submartingal.

(ii) $x'(X)$ ist für alle $x' \in (E')^+$ ein reellwertiges Submartingal.

(iii) $\|X\|$ ist ein reellwertiges Submartingal, falls X positiv ist.

Beweis: Sei X ein E-wertiges Submartingal und $j, j_1, j_2 \in J$ mit $j_1 \leq j_2$.

Zu (i): Dass X^+ adaptiert und integrierbar ist, folgt sofort aus der Stetigkeit der Abbildung $x \mapsto x^+$ und der Ungleichung $\|x^+\| \leq \|x\|$ für $x \in E$. Nach Lemma 4.1.1 gilt außerdem

$$\mathrm{E}[X_{j_2}^+|\mathcal{F}_{j_1}] \geq (\mathrm{E}[X_{j_2}|\mathcal{F}_{j_1}])^+ \geq X_{j_1}^+ \text{ f.s..}$$

Dabei wurde bei der zweiten Ungleichung die Submartingaleigenschaft von X benutzt und, dass für $x, y \in E$ mit $x \leq y$ auch $x^+ \leq y^+$ in E gilt.

Zu (ii): Sei $x' \in E'$. Die Adaptiertheit von $x'(X_j)$ erhält man unmittelbar aus der Stetigkeit von x', die Integrierbarkeit aus Lemma 2.1.9. Aus $E[X_{j_2}|\mathcal{F}_{j_1}] - X_{j_1} \in E^+$ f.s.. und aus $x' \in E'^+$ folgt $x'(E[X_{j_2}|\mathcal{F}_{j_1}] - X_{j_1}) \geq 0$ f.s.. $x'(X)$ ist also tatsächlich ein reellwertiges Submartingal.

Zu (iii): Sei nun X zusätzlich positiv. Die Adaptiertheit und Integrierbarkeit von $\|X\|$ sind offensichtlich gegeben. Aus

$$\mathrm{E}[X_{j_2}|\mathcal{F}_{j_1}] \geq X_{j_1} \geq 0 \text{ f.s.}$$

erhält man, da $\|\cdot\|$ eine Verbandsnorm ist und X positiv ist,

$$\|\mathrm{E}[X_{j_2}|\mathcal{F}_{j_1}]\| \geq \|X_{j_1}\| \text{ f.s..}$$

Mit Lemma 2.3.2 ergibt sich schließlich

$$\mathrm{E}[\|X_{j_2}\||\mathcal{F}_{j_1}] \geq \|\mathrm{E}[X_{j_2}|\mathcal{F}_{j_1}]\| \geq \|X_{j_1}\| \text{ f.s..}$$

$\|X\|$ ist damit ein Submartingal. □

Für E-wertige Submartingale in diskreter Zeit (d.h $J = \mathbb{N}$) benötigen wir noch den Satz über optionales Stoppen. Für reelle Submartingale ist dieses Resultat wohlbekannt und der Beweis für den E-wertigen Fall funktioniert vollkommen analog, weshalb wir hier auf ihn verzichten.

4.1.6 Satz. *Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein E-wertiges Submartingal. Sind $\tau, \sigma \in \mathcal{T}_{\mathbb{N}}$ mit $N \geq \tau \geq \sigma$ f.s. für ein $N \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\mathrm{E}[X_\tau | \mathcal{F}_\sigma] \geq X_\sigma.$$

Außerdem ist für eine beliebige Stoppzeit $\tau : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ $(X_{n\wedge\tau})_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls ein Submartingal.

4.2 Konvergenz banachverbandwertiger Submartingale in diskreter Zeit

In diesem Abschnit betrachten wir eine diskrete Filtrierung $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und setzten ohne Einschränkung $\mathcal{F} = \sigma\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n\right)$ vorraus.

Unser Ziel ist es, ein Konvergenzresultat für positive L^1-beschränkte Submartingale mit Werten in einem Banchverband mit (RNE) herzuleiten. Für ein E-wertiges Submartingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachte die Bedingungen

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[X_n^+] \leq y \quad \text{für ein } y \in E, \tag{4.1}$$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[\|X_n^+\|] < \infty. \tag{4.2}$$

Für $E = \mathbb{R}$ entsprechen diese beiden Bedingungen gerade

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[X_n^+] < \infty. \tag{4.3}$$

Es ist wohlbekannt, dass jedes reellwertige Submartingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$, das (4.3) erfüllt, punktweise f.s. gegen eine integrierbare Zufallsvariable konvergiert. Weder (4.1) noch (4.2) genügen jedoch, um dieses Resultat auch für E-wertige Submartingale zu erhalten, selbst wenn E ein Banachverband mit (RNE) ist. Dazu beachte zunächst, dass (4.1) in einem Banachverband mit (RNE) bereits aus (4.2) folgt.

4.2.1 Lemma. *Sei E ein Banachverband mit (RNE) und $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein E-wertiges Submartingal. Falls X* (4.2) *erfüllt, so auch* (4.1).

Beweis: Für ein Submartingal $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist nach Lemma 4.1.5 $(X_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls ein Submartingal. Damit ist $((\mathrm{E}[X_n^+]))_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge, die normbeschränkt ist, falls X (4.2) erfüllt. Ist E ein Banachverband mit (RNE) so konvergiert diese monoton wachsende normbeschränkte Folge in E und nach Lemma 3.1.14 ist der Grenzwert gerade das Supremum bezüglich der Halbordnung auf E. □

Wir geben nun ein Beispiel eines Submartingals mit Werten in einem Banchverband mit (RNE) an, das (4.2) erfüllt und sogar in $L^2(\Omega, E)$ beschränkt - also uniform integrierbar - ist, aber nicht punktweise f.s. konvergiert. Die Idee zu diesem Beispiel stammt dabei aus [SW76] (S.466 Example 3.1).

4.2.2 Beispiel. Sei $(K, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ ein separabler Hilbertraum, $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine ONB von K und $\leq$ die Ordnung bzgl. der Basis $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Für $i \in \mathbb{N}$ definiere $\Omega_i = [0,1)$, $\mathcal{B}_i = \mathcal{B}([0,1))$. λ_i sei das Lebesgue-Maß auf $[0,1)$. Definiere nun den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ durch $\Omega := \prod_{i\in\mathbb{N}} \Omega_i$, $\mathcal{F} := \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \mathcal{B}_i$, $P := \bigotimes_{i\in\mathbb{N}} \lambda_i$.

Auf diesem Wahrscheinlichkeitsraum definieren wir für $i \in \mathbb{N}$ folgende K-wertige Zufallsvariablen

$$Y_i(\omega) := \sum_{l=0}^{2^{i-1}-1} \mathbb{1}_{[\frac{l}{2^{i-1}}, \frac{l+1}{2^{i-1}})}(\omega_i) e_{2^{i-1}+l} \quad (\omega \in \Omega).$$

und betrachten die Filtrierung $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch $F_n := \sigma(Y_1, \dots, Y_n)$. Offensichtlich ist Y_{n+1} unabhängig von $\mathcal{F}_n$ und

$$\|Y_i(\omega)\| = 1$$

für alle $i \in \mathbb{N}$ und $\omega \in \Omega$. Weiterhin sezte für $n \in \mathbb{N}$

$$A_n := \sum_{i=1}^{n} Y^i \quad \text{und} \quad X_n := \mathrm{E}[A^n] - Y_n.$$

Dann ist $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein K-wertiges Submartingal. Denn für alle $n \in \mathbb{N}$ ist X_n ist per Definition $\mathcal{F}_n - \mathcal{B}(E)$ messbar und als Summe integrierbarer

Zufallsvariablen auch integrierbar. Aus der Unabhängigkeit von Y_{n+1} von $\mathcal{F}_n$ bekommt man darüberhinaus

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_{n+1}|\mathcal{F}_n] &= \sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{E}[Y_i] - \mathrm{E}[Y_{n+1}|\mathcal{F}_n] \\
&= \sum_{i=1}^{n+1} \mathrm{E}[Y_i] - \mathrm{E}[Y_{n+1}] \\
&= \mathrm{E}[A_n] \geq \mathrm{E}[A_n] - Y_n = X_n, \quad \text{f.s..}
\end{aligned}$$

Zusätzlich ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sogar in $L^2(\Omega, K)$ beschränkt. Dazu betrachte, dass für alle $i \in \mathbb{N}$

$$\mathrm{E}[Y_i] = \sum_{l=0}^{2^{i-1}-1} 2^{1-i} e_{2^{i-1}+l} \tag{4.4}$$

und damit

$$\|\mathrm{E}[Y_i]\|^2 = \sum_{l=0}^{2^{i-1}-1} 2^{2(1-i)} = 2^{1-i}$$

gilt. Insbesondere erhalten wir mit dem Satz von Pythagoras für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}
\|X_n\|^2 &= \sum_{i=1}^{n-1} \|\mathrm{E}[Y_i]\|^2 + \|\mathrm{E}[Y_n] - Y_n\|^2 \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \|\mathrm{E}[Y_i]\|^2 + \|\mathrm{E}[Y_n]\|^2 - 2\langle \mathrm{E}[Y_n], Y_n\rangle + \|Y_n\|^2.
\end{aligned}$$

Somit ergibt sich für die L^2-Norm von X_n

$$\mathrm{E}[\|X_n\|^2] = \sum_{i=1}^{n-1} \|\mathrm{E}[Y_i]\|^2 - \|\mathrm{E}[Y_n]\|^2 + \mathrm{E}[\|Y_n\|^2] = \sum_{i=0}^{n-2} 2^{-i} - 2^{-(n-1)} + 1.$$

Also gilt tatsächlich $\sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_n\|_{L^2(\Omega,K)} < \infty$. Wegen $\|X_n^+\|_{L^2(\Omega,K)} \leq \|X_n\|_{L^2(\Omega,K)}$ erfüllt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch (4.2).

Jedoch konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für kein $\omega \in \Omega$. Aus (4.4) folgt nämlich einerseits

$$\lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[A_n] = \sum_{i\in\mathbb{N}} \sum_{l=0}^{2^{i-1}-1} 2^{1-i} e_{2^{i-1}+l}$$

bzgl. der Normtopologie auf K. Andererseits ist nach Definition der $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $\omega \in \Omega$ und $n \in \mathbb{N}$

$$\|Y_{n+1}(\omega) - Y_n(\omega)\|_K^2 = 2.$$

Daher konvergiert die Folge $(Y_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ für kein $\omega \in \Omega$. $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert somit als Differenz einer konvergenten und einer divergenten Folge ebenfalls nicht.

Dieses Beispiel zeigt, dass Bedingung (4.2) nicht genügt, um fast sicher punktweise Konvergenz eines E-wertigen Submartingals zu erhalten. Darüberhinaus haben wir gesehen, dass für diese Konvergenz noch nicht einmal L^2-Beschränktheit und damit uniforme Integrierbarkeit hinreichend ist.

Wir werden in diesem Abschnitt zeigen, dass die Positivität zusammen mit (4.2) - dies ist in diesem Fall gerade die Beschränkheit in $L^1(\Omega, E)$ - ein hinreichendes Kriterium für die punktweise fast sichere Konvergenz eines E-wertigen Submartingals sind, falls E die (RNE) besitzt. Dieses Resultat findet man zum Beispiel in [Egg84] (S.72 Theorem III.2.2). Wir geben hier aber einen etwas anderen Beweis, der sich an den Beweisen in [Egg84] für die punktweise fast sichere Konvergenz von Martingalen mit Werten in einem Banachachraum orientiert (S.27, Theorem II.2.2.1 für u.i. Martingale und II.2.4.8 für L^1-beschränkte Martingale).

Dabei werden wir folgendermaßen vorgehen: Zunächt betrachten wir zu einem positiven E-wertigen Submartingal $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils die reellen Submartingale $x'(X)$ für $x' \in (E')^+$. Falls X nun in $L^1(\Omega, E)$ beschränkt ist, gilt das offensichtlich auch für $x'(X)$. Das heißt diese reellen Submartingale konvergieren jeweils fast sicher. Die (RNE) erlaubt uns, diesen Grenzwert als $x'(X_\infty)$ für eine E-wertige Zufallsvariable X_∞ zu identifizieren. Mit einem Resultat von Neveu (siehe [Nev75]) über abzählbare Familien reeller Submartingale zusammen mit dem Renormisierungs-Satz 3.2.8 können wir dann aus der fast sicheren Konvergenz von $x'(X)$ gegen $x'(X_\infty)$ für alle $x' \in (E')^+$ jene von X gegen X_∞ in E folgern.

Beginnen werden wir mit einem funktionalanalytischen Resultat.

4.2.3 Lemma. *Sei $X \in \mathcal{L}(\Omega, E)$ mit $x'(X) \geq 0$ f.s. für alle $x' \in (E')^+$. Dann ist $X \geq 0$ f.s..*

Beweis: Sei $\overline{B_1(0)}$ die Einheitskugel in E'. Nach dem Banach-Alaouglou-Theorem ist $\overline{B_1(0)}$ schwach-$*$-kompakt. Da E separabel ist, ist die schwach-$*$-Topolgie auf $\overline{B_1(0)}$ metrisierbar. Damit ist $\overline{B_1(0)}$ versehen mit der schwach-$*$-Topologie als kompakter metrischer Raum separabel . $\overline{B_1(0)} \cap (E')^+$ versehen mit der schwach-$*$-Topologie ist als Teilmenge eines separablen metrischen Raumes ebenfalls separabel. Das heißt es existiert eine abzählbare Menge $D \subset \overline{B_1(0)} \cap (E')^+$, so dass für alle $x' \in \overline{B_1(0)} \cap (E')^+$ eine Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ existiert mit $x'_n(x) \to x'(x)$ $(n \to \infty,\ x \in E)$. Fixiere eine solche Menge D.

Sei nun $X \in \mathcal{L}(\Omega, E)$ eine Zufallsvariable wie im Lemma. Für alle $x' \in D$ sei $N_{x'}$ eine Nullmenge mit $x'(X(\omega)) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega \setminus N_{x'}$. Setze $N_D = \bigcup_{x' \in D} N_{x'}$. Da D abzählbar ist, ist N_D ebenfalls eine Nullmenge. Ist nun $x' \in \overline{B_1(0)} \cap (E')^+$ beliebig, existiert eine Folge $(x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D$ mit $x'_n(X(\omega)) \to x'(X(\omega))$ $(n \to \infty, \omega \in \Omega)$. Für $\omega \in \Omega \backslash N_D$ gilt insbesondere

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} x'_n(X(\omega)) = x'(X(\omega)).$$

Also ist $x'(X(\omega)) \geq 0$ für alle $x' \in \overline{B_1(0)} \cap (E')^+$ und $\omega \in \Omega \setminus N_D$. Für beliebige $x' \in (E')^+$ folgt diese Aussage durch Skalierung. Es gilt also $x'(X(\omega)) \geq 0$ für alle $x' \in (E')^+$ und $\omega \in \Omega \setminus N_D$. Mit Satz 3.1.18 erhält man daraus $X(\omega) \geq 0$ für alle $\omega \in \Omega \setminus N_D$. □

4.2.4 Korollar. *Sei $X \in L^1(\Omega, E)$ mit*

$$\int_B X dP \geq 0 \quad (B \in \mathcal{F}).$$

Dann ist $X \geq 0$ f.s..

Beweis: Aus $\int_B X dP \geq 0$ für alle $B \in \mathcal{F}$ ergibt sich mit Lemma 2.1.9

$$0 \leq x'\left(\int_B X dP\right) = \int_B x'(X) dP$$

für alle $x' \in (E')^+$ und $B \in \mathcal{F}$. Damit ist $x'(X) \geq 0$ f.s. für alle $x' \in (E')^+$. Nach Lemma 4.2.3 ist also auch $X \geq 0$ f.s.. □

Für reelle Submartingale gilt folgender Satz.

4.2.5 Satz. *Sei I eine abzählbare Indexmenge und $\{(X_n^i)_{n\in\mathbb{N}} : i \in I\}$ eine Familie reeller Submartingale mit*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega \sup_{i\in I} (X_n^i)^+ dP < \infty.$$

Dann existieren $(X^i)_{i\in I} \subset L^1(\Omega)$, so dass für alle $i \in I$ $(X_n^i)_{n\in\mathbb{N}}$ f.s. gegen X^i und $(\sup_{i\in I} X_n^i)$ f.s. gegen $\sup_{i\in\mathbb{N}} X^i$ konvergiert.

Beweis: Siehe [Nev75] □

Zusammen mit dem Renormierungs-Satz 3.2.8 erhalten wir nun ein zentrales Lemma über positive E-wertige Submartingale.

4.2.6 Lemma. *Sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein E-wertiges positives Submartingal mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[\|X_n\|] < \infty$. Existiert ein $X_\infty \in L^1(\Omega, E)$, so dass für alle $x' \in X'$ $(x'(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher gegen $x'(X_\infty)$ konvergiert, so konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher gegen X_∞ bzgl. der Normtopologie auf E.*

Beweis: Seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und X_∞ wie im Lemma. Beachte zunächst, dass für alle $x' \in (E')^+$ folgendes gilt:

$$0 \leq \lim_{n\to\infty} x'(X_n) = x'(X) \text{ f.s..}$$

Nach Lemma 4.2.3 ist daher $X_\infty \geq 0$ f.s..

Da E die (RNE) besitzt, ist E nach Korollar 3.2.5 ordnungsstetig. Nach Satz 3.2.8 existiert eine zu $\|\cdot\|$ äquivalente Verbandsnorm $\tilde{\|}\cdot\tilde{\|}$ und eine abzählbare Menge $D \subset (E')^+$, welche die Eigenschaften (i) und (ii) aus Satz 3.2.8 erfüllen. Dann ist nach Lemma 4.1.5 (ii) $x'(X)$ für alle $x' \in D$ ein reelles Submartingal, das ebenfalls positiv ist, und wir erhalten aus Satz 3.2.8

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[\sup_{x'\in D} x'(X_n)] = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[\tilde{\|}X_n\tilde{\|}] < \infty,$$

wobei wir $X_n = |X_n|$ f.s. ($n \in \mathbb{N}$) verwendet haben. Wegen $\lim_{n\to\infty} x'(X_n) = x'(X_\infty)$ f.s. für alle $x' \in D$ folgt aus Satz 4.2.5 außerdem

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \tilde{\|}X_n\tilde{\|} &= \lim_{n\to\infty} \sup_{x'\in D} x'(X_n) \\ &= \sup_{x'\in D} x'(X_\infty) = \tilde{\|}X_\infty\tilde{\|}, \text{ f.s.,}\end{aligned}$$

wobei in der letzten Gleichheit $X_\infty \geq 0$ f.s verwendet wurde. Insgesamt ergibt sich also $\|X_n\| \to \|X_\infty\|$ f.s. und $x'(X_n) \to x'(X_\infty)$ f.s. ($n \to \infty$, $x' \in D$). Wieder mit Satz 3.2.8 folgt daraus $X_n \to X_\infty$ f.s. ($n \to \infty$) in E wie behauptet. □

Nun können wir ein Konvergenzresultat für positive uniform integrierbare E-wertige Submartingale beweisen.

4.2.7 Satz. *Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega, E)$ ein E-wertiges positives uniform integrierbares Submartingal. Dann existiert ein $X_\infty \in L^1(\Omega, E)$ mit $X_n \to X$ $(n \to \infty)$ f.s. und in $L^1(\Omega, E)$.*

Beweis: Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein E-wertiges positives uniform integrierbares Submartingal. Nach Lemma 2.1.23 genügt es die Konvergenz fast sicher nachzuweisen.

Für $n \in \mathbb{N}$ definiere zunächst $\mu_n : \mathcal{F} \to E$ durch

$$\mu_n(B) = \int_B X_n dP \quad (B \in \mathcal{F}).$$

Dann ist $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Satz 2.1.31 eine Familie σ-additiver P-stetiger Vektormaße auf $\mathcal{F}$. Ist $A \in \mathcal{F}_{n_0}$ für ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so folgt für alle $n \geq n_0$ aus der Submartingaleigenschaft von X

$$\mu_{n+1}(A) = \int_A X_{n+1} dP \geq \int_A X_n dP = \mu_n(A).$$

Außerdem ist X u.i. also insbesondere beschränkt in $L^1(\Omega, E)$, das heißt

$$\left\| \int_A X_n dP \right\| \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[\|X_n\|] < \infty.$$

Demnach existiert für alle $A \in \mathcal{A}_\infty := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $(\mu_n(A))_{n\geq n_0}$ eine monoton wachsende normbeschränkte Folge in E ist. Nach Bemerkung 3.2.7 existiert also $\lim_{n\to\infty} \mu_n(A)$ für alle $A \in \mathcal{A}_\infty$.

Sind nun $B \in \mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A}_\infty)$ und $\epsilon > 0$ beliebig, so existiert wegen der uniformen Integrierbarkeit von X nach Lemma 2.1.20 ein $\delta = \delta(\epsilon) > 0$, so dass für alle $M \in \mathcal{F}$ mit $P(M) \leq \delta$

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_M \|X_n\| dP < \frac{\epsilon}{4}.$$

Wähle ein solches δ. Wegen $\mathcal{F} = \sigma(\mathcal{A}_\infty)$ existiert weiterhin ein $A = A(B, \delta) \in A_\infty$ mit $P\left((B \setminus A) \dot\cup (A \setminus B)\right) \leq \delta$. Insbesondere ergibt sich für dieses A also

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{(B\setminus A)\dot\cup(A\setminus B)} \|X_n\| dP < \frac{\epsilon}{4}$$

Schließlich wähle $n_0 = n_0(A, \epsilon)$ mit $\|\mu_n(A) - \mu_m(A)\| < \frac{\epsilon}{2}$ für alle $n, m \geq n_0$. Indem wir die triviale Gleichheit $B = ((B \setminus A) \dot\cup A) \setminus (A \setminus B)$ ausnutzen, bekommen wir schließlich für alle $n, m \geq n_0$

$$\begin{aligned}
\|\mu_n(B) - \mu_m(B)\| &= \|\mu_n(B \setminus A) + \mu_n(A) - \mu_n(A \setminus B) \\
&\qquad - (\mu_m(B \setminus A) + \mu_m(A) - \mu_m(A \setminus B))\| \\
&\leq 2 \sup_{l \in \mathbb{N}} \int_{(B \setminus A) \dot\cup (A \setminus B)} \|X_l\| dP + \|\mu_n(A) - \mu_m(B)\| \\
&< 2\frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.
\end{aligned}$$

Das heißt $(\mu_n(B))_{n \in \mathbb{N}}$ ist eine Cauchyfolge in E und damit konvergent. Wir können also $\mu : \mathcal{F} \to E$ durch $\mu(B) = \lim_{n \to \infty} \mu_n(B)$ defnieren. Es ist unmittelbar klar, dass μ ein Vektormaß ist. Außerdem ist die Variation von μ endlich, denn für eine endliche paarweise disjunkte Zerlegung $(B_i)_{1 \leq i \leq N} \subset \mathcal{F}$ von Ω erhält man

$$\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{N} \|\mu(B_i)\| &= \sum_{i=1}^{N} \lim_{n \to \infty} \left\| \int_{B_i} X_n dP \right\| \\
&\leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \mathrm{E}[\|X_n\|].
\end{aligned}$$

Ist außerdem $\epsilon > 0$ dann existiert wegen der uniformen Integrirbarkeit von X ein $\delta > 0$ so, dass für alle $B \in \mathcal{F}$ aus $P(B) < \delta$

$$\|\mu(B)\| \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_B \|X_n\| dP < \epsilon$$

folgt. Das heißt μ ist P-stetig und nach Lemma 2.1.29 damit auch σ-additiv.

Insgesamt ist μ ein σ-additves P-stetiges Vektormaß mit endlicher Variation. Aus der (RNE) folgt somit die Existenz eines $X_\infty \in L^1(\Omega, E)$ mit

$$\mu(B) = \int_B X_\infty dP, \quad (B \in \mathcal{F}).$$

Wir zeigen nun, dass dieses X_∞ der fast sichere Grenzwert von $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist. Dazu beachte zunächst, dass für alle $x' \in (E')^+$ $x'(X)$ ein reelles u.i. Submartingal ist. Das heißt es existiert jeweils eine reelle Zufallsvariable $x_\infty(x') \in L^1(\Omega, E)$ mit $x'(X_n) \to x_\infty(x')$ $(n \to \infty)$ f.s. und in $L^1(\Omega)$. Insbesondere gilt für alle $B \in \mathcal{F}$

$$\begin{aligned}
\int_B x_\infty(x') &= \lim_{n \to \infty} \int_B x'(X_n) dP \\
&= x' \left(\lim_{n \to \infty} \int_B X_n dP \right) = \int_B x'(X_\infty) dP.
\end{aligned}$$

Das heißt für alle $x' \in (E')^+$ ergibt sich

$$\lim_{n\to\infty} x'(X_n) = x_\infty(x') = x'(X_\infty) \text{ f.s..}$$

Nach Lemma 4.2.6 folgt daraus tatsächlich $X_n \to X_\infty$ $(n \to \infty)$ f.s.. □

Für positive $L^1(\Omega, E)$-beschränkte aber nicht unbedingt uniform integrierbare Submartingale können wir die fast sichere Konvergenz durch Lokalisierung beweisen.

4.2.8 Satz. *Sei $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega, E)$ ein positives E-wertiges Subamrtingal mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[\|X_n\|] \leq C$ für ein $C > 0$. Dann existiert ein $X_\infty \in L^1(\Omega, E)$ mit $X_n \to X_\infty$ f.s. $(n \to \infty)$.*

Beweis: Sei X ein Submartingal wie im Lemma. Für $l \in \mathbb{N}$ definiere die Stoppzeit $\sigma_l : \Omega \to \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ durch $\sigma_l := \inf\{n \in \mathbb{N} : \|X_n\| > l\}$, wobei wir $\inf \emptyset := \infty$ setzen. Da X ein positives Submartingal ist, ist nach Lemma 4.1.5 (iii) $\|X\|$ ein reelles Submartingal. Das heißt für alle $\lambda > 0$ gilt

$$P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_n\| > \lambda\right) \leq \frac{1}{\lambda} \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[\|X_n\|] \leq \frac{C}{\lambda}.$$

Daraus folgt

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{l\in\mathbb{N}} \{\sigma_l = \infty\}\right) &= \lim_{l\to\infty} P\left(\sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_n\| \leq l\right) \\ &\geq 1 - \lim_{l\to\infty} \frac{1}{l} C = 1. \end{aligned}$$

das heißt $P\left(\bigcup_{l\in\mathbb{N}} \{\sigma_l = \infty\}\right) = 1$. Aus Satz 4.1.6 folgt, dass für alle $l \in \mathbb{N}$ $X^l := (X_{n\wedge\sigma_l})_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls ein Submartinal ist.

Sei nun $l \in \mathbb{N}$ beliebig. Da $\|X\|$ ein Submartingal ist, ergibt sich aus Satz 4.1.6 $\mathrm{E}[\|X_n\|] \geq \mathrm{E}[\|X_{n\wedge\sigma_l}\|]$ $(n \in \mathbb{N})$. Auf $\{\sigma_l < \infty\}$ ist $\|X_n\| \leq l < \|X_{\sigma_l}\|$ für alle $n < \sigma_l$. Daher gilt auf dieser Menge

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_{n\wedge\sigma_l}\| = \|X_{\sigma_l}\| = \lim_{n\to\infty} \|X_{n\wedge\sigma_l}\|.$$

Mit dem Lemma von Fatou erhalten wir daraus

$$\begin{aligned} \int_{\{\sigma_l<\infty\}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_{n\wedge\sigma_l}\| dP &\leq \liminf_{n\to\infty} \int_{\{\sigma_l<\infty\}} \|X_{n\wedge\sigma_l}\| dP \\ &\leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[\|X_{n\wedge\sigma_l}\|] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[\|X_n\|]. \end{aligned}$$

Auf $\{\sigma_l = \infty\}$ ist

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_{n\wedge\sigma_l}\| = \sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_n\| \leq l.$$

Insgesamt bekommen wir also

$$\begin{aligned}\int_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_{n\wedge\sigma}\| dP &= \int_{\{\sigma_l=\infty\}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_{n\wedge\sigma_l}\| dP + \int_{\{\sigma_l<\infty\}} \sup_{n\in\mathbb{N}} \|X_{n\wedge\sigma_l}\| dP \\ &\leq l + \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[\|X_n\|] < \infty\end{aligned}$$

Damit ist X^l für alle $l \in \mathbb{N}$ ein uniform integrierbares positives Submartingal. Nach Satz 4.2.7 existiert daher eine Nullmenge $N \in \mathcal{F}$, so dass $(X_n^l(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $\omega \in \Omega\backslash N$ und $l \in \mathbb{N}$ eine Cauchyfolge in E ist. Ist $\omega \in \{\sigma_l = \infty\}\backslash N$ für ein $l \in \mathbb{N}$, aso ist $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}} = (X_n^l(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Cauchyfolge, also konvergent in E. Wegen $P\left(\bigcup_{l\in\mathbb{N}}\{\sigma_l = \infty\}\right) = 1$, konvergiert $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ somit fast sicher gegen eine Zuffalsvariable $X_\infty \in \mathcal{L}(\Omega, E)$. Dass X_∞ auch integrierbar ist, erhält man schließlich mit dem Lemma von Fatou aus der $L^1(\Omega, E)$-Beschränktheit von X:

$$\mathrm{E}[\|X_\infty\|] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathrm{E}[\|X_n\|] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[\|X_n\|] < \infty.$$

□

Zuletzt beweisen wir in diesem Abschnitt ein Konvergenzresulat über rückwärts-Submartingale.

4.2.9 Satz. *Sei $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine absteigende Folge von σ-Algebren auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ und $X = (X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein positives E-wertiges rückwärts-Submartingal. Dann existiert eine $\mathcal{F}_{-\infty}$–$\mathcal{B}(E)$ messbare Zufallsvariable $X_\infty \in L^1((\Omega, \mathcal{F}_{-\infty}, P), E)$ mit $X_n \to X$ $(n \to \infty)$ f.s. und in $L^1(\Omega, E)$. (Dabei ist $\mathcal{F}_{-\infty} := \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{F}_n$.)*

Beweis: Sei X ein rückwärts-Submartingal wie im Lemma. Analog zu Lemma 4.1.5 (iii) folgt, dass $\|X\|$ ein reelles rückwärts-Submartingal ist. Jedes positive reelle rückwärts-Submartingal ist nun uniform integrierebar (siehe [KS05] S.15, Problem 1.3.11), das heißt $\|X\|$ und damit X ist uniform integrierbar. Zu $n \in \mathbb{N}$ definiere $\mu_n : \mathcal{F}_{-\infty} \to E$ durch

$$\mu_n(B) = \int_B X_n dP \quad (B \in \mathcal{F}_{-\infty}).$$

Da X ein rückwärts-Submartingal ist, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ und $B \in \mathcal{F}_{-\infty}$

$$\mu_n(B) = \int_B X_n dP \geq \int_B X_{n+1} dP = \mu_{n+1}(B)$$

und $\|\mu_n(B)\| \leq \mathrm{E}[\|X_n\|] \leq \mathrm{E}[\|X_1\|]\|]$. Das heißt für alle $B \in \mathcal{F}_{-\infty}$ ist $(\mu_n(B))_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende normbeschränkte Folge in E. Damit existiert $\lim_{n\to\infty} \mu_n(B)$ für alle $B \in \mathcal{F}$ nach Korollar 3.2.7 (beachte, dass $(-\mu_n(B))_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend und normbeschränkt ist). Die Abbildung $\mu : \mathcal{F}_{-\infty} \to E,\ B \mapsto \lim_{n\to\infty} \mu_n(B)$ ist offensichtlich ein Vektormaß auf $(\Omega, \mathcal{F}_{-\infty})$. Wie im Beweis von Satz 4.2.7 ergibt sich aus der uniformen Integrierbarkeit von X, dass μ P-stetig, σ-additiv und von endlicher Variation ist. Das heißt es existiert eine Zufallsvariable $X_\infty \in L^1((\Omega, \mathcal{F}_{-\infty}), E)$ mit

$$\mu(B) = \int_B X_\infty dP \quad (B \in \mathcal{F}_{-\infty}).$$

Genau wie im Beweis von Satz 4.2.7 erhalten wir $X_n \to X_\infty$ $(n \to \infty)$ f.s. und in $L^1(\Omega, E)$. □

4.3 Banachverbandwertige Submartingale in kontinuierlicher Zeit

In diesem Abschnitt fixieren wir ein $T \in [0, \infty)$ und betrachten eine kontinuierliche normale Filtrierung $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Dabei gehen wir ohne Einschränkung von $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$ aus.

Später in der Arbeit wird es zentral sein, zu einem gegebenem banachverbandwertigen Supermartingal $(X_t)_{t\in[0,T]}$ den Prozess $X_{t+} := \lim_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s$ zu definieren. Für reellwertige Submartingale ist dies stets möglich, wie folgender Satz zeigt (siehe [KS05] S.16, Proposition 1.3.14).

4.3.1 Satz. *Sei $(X_t)_{t\in[0,T]}$ ein reelles Submartingal. Dann existiert eine Nullmenge $N \subset \mathcal{F}$, so dass für alle $\omega \notin N$ die Grenzwerte $X_{t+}(\omega) = \lim_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)$ bzw. $X_{t-}(\omega) = \lim_{s\uparrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)$ für alle $t \in [0, T)$ bzw. $t \in (0, T]$ existieren.*

Desweiteren ist der Prozess X^r definiert durch

$$X^r_t(\omega) := \begin{cases} X_{t+}(\omega) & \omega \notin N \\ 0 & \omega \in N \end{cases}, \quad X^r_T := X_T$$

ein càdlag Submartingal, mit $X^r_t \geq X_t$ f.s. für alle $t \in [0, T]$.

Dass dies für banachverbandwertige Submartingale im allgemeinen nicht gilt, zeigt folgendes Beispiel.

4.3.2 Beispiel. Sei $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ der Wahrscheinlichkeitsraum aus Beispiel 4.2.2. Auch die Filtrierung $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$, die Zufallsvariablen $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und das Submartingal $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien definiert wie in Beispiel 4.2.2. In kontinuierlicher Zeit $t \in [0,1]$ definiere nun die Filtrierung $(\bar{\mathcal{F}}_t)_{t\in[0,1]}$ durch

$$\bar{F}_t := \begin{cases} \mathcal{F}_n, & t \in [1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1}), \\ \mathcal{F} & t = 1 \end{cases}$$

und die Zufallsvariablen $(\bar{X}_t)_{t\in[0,1]}$ durch

$$\bar{X}_t := \begin{cases} X_n, & t \in [1-\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n+1}), \\ \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[Y_i], & t = 1. \end{cases}$$

Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Submartingal bzgl. der Filtrierung $(\mathcal{F}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist und

$$X_n = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}[Y_i] - Y_n \leq \sum_{i\in\mathbb{N}} \mathrm{E}[Y_i]$$

gilt, ist $(\bar{X}_t)_{t\in[0,1]}$ ein Submartingal in kontinuierlicher Zeit bzgl. der Filtrierung $(\bar{\mathcal{F}}_t)_{t\in[0,T]}$. $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert aber für kein $\omega \in \Omega$ in E. Damit existiert auch der Grenzwert $\lim_{s\uparrow T, s\in\mathbb{Q}} \bar{X}_s(\omega)$ für kein $\omega \in \Omega$.

Wir werden sehen, dass man für positive E-wertige Submartingale ein zu Satz 4.3.1 analoges Resultat erhält. Bewiesen wird dies unter Verwendung der Konvergenzsätze 4.2.8 und 4.2.9. Dabei folgen wir hauptsächlich der Argumentation in [Fra85]. Zunächst benötigen wir einige Begriffe zu Stoppzeiten.

4.3.3 Definition. Sei $\tau \in \mathcal{T}$ eine Stoppzeit. Wir sagen eine Folge von Stoppzeiten $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$

(i) kündigt τ an, falls $\tau_n \leq \tau_{n+1} < \tau$ für alle $n \in \mathbb{N}$ außer auf $\{\tau = 0\}$ und $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau$ gilt,

(ii) ruft τ ab, falls $\tau_n \geq \tau_{n+1} > \tau$ für alle $n \in \mathbb{N}$ außer auf $\{\tau = T\}$ und $\lim_{n\to\infty} \tau_n = \tau$ gilt.

Weiterhin definiere $\mathcal{T}(\mathbb{Q})$ als die Menge aller Stoppzeiten $\tau \in \mathcal{T}$, die nur endlich viele Werte in $[0,T] \cap \mathbb{Q}$ annehmen.

4.3.4 Lemma. *Für alle Stoppzeiten $\tau \in \mathcal{T}$ existiert eine Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}(\mathbb{Q})$, die τ abruft.*

Beweis: Siehe [RY99] (S.45, Proposition I.4.11). $\square$

Aus [Fra85] sind für uns die folgenden Sätze wichtig, deren Beweis wir hier nicht ausführen.

4.3.5 Satz. *Sei $(X_t)_{t\in[0,T]} \subset L^1(\Omega, E)$ ein E-wertiger Prozess, dann gelten folgende Aussagen:*

(i) Ist τ eine Stoppzeit, so dass für alle Folgen $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}(\mathbb{Q})$, die τ abrufen $\lim_{n\to\infty} X_{\tau_n}$ fast sicher existiert, dann existiert eine Nullemge $N_\tau \in \mathcal{F}$, so dass für alle $\omega \in \Omega \setminus N_\tau$ der Grenwert $\lim_{s\downarrow\tau(\omega), s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)$ existiert.

(ii) Sei τ eine Stoppzeit, die von einer Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}(\mathbb{Q})$ angekündigt wird. Existiert für alle Folgen $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}(\mathbb{Q})$, die τ ankündigen, $\lim_{n\to\infty} X_{\tau_n}$ fast sicher, dann existiert eine Nullemge $N_\tau \in \mathcal{F}$, so dass für alle $\omega \in \Omega \setminus N_\tau$ der Grenwert $\lim_{s\uparrow\tau(\omega), s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)$ existiert.

Beweis: Siehe [Fra85] (S.986, Theorem 2.2). $\square$

4.3.6 Satz. *Sei $(X_t)_{t\in[0,T]}$ ein E-wertiger Prozess. Dann gelten folgende Aussagen:*

(i) Existiert für jede Stoppzeit τ der Grenwert $\lim_{s\downarrow\tau(\omega), s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega \setminus N_\tau$ mit $P(N_\tau = 0)$, dann existiert für alle $t \in [0, T)$ auch der Grenzwert $\lim_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s$, f.s..

(ii) Es existiere für jede Stoppzeit τ, die von einer Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}_\mathbb{Q}$ angekündigt wird, der Grenwert $\lim_{s\uparrow\tau(\omega), s\in\mathbb{Q}} X_s(\omega)$ für alle $\omega \in \Omega \setminus N_\tau$ mit $P(N_\tau = 0)$. Darüberhinaus existiere für alle $t \in [0, T)$ der rechte Grenzwert $\lim_{s\downarrow t} X_s$, f.s.. Dann existiert für alle $t \in (0, T]$ auch der Grenzwert $\lim_{s\uparrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s$, f.s..

Beweis: Siehe [CS] (S.90 und S.93). $\square$

Bevor wir zu dem zentralen Satz dieses Kapitels kommen, benötigen wir noch zwei Lemmas, über deterministische Funktionen $f : [0, T] \to E$.

4.3.7 Lemma. *Sei $f : [0, T] \to E$ eine Funktion, so dass für alle $t \in [0, T)$ der Grenzwert $f(t+) := \lim_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} f(s)$ existiert. Dann ist die Funktion $f^r : [0, T] \to V$ definiert durch*

$$f^r(t) := f(t+) \quad (t \in [0, T)), \quad f^r(T) = f(T)$$

rechtsstetig.

Beweis: In der Situation des Lemmas seien $t \in [0, T)$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Wegen $f^r(t) = \lim_{s \downarrow t, s \in \mathbb{Q}} f(s)$, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\forall s \in (t, t+\delta) \cap \mathbb{Q} : \|f^r(t) - f(s)\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sei nun $v \in (t, t+\delta)$ beliebig. Dann existiert analog ein $\delta_v \in (0, t+\delta-v)$ mit

$$\forall s \in (v, v+\delta_v) \cap \mathbb{Q} : \|f(s) - f^r(v)\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Wähle nun ein $s \in (v, v+\delta_v) \cap \mathbb{Q} \subset (t, t+\delta) \cap \mathbb{Q}$. Dann folgt aus den obigen Abschätzungen offensichtlich

$$\|f^r(t) - f^r(v)\| \leq \|f^r(t) - f(s)\| + \|f(s) - f^r(v)\| < \epsilon.$$

Da $t \in [0, T]$ und $\epsilon > 0$ beliebig waren, haben wir gezeigt

$$\forall t \in [0, T) \; \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \; \forall v \in (t, t+\delta) : \|f^r(t) - f^r(v)\| < \epsilon.$$

f^r ist also tatsächlich rechtsstetig. □

4.3.8 Lemma. *Sei $f : [0, T] \to E$ rechtsstetig und für alle $t \in (0, T]$ existiere der Grenzwert $f(t-) := \lim_{s \uparrow t, s \in \mathbb{Q}} f(s)$. Dann ist f càdlag.*

Beweis: Sei $f : [0, T] \to E$ wie im Lemma. Sei $t \in (0, T]$ und $\epsilon > 0$ beliebig. Nach Voraussetzung existiert ein $\delta \in (0, t)$ mit

$$\forall s \in (t-\delta, t) \cap \mathbb{Q} : \|f(t-) - f(s)\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Sei nun $v \in (t-\delta, t)$ beliebig. Da f rechtsstetig ist exsitiert ein $\delta_v \in (0, t-v)$ mit

$$\forall s \in (v, v+\delta_v) : \|f(s) - f(v)\| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Wähle nun ein beliebiges $s \in (v, v+\delta_v) \cap \mathbb{Q} \subset (t-\delta, t) \cap \mathbb{Q}$. Dann gilt.

$$\|f(t-) - f(v)\| \leq \|f(t-) - f(s)\| + \|f(s) - f(v)\| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Damit ist $f(t-) = \lim_{s \uparrow t} f(s)$ $(t \in (0, T])$. Demnach besitzt f linke Grenzwerte und ist, weil die Rechststetigkeit vorausgesetzt war, càdlag. □

Zunächst erhalten wir daraus folgenden Satz über rechtsstetige positive Submartingale.

4.3.9 Lemma. *Sei $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ ein rechtsstetiges positives E-wertiges Submartingal. Dann ist X càdlag.*

Beweis: Sei $\tau \in \mathcal{T}$ eine Stoppzeit, so dass eine Folge $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{T}(\mathbb{Q})$ existiert, die τ ankündigt. Nach Satz 4.1.6 ist $(X_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}}$ dann ein positives Submartingal bzgl. der Filtrierung $(\mathcal{F}_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Außerdem folgt aus der Positivität von $(X_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ sowie Satz 4.1.6

$$\begin{aligned} \mathrm{E}[\|X_T\|] &= \mathrm{E}\left[\mathrm{E}[\|X_T\||F_{\tau_n}]\right] \\ &\geq \mathrm{E}\left[\|\mathrm{E}[X_T|\mathcal{F}_{\tau_n}]\|\right] \\ &\geq \mathrm{E}[\|X_{\tau_n}\|]. \end{aligned}$$

Das postitive Submartingal $(X_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist also in $L^1(\Omega, E)$ beschränkt. Nach Satz 4.2.7 existiert damit ein $X_\infty^\tau \in L^1(\Omega, E)$ mit $X_{\tau_n} \to X_\infty^\tau$ $(n \to \infty)$ f.s.. Da X nach Vorausetzung rechtsstetig ist, also insbesondere rechte Grenzwerte besitzt, folgt damit aus Satz 4.3.5 (ii) und Satz 4.3.6 (ii), dass für alle $t \in (0, T]$ der Grenzwert $\lim_{s\uparrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s$ existiert, f.s.. Mit Lemma 4.3.8 ergibt sich schließlich, dass X f.s. linke Grenzwerte besitzt und somit càdlag ist. $\square$

Schließlich kommen wir zum zentralen Resultat dieses Kapitels.

4.3.10 Satz. *Sei $X = (X_t)_{t\in[0,T]}$ ein positives E-wertiges Submartingal. Dann existiert für alle $t \in [0, T)$ der Grenzwert $X_{t+} := \lim_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s$, f.s. und der Prozess X^r definiert durch*

$$X_t^r := X_{t+} \quad (t \in [0, T)), \quad X_T^r := X_T$$

ist ein postives càdlag Submartingal mit $X_t^r \geq X_t$ $(t \in [0, T])$ f.s..

Beweis: Sei X ein positives E-wertiges Submartingal. Wir zeigen zunächst, dass die Grenzwerte X_{t+} existieren. Dazu sei $\tau \in \mathcal{T}$ eine Stoppzeit und $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{T}(\mathbb{Q})$ eine τ abrufende Folge. Nach Satz 4.1.6 ist $(X_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ein positives E-wertiges rückwärts-Submartingal bzgl. der absteigenden Folge von σ-Algebren $(\mathcal{F}_{\tau_n})_{n\in\mathbb{N}}$. Aus Satz 4.2.9 folgt die Existenz eines $X_\infty^\tau \in L^1(\Omega, E)$ mit $X_{\tau_n} \to X_\infty^\tau$ $(n \to \infty)$ f.s.. Da dies für alle Stoppzeiten $\tau \in \mathcal{T}$ gilt, existiert nach Satz 4.3.5 (i) und Satz 4.3.6 (i) für alle $t \in [0, T)$ der Grenzwert $\lim_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} X_s$, f.s.. Der Prozess X^r ist also wohldefiniert.

Nun zeigen wir, dass X^r ein Submartingal ist. Sei dazu $t \in [0, T)$ beliebig und $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (t, T] \cap \mathbb{Q}$ eine Folge mit $t_n \downarrow t$. Dann ist $(X_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ein positives rückwärts-Submartingal bezüglich $(\mathcal{F}_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$, das f.s. gegen X_t^r konvergiert. Als fast sicherer Grenzwert positiver Funktionen ist X_t^r selbst fast sicher positiv. Außerdem ist X_t^r für alle $s > t$ als fast sicherer Grenzwert $\mathcal{F}_s - \mathcal{B}(E)$ messbarer Funktionen selbst $\mathcal{F}_s - \mathcal{B}(E)$ messbar, da die Filtrierung normal also insbesondere vollständig ist. Aus der Rechtsstetigkeit der Filtrierung folgt somit die $\mathcal{F}_t - \mathcal{B}(E)$ Messbarkeit von X_t^r. Weiter beachte, dass $(X_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ als positives rückwärts-Submartingal uniform integrierbar ist (siehe Beweis von Lemma 4.2.9). Damit folgt $X_t^r \in L^1(\Omega, E)$ aus Lemma 2.1.23. X^r ist also adaptiert und integrierbar. Fixiere nun ein $s \in [0, t)$ und eine Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (s, t) \cap \mathbb{Q}$ mit $s_n \downarrow s$. Auch $(X_{s_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist dann ein positives rückwärts-Subamrtingal. Da $(X_{t_n})_{n\in\mathbb{N}}$ und $(X_{s_n})_{n\in\mathbb{N}}$ damit beide uniform integrierbar sind, folgt aus Lemma 2.1.23, dass $X_{t_n} \to X_t^r$ und $X_{s_n} \to X_s^r$ $(n \to \infty)$ sogar in $L^1(\Omega, E)$ gilt. Da der bedingte Erwartungswert als Abbildung von $L^1(\Omega, E)$ nach $L^1(\Omega, E)$ stetig ist (siehe Lemma 2.3.2), ergibt sich daraus $\mathrm{E}[X_{t_n}|F_s] \to \mathrm{E}[X_t^r|\mathcal{F}_s]$ und $\mathrm{E}[X_{s_n}|F_s] \to \mathrm{E}[X_s^r|\mathcal{F}_s]$ $(n \to \infty)$ in $L^1(\Omega, E)$. Wegen $t_n > s_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und da X ein Submartingal ist, bekommt man schließlich (als Ungleichung in $L^1(\Omega, E)$)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[X_t^r|\mathcal{F}_s] &= \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[X_{t_n}|\mathcal{F}_s] \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[X_{s_n}|\mathcal{F}_s] \\
&= \mathrm{E}[X_s^r|F_s] = X_s^r,
\end{aligned}$$

wobei in der letzten Zeile die bereits gezeigte Adaptiertheit von X^r ausgenutzt wurde. Insgesamt ist X^r tatsächlich ein Submartingal.

Die Rechtsstetigkeit von X^r folgt direkt aus der Definition von X^r und Lemma 4.3.7. Daher ist X^r nach Lemma 4.3.9 als rechtsstetiges Submartingal auch càdlag.

Für die Ungleichung $X_t^r \geq X_t$ betrachte wieder ein $t \in [0, T)$ und ein Folge $(t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset (t, T] \cap \mathbb{Q}$ mit $t_n \downarrow t$. Aus der $L^1(\Omega, E)$-Konvergenz $X_{t_n} \to X_t^r$ $(n \to \infty)$ und der Submartingaleigenschaft von X erhalten wir für alle $B \in \mathcal{F}_t$

$$\int_B X_t^r = \lim_{n\to\infty} \int_B X_{t_n} \geq \int_B X_t dP.$$

Dies hat wegen der $\mathcal{F}_t - \mathcal{B}(E)$ Messbarkeit von X^r nach Korollar 4.2.4 $X_t^r \geq X_t$ f.s. zur Folge. □

5 Minimale Superlösung einer hilbertraumwertigen BSDE

In diesem Kapitel werden wir die Existenz und Eindeutigkeit einer minimalen Superlösung einer bestimmten Klasse von stochastischen Rückwärts-Differentialgleichungen mit Werten in einem Hilbertraum beweisen. Wir orientieren uns dabei an einem Artikel von M. Drapeau, G. Heyne und M. Kupper, die in [DHK13] ein ähnliches Problem für den reellwertigen Fall gelöst haben.

5.1 Grundlagen und Notation

Im folgenden seien $(H, \langle\cdot,\cdot\rangle_H)$ und $(K, \langle\cdot,\cdot\rangle_K)$ separable Hilberträume und $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Orthonormalbasis von K. Wir statten K mit der Halbordnung bezüglich $(e_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus.

Fixiere außerdem einen vollständigen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, einen endlichen Zeithorizont $T \in [0,\infty)$ und einen I_H-zylindrischen Wiener Prozess $W = (W_t)_{t\in[0,T]}$ auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (I_H sei dabei die Identität auf H). $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ sei die von W erzeugte normale Filtrierung auf $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (siehe Satz 2.4.17) und ohne Einschränkung sei $\mathcal{F} = \mathcal{F}_T$.

Alle Ungleichungen und Gleichungen von K-wertigen oder reellen Zufallsvariablen gelten in diesem Kapitel ohne weitere Erwähnung jeweils fast sicher.

Für einen Generator $g : \Omega_T \times K \times \mathcal{S}_2(H,K) \to K$, welcher $\mathrm{Prog} \otimes \mathcal{B}(K) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{S}_2(K;H)) - \mathcal{B}(K)$ messbar ist, sowie eine Endbedingung $\xi \in \mathcal{L}(\Omega, K)$ suchen wir nun Prozesse $(Y_t, Z_t)_{t\in[0,T]}$ mit Werten in $K \times \mathcal{S}_2(K;H)$, welche folgende Ungleichung in K für alle $0 \le s \le t \le T$ erfüllen:

$$\begin{aligned} Y_s - \int_s^t g_u(Y_u, Z_u)\mathrm{d}u + \int_s^t Z_u \mathrm{d}W_u \geq Y_t, \\ Y_T \geq \xi. \end{aligned} \tag{5.1}$$

$\mathcal{S}(K)$ sei der Raum aller adaptierten K-wertigen càdlag Prozesse. $(Y,Z) \in \mathcal{S}(K) \times L^2_{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_2(H,K))$, welche (5.1) erfüllen, nennen wir Superlösungen von (5.1). Dabei heißt Y der Werteprozess, Z der Kontrollprozess.

Definiere damit

$$\mathcal{A}(\xi,g) := \Big\{(Y,Z) \in \mathcal{S}(K) \times L^2_{\mathcal{F}}(\mathcal{S}_2(H,K)) : (Y,Z) \text{ erfüllt } (5.1)\Big\}.$$

Unser Ziel wird es sein, zu zeigen, dass unter geeigneten Vorausetzungen an g und ξ eine minimale Superlösung von (5.1) existiert. Eine Superlösung $(\bar{Y},\bar{Z}) \in \mathcal{A}(\xi,g)$ heißt dabei minimal, falls für alle $(Y,Z) \in \mathcal{A}(\xi,g)$ $Y_t \geq \bar{Y}_t$ f.s. für alle $t \in [0,T]$ gilt.

Wir beginnen die Diskussion von (5.1) mit einigen einführenden Bemerkungen.

5.1.1 Bemerkung. Nach Wahl der Filtrierung $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ gilt mit Satz 2.4.36, dass jede $\mathcal{F}_0 - \mathcal{B}(K)$ messbare Funktion fast sicher konstant ist. Insbesondere ist für eine Superlösung $(Y,Z) \in \mathcal{A}(\xi,g)$ Y_0 fast sicher konstant.

5.1.2 Bemerkung. Seien $(Y,Z) \in A(\xi,g)$. Setzt man $\tilde{Y} := Y\mathbb{1}_{[0,T)}+\xi\mathbb{1}_{\{T\}}$ so ist $\tilde{Y}$ ebenfalls càdlag und für $0 \leq s \leq t < T$ erfüllt $(\tilde{Y},Z)$ offensichtlich (5.1). Wegen $\tilde{Y}(\omega) = Y(\omega)$ λ-f.ü. für alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$\int_s^T g_u(\tilde{Y}_u,Z_u)du = \int_s^T g_u(Y_u,Z_u)du.$$

Da außerdem $Y_T \geq \xi = \tilde{Y}_T$ gegeben ist, erfüllt $(\tilde{Y},Z)$ (5.1) für alle $s \in [0,T]$ und $t = T$. Das heißt $(\tilde{Y},Z)$ ist eine Superlösung mit $\tilde{Y}_T = \xi$. Wir nehmen deshalb im folgenden ohne Einschränkung an, dass jede Superlösung $Y_T = \xi$ erfüllt.

5.1.3 Bemerkung. Sind $(Y,Z) \in \mathcal{A}(\xi,g)$, so folgt aus (5.1) die Existenz einer $\mathcal{F}$-Nullmenge N, so dass (Y,Z) (5.1) für alle $\omega \in \Omega\setminus N$ und $s,t \in [0,T]\cap\mathbb{Q}\cup\{T\}$ mit $s \leq t$ erfüllen. Aus der Rechtsstetigkeit von Y und der Stetigkeit von $\int g(Y,Z)du$, $\int ZdW$ sowie der Abgeschlossenheit des positiven Kegels in K folgt daraus wiederum, dass (Y,Z) für alle $\omega \in \Omega\setminus N$ (5.1) für alle $0 \leq s \leq t \leq T$ erfüllt. Insbesondere gilt für alle Stoppzeiten $\sigma \leq \tau$ mit $\sigma \leq \tau \leq T$

$$Y_\sigma - \int_\sigma^\tau g_u(Y_u,Z_u)du + \int_\sigma^\tau Z_u \mathrm{d}W_u \geq Y_\tau. \tag{5.2}$$

Zunächst wollen wir die K-wertige Ungleichung (5.1) für Prozesse $(Y, Z) \in \mathcal{S}(K) \times L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H, K))$ auf abzählbar viele reelle Ungleichungen für eine Familie von Prozessen $(Y^k, Z^k)_{k \in \mathbb{N}}$ reduzieren. Dazu betrachte folgende Bemerkung.

5.1.4 Bemerkung. Für $Z \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H, K))$ und $k \in \mathbb{N}$ setze $Z^k := \pi^k \circ Z$ (π^k wie in Defintion 3.3.9). Nach Bemerkung 2.4.4 ist $Z^k \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, H')$ und

$$\|Z\|^2_{L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H,K))} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \|Z^k\|_{L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, H')}.$$

Außerdem ergibt sich aus Lemma 2.4.30

$$\left\langle \int_0^t Z_s dW_s, e_k \right\rangle_K = \int_0^t Z^k_s dW_s.$$

Insbesondere ist $\int Z^k dW \in \mathcal{M}^2_T(\mathbb{R})$.

Außerdem werden wir uns auf Generatoren mit folgender Eigenschaft beschränken.

5.1.5 Definition. Ein Generator g von 5.1 heißt kompatibel (mit der Basis $(e_k)_{k \in \mathbb{N}}$), falls für alle $k \in \mathbb{N}$ Prog $\otimes \mathcal{B}(\mathbb{R}) \otimes \mathcal{B}(H') - \mathcal{B}(\mathbb{R})$ messbare Funktionen $g^k : \Omega_T \times \mathbb{R} \times H' \to \mathbb{R}$ existieren, so dass für alle $(y, z) \in K \times \mathcal{S}_2(H, K)$, $k \in \mathbb{N}$

$$\langle g_\bullet(Y, Z), e_k \rangle_K = g^k_\bullet(y^k, z^k) \tag{5.3}$$

gilt.

Ist nun g ein kompatibler Generator, $\xi \in \mathcal{L}(\Omega, K)$ eine Endbedingung und $(Y, Z) \in \mathcal{S}(K) \times L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H, K))$ zulässig, so folgt aus obigen Überlegungen, dass $(Y, Z) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ dazu äquivalent ist, dass für alle $k \in \mathbb{N}$ die Prozesse $(Y^k, Z^k) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}) \times L^2_{\mathcal{F}}(\Omega, H')$ die reellwertige Ungleichung

$$\begin{aligned} Y^k_s - \int_s^t g^k_u(Y^k_u, Z^k_u) \mathrm{d}u + \int_s^t Z^k_u \mathrm{d}W_u \geq Y^k_t, \quad 0 \leq s \leq t \leq T, \\ Y^k_T = \xi^k. \end{aligned} \tag{5.4}$$

erfüllen.

5.2 Eigenschaften von $\mathcal{A}(\xi, g)$

Wir fixieren nun einen Generator g und eine Endbedingung ξ, die folgende Bedingungen erfüllen:

(H1.1) Für alle $(Y, Z) \in \mathcal{S}(K) \times L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H, K))$ ist $t \mapsto g_t(Y_t, Z_t) \in L^1([0, T], K)$ f.s..

(H1.2) g ist kompatibel.

(H1.3) Für alle $(\omega, t, y, z) \in \Omega_T \times K \times \mathcal{S}_2(K, H)$ ist $g_t(y, z) \geq 0$.

(H1.4) $\xi \in L^1(\Omega, K)$.

(H1.5) $\mathcal{A}(\xi, g) \neq \emptyset$.

5.2.1 Bemerkung. H1.4 stellt sicher, dass das Bochner Integral $\int_s^t g_u(Y_u, Z_u)$ fast sicher existiert. Dies ist etwa gegeben, wenn $(t, y, z) \mapsto g_t(y, z)$ fast sicher beschränkt ist. Da Int : $L^1([0, T], K) \to K$ ein positiver Operator ist, folgt aus Hypothese (H1.3) stets $\int_s^t g_u(Y_u, Z_u)du \geq 0$ und nach Lemma 2.3.2 auch $\mathrm{E}\left[\int_s^t g_u(Y_u, Z_u)du|\mathcal{F}_t\right] \geq 0$ für alle $(Y, Z) \in \mathcal{S}(K) \times L^2_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathcal{S}_2(H, K))$ und $0 \leq s \leq t \leq T$.

Wir erhalten folgendes Lemma.

5.2.2 Lemma. *Sei $(Y, Z) \in \mathcal{A}(\xi, g)$. Dann ist Y ein K-wertiges Supermartingal und für alle $t \in [0, T]$ gilt folgende Abschätzung in K.*

$$Y_0 + \int_0^t Z_s \mathrm{d}W_s \geq Y_t \geq \mathrm{E}[\xi|\mathcal{F}_t]. \tag{5.5}$$

Beweis: Wir beginnen mit dem Beweis von (5.5). Da $\int Z\mathrm{d}W$ ein Martingal, g positiv und Y adaptiert ist, erhält man aus (5.1) für alle $t \in [0, T]$

$$Y_t = \mathrm{E}[Y_t|\mathcal{F}_t] \geq -\mathrm{E}\left[\int_t^T Z_u \mathrm{d}W_u|\mathcal{F}_t\right] + E[Y_T|\mathcal{F}_t] = \mathrm{E}[\xi|\mathcal{F}_t] \tag{5.6}$$

und ebenso

$$Y_t \leq Y_0 - \int_0^t g_u(Y_u, Z_u)\mathrm{d}u + \int_0^t Z_u \mathrm{d}W_u \leq Y_0 + \int_0^t Z_u \mathrm{d}W_u.$$

Nun zur Supermartingal-Eigenschaft von Y. Y ist per Definition adaptiert und aus den vorigen Abschätzungen folgt sofort

$$|Y_t| \leq \left|\int_0^t Z_s \mathrm{d}W_s\right| + |Y_0| + |\mathrm{E}[\xi|F_t]| \quad (t \in [0,T]). \tag{5.7}$$

$\int_0^t Z_s dW_s$, $Y_0, \mathrm{E}[\xi|\mathcal{F}_t] \in L^1(\Omega, K)$ gilt für alle $t \in [0,T]$ nach Voraussetzung (beachte, dass Y_0 fast sicher konstant ist). Da $L^1(\Omega, E)$ ein Ideal in $L^0(\Omega, E)$ ist, folgt aus (5.7) somit auch $Y_t \in L^1(\Omega, K)$ für alle $t \in [0,T]$.

Darüberhinaus ergibt sich aus (5.1) mit der Positivität von g für $0 \leq s \leq t \leq T$ und der Martingal-Eigenschaft von $\int ZdW$:

$$\mathrm{E}[Y_t|\mathcal{F}_s] \leq Y_s + \mathrm{E}\left[\int_s^t Z_u \mathrm{d}W_u|\mathcal{F}_s\right] = Y_s.$$

Damit ist Y also tatsächlich ein Supermartingal.

□

5.2.3 Bemerkung. Für $t \in [0,T]$ setze

$$\mathcal{A}_t(\xi, g) := \{Y_t : (Y,Z) \in \mathcal{A}(\xi, g)\}.$$

Nach Lemma 5.2.2 ist $\mathcal{A}_t(\xi, g)$ in $L^1(\Omega, K)$ durch $\mathrm{E}[\xi|\mathcal{F}_t]$ von unten beschränkt. Da $L^1(\Omega, K)$ nach Korollar 3.3.12 ordnungsstetig und damit insbesondere ordnungsvollständig (siehe Theorem 3.2.4) ist, existiert

$$\hat{\mathcal{E}}_t^g(\xi) := \inf \mathcal{A}_t(\xi, g)$$

in $L^1(\Omega, K)$ für alle $t \in [0,T]$.

5.2.4 Lemma. *Sei $(Y,Z) \in \mathcal{A}(\xi, g)$. Dann hat Y die Darstellung*

$$Y = Y_0 - A + \int ZdW, \tag{5.8}$$

wobei A ein vorhersagbarer monoton wachsender càdlag Prozess mit $A_0 = 0$ ist. Dabei ist A bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmt. Insbesondere ist Z eindeutig bestimmt (als Element von $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H,K))$).

Beweis: Da (Y,Z) (5.1) für alle $0 \leq s \leq T$ f.s. erfüllen, ist K definiert durch

$$K_t := -Y_t + Y_0 - \int_0^t g_u(Y_u, Z_u)du + \int_0^t Z_u dW_u$$

ein monoton wachsender Prozess mit $K_0 = 0$. Da Y câdlag ist, ist auch K câdlag. Damit gilt (5.8) für

$$A_t := K_t + \int_0^t g_u(Y_u, Z_u)du.$$

Wegen der Positivität von g ist auch A monoton wachsend. Offensichtlich ist A auch câdlag und es gilt $A_0 = 0$. Da $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ von einem I_H-zylindrischen Wiener Prozess erzeugt wird, besitzt bezüglich dieser Filtrierung jedes reelle lokale Martingal eine stetige Version (siehe Satz 2.4.36). Nach [RY99] (S. 173, Korollar IV.5.7) ist jeder câdlag Prozess sogar vorhersagbar. Das heißt A erfüllt die geforderten Eigenschaften.

Sei nun $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Da Y ein K-wertiges Supermartingal ist, ist für beliebiges $k \in \mathbb{N}$ Y^k ein reelles Supermartingal. Nach der Doob-Meyer-Zerlegung (siehe [Pro04] S.114 Theorem III.13) existiert ein monoton wachsender vorhersagbarer Prozess $\tilde{A}^k$ mit $\tilde{A}_0^k = 0$ und ein lokales Martingal $\tilde{M}^k$, mit

$$Y^k = Y_0^k - \tilde{A}^k + \tilde{M}^k.$$

Diese Darstellung ist eindeutig bis auf Modifikationen. Das heißt A^k ist eine Version von $\tilde{A}^k$ und M^k eine von $\int Z^k dW$. Da bzgl. der gewählten Filtrierung jedes lokale Martingal eine stetige Version besitzt und Y^k câdlag ist, besitzt auch $\tilde{A}^k$ eine câdlag Version $\bar{A}^k$. Da A^k eine Version von $\bar{A}^k$ ist und beide Prozesse câdlag sind, sind sie nach Lemma 2.2.3 ununterscheidbar. Da für alle $k \in \mathbb{N}$ A^k also bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig ist, gilt dies wie behauptet auch für A. Damit ist aber auch $\int ZdW$ bis auf Ununterscheidbarkeit eindeutig bestimmt. Und aus der Ito-Isometrie folgt, dass Z als Element von $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H, K))$ eindeutig ist. $\square$

Nach Bemerkung 5.2.3 existiert $\hat{\mathcal{E}}_t^g(\xi) = \inf \mathcal{A}_t(\xi, g)$ für alle $t \in [0, T]$. Mit den folgenden beiden Lemmas zeigen wir, dass $\mathcal{A}_t(\xi, g)$ auch nach unten gerichtet ist und somit dieses Infimum durch eine Folge in $\mathcal{A}_t(\xi, g)$ von oben approximiert werden kann.

5.2.5 Lemma. *Für $k \in \mathbb{N}$ und ein $N \in \mathbb{N}$ sei $\tau^k : \Omega \to [0, T]$ eine Stoppzeit und $(B^{i,k})_{1\le i\le N} \subset \mathcal{F}_{\tau^k}$ eine Partition von Ω. Betrachte weiter Prozesse $(Y^i, Z^i) \subset \mathcal{A}(\xi, g), (i = 1, \dots, n)$ mit $Y^{1,k}_{\tau^k} \mathbb{1}_{B^{i,k}} \ge Y^{2,k}_{\tau^k} \mathbb{1}_{B^{i,k}}$ für alle $k \in \mathbb{N}, i = 1, \dots, N$. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ definiere dann*

$$\bar{Y}^k = Y^{1,k}\mathbb{1}_{[0,\tau^k)} + \sum_{i=1}^{N} Y^{i,k}\mathbb{1}_{[\tau^k,T]}\mathbb{1}_{B^{i,k}},$$
$$\bar{Z}^k = Z^{1,k}\mathbb{1}_{[0,\tau^k]} + \sum_{i=1}^{N} Z^{i,k}\mathbb{1}_{(\tau^k,T]}\mathbb{1}_{B^{i,k}},$$

sowie

$$\bar{Y} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{Y}^k e_k, \tag{5.9}$$
$$\bar{Z} = \sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{Z}^k e_k. \tag{5.10}$$

Dann gilt $(\bar{Y},\bar{Z}) \in \mathcal{A}(\xi,g)$.

Beweis: Zunächst zeigen wir $(\bar{Y},\bar{Z}) \in \mathcal{S}(K) \times L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H,K))$. Offensichtlich ist $\bar{Y}^k$ für alle $k \in \mathbb{N}$ adaptiert. Da die Prozesse $\mathbb{1}_{[0,\tau^k]}$, $\mathbb{1}_{(\tau^k,T]}$ offensichtlich rechtsstetige Pfade haben und nach Lemma 2.2.7 damit progressiv-messbar sind, ist $\bar{Z}^k x$ für alle $x \in H$ progressiv-messbar. Damit ist nach Korollar 2.2.9 auch $\bar{Z}^k$ progressiv-messbar. Als nächstes beachte, dass für alle $(\omega,t) \in \Omega_T$

$$|\bar{Y}^k_t(\omega)| \le |Y^{1,k}_t(\omega)| + \sum_{i=1}^{N} |Y^{i,k}_t(\omega)|$$
$$\|\bar{Z}^k_t(\omega)\|_{H'} \le \|Z^{1,k}_t(\omega)\|_{H'} + \sum_{i=1}^{N} \|Z^{i,k}_t(\omega)\|_{H'},$$

also

$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} |\bar{Y}^k_t(\omega)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \le \|Y^1_t(\omega)\|_K + \sum_{i=1}^{N} \|Y^i_t(\omega)\|_K$$
$$\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} \|\bar{Z}^k_t(\omega)\|^2_{H'}\right)^{\frac{1}{2}} \le \|Z^1_t(\omega)\|_{\mathcal{S}_2(H;K)} + \sum_{i=1}^{N} \|Z^i_t(\omega)\|_{\mathcal{S}_2(H;K)}$$

gilt. Damit konvergieren die Reihen (5.9) bzw. (5.10) für alle $(\omega,t) \in \Omega$ absolut und Y bzw. Z ist als punktweiser Grenzwerter adaptierter bzw.

progressiv messbarer Prozesse selbst adaptiert bzw. progressiv-messbar. Aus $Z^i \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H,K))$ $(1 \leq i \leq N)$ und obiger Abschätzung, folgt schließlich auch $\bar{Z} \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathcal{S}_2(H,K))$.

Beweise nun, dass $\bar{Y}$ ein càdlag Prozess ist. Nach Voraussetzung ist Y^i für $i = 1, \dots N$ ein càdlag-Prozess. Demnach existiert eine Menge $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ mit $P(\tilde{\Omega}) = 1$, so dass für alle $\omega \in \tilde{\Omega}, i = 1, \dots, N$ die Abbildungen $(t \mapsto Y^i_t(\omega))$ càdlag sind. Sei $\omega \in \tilde{\Omega}$ beliebig. Für $k \in \mathbb{N}$ sei jeweils $\tau_k(\omega) =: t^k$ und $i_k \in \{1, \dots, N\}$ so gewählt, dass $\omega \in B^{i,k}$ gilt. Das heißt

$$\bar{Y}(\omega) = \sum_{k \in \mathbb{N}} \left(Y^{1,k}(\omega) \mathbb{1}_{[0,t^k)} + Y^{i_k,k}(\omega) \mathbb{1}_{[t^k,T]} \right) e_k.$$

Im Folgenden seien alle auftretenden Funktionen an obigem fest gewählten $\omega \in \tilde{\Omega}$ ausgewertet, ohne dies explizit zu erwähnen.

Sei nun $t \in [0,T)$ und $(s_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset (t,T]$ eine Folge mit $s_n \downarrow t$ für $n \to \infty$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
\|\bar{Y}_t - \bar{Y}_{s_n}\|_K = \Big(&\sum_{\{k: s_n < t_k\}} |Y^{1,k}_t - Y^{1,k}_{s_n}|^2 + \sum_{\{k: t^k \geq t\}} |Y^{i_k,k}_t - Y^{i_k,k}_{s_n}|^2 \\
&+ \sum_{\{k: t < t^k \leq s_n\}} |Y^{1,k}_t - Y^{i_k,k}_{s_n}|^2 \Big)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|Y^1_t - Y^1_{s_n}\|_K + \sum_{i=1}^N \|Y^i_t - Y^i_{s_n}\|_K \\
&+ \left(\sum_{\{k: t < t^k \leq s_n\}} \left(|Y^{1,k}_t - Y^{i^k,k}_t| + |Y^{i^k,k}_t - Y^{i^k,k}_{s_n} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \|Y^1_t - Y^1_{s_n}\|_K + 2 \sum_{i=1}^N \|Y^i_t - Y^i_{s_n}\|_K \\
&+ \left(\sum_{\{k: t < t^k \leq s_n\}} |Y^{1,k}_t|^2 \right)^{\frac{1}{2}} + \sum_{i=1}^N \left(\sum_{\{k: t < t^k \leq s_n\}} |Y^{i,k}_t|^2 \right)^{\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

Da $(Y^i)_{1 \leq i \leq N}$ càdlag-Prozesse sind, erhalten wir

$$\lim_{n \to \infty} \|\bar{Y}_t - \bar{Y}_{s_n}\|_K \to 0$$

aus

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{\{k: t < t^k \leq s_n\}} \left(|Y^{1,k}_t|^2 + \sum_{i=1}^N |Y^{i,k}_t|^2 \right) = 0.$$

Um dies zu zeigen, sei $\epsilon > 0$ beliebig. Wegen

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} \left(|Y_t^{1,k}|^2 + \sum_{i=1}^{N} |Y_t^{i,k}|^2 \right) < \infty$$

existiert ein $K \in \mathbb{N}$, so dass

$$\sum_{k\geq K} \left(|Y_t^{1,k}|^2 + \sum_{i=1}^{N} |Y_t^{i,k}|^2 \right) < \epsilon$$

gilt. Zu einem solchen K definiere dann

$$D_K = \{k \in \mathbb{N} : k < K, t^k > t\}.$$

Falls $D_K = \emptyset$, gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{\{k:t<t^k\leq s_n\}} \left(|Y_t^{1,k}|^2 + \sum_{i=1}^{N} |Y_t^{i,k}|^2 \right) \leq \sum_{k\geq K} \left(|Y_t^{1,k}|^2 + \sum_{i=1}^{N} |Y_t^{i,k}|^2 \right) < \epsilon.$$

Falls $D_K \neq \emptyset$, definiere

$$\delta_K = \min\{t^k - t : k \in D_K\}.$$

Wegen $s_n \downarrow t$ existiert ein $L \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq L$

$$s_n - t < \delta_K.$$

Das heißt für alle $n \geq L, k < K$ gilt

$$s_n < t^k,$$

woraus unmittelbar

$$\sum_{\{k:t<t^k\leq s_n\}} \left(|Y_t^{1,k}|^2 + \sum_{i=1}^{N} |Y_t^{i,k}|^2 \right) \leq \sum_{k\geq K} \left(|Y_t^{1,k}|^2 + \sum_{i=1}^{N} |Y_t^{i,k}|^2 \right) < \epsilon$$

für alle $n \geq L$ folgt.

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, gilt also tatsächlich

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{\{k:t<t^k\leq s_n\}} \left(|Y_t^{1,k}|^2 + \sum_{i=1}^{N} |Y_t^{i,k}|^2 \right) = 0.$$

Und damit

$$\lim_{n\to\infty} \|\bar{Y}_t(\omega) - \bar{Y}_{s_n}(\omega)\|_K = 0.$$

Da dies für jedes $\omega \in \tilde{\Omega}$ für alle $t \in [0,T]$ und Folgen $s_n \downarrow t$ gilt, hat der Prozess $\bar{Y}$ f.s. rechtsstetige Pfade. Durch analoge Argumente erhalten wir auch, dass die Pfade von $\bar{Y}$ f.s. linke Grenzwerte besitzen, $\bar{Y}$ also tatsächlich ein câdlag-Prozess ist.

Es bleibt zu zeigen, dass $(\bar{Y}, \bar{Z})$ tatsächlich (5.1) erfüllen. Dazu genügt es offensichtlich zu beweisen, dass $(\bar{Y}^k, \bar{Z}^k)$ für alle $k \in \mathbb{N}$ (5.4) genügen. Sei also $k \in \mathbb{N}$ und $0 \leq s \leq t \leq T$ beliebig. Beachte zunächst, dass aus Satz 2.4.31 und Bemerkung 2.4.32

$$\int_s^t \bar{Z}_u^k dW_u = \int_{s\wedge\tau^k}^{t\wedge\tau^k} Z_u^{k,1} dW_u + \sum_{i=1}^N \mathbb{1}_{B_i} \int_{s\vee\tau^k}^{t\vee\tau^k} Z_u^{k,i} dW_u \tag{5.11}$$

folgt. Damit ergibt sich auf der Menge $\{\tau > t\}$

$$\begin{aligned}
&\bar{Y}_s^k - \int_s^t g_u^k(\bar{Y}_u^k, \bar{Z}_u^k)\mathrm{d}u + \int_s^t \bar{Z}_u^k \mathrm{d}W_u \\
&= Y_s^{1,k} - \int_s^t g_u^k(Y_u^{1,k}, Z_u^{1,k})\mathrm{d}u + \int_s^t Z_u^{1,k}\mathrm{d}W_u \\
&\geq Y_t^{1,k} = \bar{Y}^k.
\end{aligned}$$

Genauso bekommen wir, dass $(\bar{Y}^k, \bar{Z}^k)$ (5.4) auf der Menge $\{\tau \leq s\}$ erfüllt. Betrachte nun die Menge $\{s < \tau \leq t\} \cap B_i$ für ein $i \in \{i, \ldots, N\}$. Hier folgt aus (5.11)

$$\begin{aligned}
&\bar{Y}_s^k - \int_s^t g_u^k(\bar{Y}_u^k, \bar{Z}_u^k)\mathrm{d}u + \int_s^t \bar{Z}_u^k \mathrm{d}W_u \\
&= Y_s^{1,k} - \int_s^{\tau^k} g_u^k(Y_u^{1,k}, Z_u^{1,k})\mathrm{d}u + \int_s^{\tau^k} Z_u^{1,k}\mathrm{d}W_u \\
&\quad - \int_{\tau^k}^t g_u^k(Y_u^{i,k}, Z_u^{i,k})\mathrm{d}u + \int_{\tau^k}^t Z_u^{i,k}\mathrm{d}W_u.
\end{aligned}$$

Mit (5.2) sowie $Y^{1,k}_{\tau^k}\mathbb{1}_{B_i} \geq Y^{i,k}_{\tau^k}\mathbb{1}_{B_i}$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}
&\bar{Y}^k_s - \int_s^t g^k_u(\bar{Y}^k_u, \bar{Z}^k_u)\mathrm{d}u + \int_s^t \bar{Z}^k_u \mathrm{d}W_u \\
&\geq Y^{1,k}_{\tau^k} - \int_{\tau^k}^t g^k_u(Y^{i,k}_u, Z^{i,k}_u)\mathrm{d}u + \int_{\tau^k}^t Z^{i,k}_u \mathrm{d}W_u \\
&\geq Y^{i,k}_{\tau^k} - \int_{\tau^k}^t g^k_u(Y^{i,k}_u, Z^{i,k}_u)\mathrm{d}u + \int_{\tau^k}^t Z^{i,k}_u \mathrm{d}W_u \\
&\geq Y^{i,k}_t = \bar{Y}^k_t.
\end{aligned}$$

Da $(B_i)_{1\leq i\leq N}$ eine Partition ist, erfüllen $(\bar{Y}^k, \bar{Z}^k)$ (5.4) also tatsächlich auf

$$\bigcup_{i=1}^n (\{s < \tau \leq t\} \cap B_i) \cup \{\tau \leq s\} \cup \{\tau > t\} = \Omega$$

fast sicher. Da dies für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, ist $(\bar{Y}, \bar{Z}) \in \mathcal{A}(\xi, g)$. □

5.2.6 Lemma. *Sei $t \in [0,T]$, dann gilt $\mathcal{A}_t(\xi, g) \downarrow \hat{\mathcal{E}}^g_t(\xi)$ in $L^1(\Omega, K)$ und es existiert eine Folge von Superlösungen $(Y^n, Z^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\xi, g)$ mit $Y^n_t \downarrow \hat{\mathcal{E}}^g_t(\xi)$ in $L^1(\Omega, K)$ und*

$$\|\hat{\mathcal{E}}^g_t(\xi) - Y^n_t\|_K \to 0 \quad \textit{f.s.}. \tag{5.12}$$

Beweis: Aus Lemma 5.2.2 ist bekannt, dass $\mathcal{A}_t(\xi, g)$ von unten beschränkt ist. Zu zeigen ist also noch, dass $A_t(\xi, g)$ nach unten gerichtet ist. Seien dazu (Y^1, Z^1), $(Y^2, Z^2) \in \mathcal{A}(\xi, g)$. Zu zeigen ist $Y^1 \wedge Y^2 \in \mathcal{A}(\xi, g)$ bzgl. der Ordnung in $L^1(\Omega, K)$. Für $k \in \mathbb{N}$ definiere

$$\tau^k := \inf\left\{s > t : \; Y^{1,k}_s > Y^{2,k}_s\right\} \wedge T.$$

und

$$\begin{aligned}
\bar{Y}^k &:= Y^{1,k}\mathbb{1}_{[0,\tau^k)} + Y^{2,k}\mathbb{1}_{[\tau^k,T]}, \\
\bar{Z}^k &:= Z^{1,k}\mathbb{1}_{[0,\tau^k]} + Z^{2,k}\mathbb{1}_{(\tau^k,T]}.
\end{aligned}$$

Da $Y^{1,k}, Y^{2,k}$ câdlag Prozesse sind, ist τ^k eine Stoppzeit und es gilt $Y^{1,k}_{\tau^k} \geq Y^{2,k}_{\tau^k}$ auf $\{\tau_k < T\}$. Da wir $Y^1_T = Y^2_T = \xi$ angenommen haben (siehe

Bemerkung 5.1.2), gilt $Y^{1,k}_{\tau^k} \geq Y^{2,k}_{\tau^k}$ auf $\{\tau = T\}$ trivialerweise. Nach Lemma 5.2.5 ist daher $(\bar{Y}, \bar{Z})$ definiert durch

$$\bar{Y} := \sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{Y}^k e_k \tag{5.13}$$

$$\bar{Z} := \sum_{k\in\mathbb{N}} \bar{Z}^k e_k \tag{5.14}$$

in $\mathcal{A}(\xi, g)$. Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach Definition der Stoppzeiten ist $\tau^k \geq t$. Auf $\{\tau^k = t\}$ gilt

$$\bar{Y}^k_t = Y^{2,k}_t \leq Y^{1,k}_t. \tag{5.15}$$

Auf $\{\tau^k > t\}$ ist dagegen $Y^{1,k}_t \leq Y^{2,k}_t$, d.h.

$$\bar{Y}^k_t = Y^{1,k}_t \leq Y^{2,k}_t.$$

Insgesamt erhält man somit

$$\bar{Y}^k_t = Y^{1,k}_t \wedge Y^{2,k}_t$$

in $L^1(\Omega)$. Nach der Definition der Ordnung auf $L^1(\Omega, K)$, folgt daraus

$$\bar{Y}_t = Y^1_t \wedge Y^2_t \tag{5.16}$$

in $L^1(\Omega, K)$. $\mathcal{A}_t(\xi, g) \downarrow \hat{\mathcal{E}}^g_t(\xi)$ ist somit gezeigt.

Für die zweite Aussage beachte, dass $L^1(\Omega, K)$ nach Korollar 3.3.12 ordnungsstetig ist. Wegen $\mathcal{A}_t(\xi, g) \downarrow \hat{\mathcal{E}}^g_t(\xi)$ existiert nach Lemma 3.2.3 eine Folge $(Y^n, Z^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\xi, g)$ mit $Y^n_t \downarrow \hat{\mathcal{E}}^g_t(\xi)$ und

$$\lim_{n\to\infty} \|Y^n_t - \hat{\mathcal{E}}^g_t(\xi)\|_{L^1(\Omega,K)} = 0.$$

Durch Übergang auf eine geeigente Teilfolge erhalten wir nach Satz 2.1.18 auch $Y^n_t \to \hat{\mathcal{E}}^g_t(\xi)$ f.s. $(n \to \infty)$. □

$\hat{\mathcal{E}}^g(\xi)$ wäre nun der natürliche Kandidat für den Werteprozess der minimalen Superlösung. Allerdings ist $\hat{\mathcal{E}}^g_t(\xi)$ für jedes $t \in [0, T]$ nur fast sicher eindeutig bestimmt, das heißt über die Regularität der Pfade $t \mapsto \hat{\mathcal{E}}^g_t(\xi)$ können wir nichts aussagen. Wir werden deshalb zeigen, dass $\hat{\mathcal{E}}^g(\xi)$ eine càdlàg-Modifikation besitzt, die tatsächlich der Werteprozess der minimalen Superlösung ist. Das folgende Lemma ist ein erster Schritt dazu.

5.2.7 Lemma. *Der Prozess $\hat{\mathcal{E}}^g(\xi)$ ist ein Supermartingal und für alle $t \in [0,T]$ ist der Prozess $\mathcal{E}^g(\xi)$ definiert durch*

$$\mathcal{E}_t^g(\xi) = \lim_{s \downarrow t, s \in \mathbb{Q}} \hat{\mathcal{E}}_s^g(\xi) \ (t \in [0,T]), \quad \mathcal{E}_T^g(\xi) = \xi$$

ein wohldefiniertes càdlag Supermartingal mit

$$\hat{\mathcal{E}}_t^g(\xi) \geq \mathcal{E}_t^g(\xi),$$

für alle $t \in [0,T]$.

Beweis: Sei zunächst $s \in [0,T]$ beliebig. Nach Lemma 5.2.6 existiert zu diesem s ein Folge $(Y^n, Z^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\xi, g)$ mit

$$\lim_{n \to \infty} Y_s^n = \hat{\mathcal{E}}_s^g(\xi) \ \text{ f.s..}$$

Da Y_s^n für alle $n \in \mathbb{N}$ $\mathcal{F}_s - \mathcal{B}(E)$ messbar und die Filtrierung vollständig ist, gilt das auch für $\hat{\mathcal{E}}_s^g(\xi)$. Außerdem folgt aus der Definition von $\hat{\mathcal{E}}_s^g(\xi)$ und (5.5)

$$Y_s^n \geq \hat{\mathcal{E}}_s^g(\xi) \geq \mathrm{E}[\xi | \mathcal{F}_s]$$

und damit

$$\|\hat{\mathcal{E}}_s^g(\xi)\|_K \leq \|Y_s^n\|_K + \|\mathrm{E}[\xi|\mathcal{F}_s]\|_K.$$

Wegen $Y_s^n, \mathrm{E}[\xi|\mathcal{F}_s] \in L^1(\Omega, K)$, folgt daraus $\hat{\mathcal{E}}_s^g(\xi) \in L^1(\Omega, K)$.

Sei nun noch $t \in [0,T]$ mit $t \geq s$ fest gewählt. Dann ergibt sich für $(Y, Z) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ aus der Positivität von g und (5.1)

$$\begin{aligned} \hat{\mathcal{E}}_t^g(\xi) \leq Y_t &\leq Y_s - \int_s^t g_u(Y_u, Z_u) \mathrm{d}u + \int_s^t Z_u \mathrm{d}W_u \\ &\leq Y_s + \int_s^t Z_u \mathrm{d}W_u. \end{aligned}$$

Da $\int ZdW$ ein Martingal ist, folgt daraus mit der Positivität des bedingeten Erwartungswertes und der Adaptiertheit von Y

$$\mathrm{E}[\hat{\mathcal{E}}_t^g(\xi)|\mathcal{F}_s] \leq Y_s.$$

Da dies für alle $(Y, Z) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ gilt, erhält man daraus insbesondere

$$\mathrm{E}[\hat{\mathcal{E}}_t^g(\xi)|\mathcal{F}_s] \leq \inf\{Y_s : (Y, Z) \in \mathcal{A}(\xi, g)\} = \hat{\mathcal{E}}_s^g(\xi).$$

Da $0 \leq s \leq t \leq T$ beliebig gewählt waren, ist $\hat{\mathcal{E}}^g(\xi)$ also tatsächlich ein Supermartingal.

Um die Existenz des Grenzwertprozesses $\mathcal{E}^g(\xi)$ nachzuweisen, bemerken wir zunächst, dass nach Lemma 5.2.2 und der Defintion von $\hat{\mathcal{E}}^g(\xi)$ für alle $t \in [0,T]$ und $(Y,Z) \in \mathcal{A}(\xi, g)$

$$\hat{\mathcal{E}}^g_t(\xi) \leq Y_t \leq Y_0 + \int_0^t Z_u \mathrm{d}W_u. \tag{5.17}$$

gilt. Wir betrachten nun den Prozess

$$X := -\hat{\mathcal{E}}^g(\xi) + Y_0 + \int Z \mathrm{d}W.$$

Da $\int Z\mathrm{d}W$ ein Martingal, Y_0 f.s. konstant und $\hat{\mathcal{E}}^g(\xi)$ ein Supermartingal ist, ist X ein Submartingal, dass nach (5.17) positiv ist. Da K als reflexiver Banachverband die (RNE) besitzt, existiert nach Satz 4.3.10 damit der Prozess

$$X^r_t := \lim_{s \downarrow t, s \in \mathbb{Q}} X_s \ (t \in [0,T)), \quad \tilde{X}_T = X_T$$

und ist ein càdlag Submartingal mit $X^r_t \geq X_t$ für alle $t \in [0,T]$. Da $Y_0 + \int Z\mathrm{d}W$ ein stetiger Prozess ist, folgt weiter, dass

$$\mathcal{E}^g_t(\xi) = \lim_{s \downarrow t, s \in \mathbb{Q}} \hat{\mathcal{E}}^g_s(\xi) = -X^r_t + Y_0 + \int_0^t Z_u dW_u$$

für alle $t \in [0,T)$ ebenfalls existiert. Desweiteren ist $\mathcal{E}^g(\xi)$ ein càdlag Submartingal, weil X^r ein càdlag Supermartingal und $Y_0 + \int ZdW$ ein stetiges Martingal ist. Schließlich folgt für alle $t \in [0,T]$ aus $X^r_t \geq X_t$

$$\begin{aligned}\mathcal{E}^g_t(\xi) &= -X^r_t + Y_0 + \int_0^t Z_u dW_u \\ &\leq -X_t + Y_0 + \int_0^t Z_u dW_u = \hat{\mathcal{E}}^g_t(\xi).\end{aligned}$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

5.3 Existenz der minimalen Superlösung

Ziel dieses Abschnitts ist es zu zeigen, dass ein $Z \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H,K))$ existiert, so dass $(\mathcal{E}^g(\xi), Z)$ eine Superlösung von (5.1) ist. Per Definition von $\hat{\mathcal{E}}^g_t(\xi)$ gilt in diesem Fall $\mathcal{E}^g_t(\xi) \geq \hat{\mathcal{E}}^g_t(\xi)$. Da in 5.2.7 bereits $\mathcal{E}^g_t(\xi) \leq \hat{\mathcal{E}}^g_t(\xi)$ gezeigt wurde, ist $\mathcal{E}^g(\xi)$ dann eine Version von $\hat{\mathcal{E}}^g(\xi)$ und nach Defintion von $\hat{\mathcal{E}}^g(\xi)$ somit eine minimale Superlösung von (5.1).

Dazu konstruieren wir zunächst eine Folge $(Y^n, Z^n) \in \mathcal{A}(\xi, g)$, so dass für alle $q \in S$, wobei S eine dichte Teilmenge von $[0, T]$,

$$\lim_{n \to \infty} Y^n_q = \hat{\mathcal{E}}^g_q(\xi) \quad \text{f.s.}$$

und für alle $n \in \mathbb{N}$, alle $t \in [0, T]$

$$Y^{n+1}_t \leq Y^n_t \quad \text{f.s.}$$

gilt.

Dazu dienen die folgenden Lemmas.

5.3.1 Lemma. *Sei $l \in \mathbb{N}$, $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_l < T$ und $(Y^i, Z^i)_{0 \leq i \leq l} \subset \mathcal{A}(\xi, g)$. Dann existiert ein $(Y, Z) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ mit*

$$Y_{t_i} \leq Y^i_{t_i} \quad (0 \leq i \leq l). \tag{5.18}$$

Beweis: In der Situation des Lemmas definiere

$$\bar{Y}^0 := Y^0, \quad \bar{Z}^0 := Z^0$$

und rekursiv für $1 \leq i \leq l$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \bar{Y}^{i,k} &:= \bar{Y}^{i-1,k} \mathbb{1}_{[0, \tau^k_i)} + Y^{i,k} \mathbb{1}_{[\tau^k_i, T]} \\ \bar{Z}^{i,k} &:= \bar{Z}^{i-1,k} \mathbb{1}_{[0, \tau^k_i]} + Z^{i,k} \mathbb{1}_{(\tau^k_i, T]}, \end{aligned}$$

mit

$$\tau^k_i := \inf \left\{ t > t_i : \bar{Y}^{i-1,k}_t > Y^{i,k}_t \right\} \wedge T.$$

Außerdem setze

$$\begin{aligned} \bar{Y}^i &:= \sum_{k \in \mathbb{N}} \bar{Y}^{i,k} e_k \\ \bar{Z}^i &:= \sum_{k \in \mathbb{N}} \bar{Z}^{i,k} e_k. \end{aligned}$$

Wenn wir für ein $i \in \{0, \ldots, l\}$

$$(\bar{Y}^{i-1}, \bar{Z}^{i-1}) \in \mathcal{A}(\xi, g), \tag{5.19}$$

$$\bar{Y}^{i-1}_{t_j} \leq Y^j_{t_j} \quad (0 \leq j \leq i-1) \tag{5.20}$$

annehmen, so erhalten wir wie im Beweis von Lemma 5.2.6, dass τ_i^k eine Stoppzeit ist und $\bar{Y}^{i-1}_{\tau_i^k} \leq Y^i_{\tau_i^k}$ gilt. Aus Lemma 5.2.5 folgt nun $(\bar{Y}^i, \bar{Z}^i) \in \mathcal{A}(\xi, g)$. Aus $\tau_i^k \geq t_i > t_j$ für $(0 \leq j \leq i-1)$ und (5.20) ergibt sich zudem

$$\bar{Y}^i_{t_j} = \bar{Y}^{i-1}_{t_j} \leq Y^j_{t_j} \quad (0 \leq j \leq i-1).$$

Nach Definition der Stoppzeiten folgt wie im Beweis von Lemma 5.2.6 auch

$$\bar{Y}^i_{t_i} = \bar{Y}^{i-1}_{t_i} \wedge Y^i_{t_i} \leq Y^i_{t_i}.$$

Insgesamt gilt also

$$\bar{Y}^{n,i}_{t_j} \leq Y^{n,j}_{t_j} \quad (0 \leq j \leq i).$$

Da (5.19) und (5.20) für $i = 1$ laut Definition erfüllt sind, folgt induktiv, dass $(\bar{Y}^l, \bar{Z}^l) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ (5.18) erfüllen. □

5.3.2 Lemma. *Sei $l \in \mathbb{N}$ und $0 = t_0 < t_1 < \ldots < t_l < T$. Dann existiert eine Folge $(Y^n, Z^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\xi, g)$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} \|Y^n_{t_i} - \hat{\mathcal{E}}^g_{t_i}(\xi, g)\|_K = 0 \;\; \textit{f.s.}, \;\; (1 \leq i \leq l), \tag{5.21}$$

$$Y^{n+1}_{t_i} \leq Y^n_{t_i} \quad (n \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq l). \tag{5.22}$$

Beweis: **Schritt 1:** Für $i = 0, \ldots, l$ existiert nach Lemma 5.2.6 jeweils eine Folge $(Y^{n,i}, Z^{n,i})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\xi, g)$ mit

$$\lim_{n\to\infty} \|Y^{n,i}_{t_i} - \hat{\mathcal{E}}^g_{t_i}\| = 0 \;\; \text{f.s.}.$$

Wähle zunächst zu jedem $i \in \{0, \ldots, l\}$ eine solche Folge.

Schritt 2: Sei nun $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach Lemma 5.3.1 existiert zur Familie $(Y^{n,i}, Z^{n,i})_{1\leq i\leq l}$ Superlösungen $(Y^n, Z^n) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ mit

$$Y^n_{t_i} \leq Y^{n,i}_{t_i} \quad (0 \leq i \leq l).$$

Schritt 3: Ist (Y^n, Z^n) für ein $n \in \mathbb{N}$ wie oben konstruiert. Dann wähle für $i = 0, \ldots, l$ $(\tilde{Y}^{n+1,i}, \tilde{Z}^{n+1,i}) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ mit

$$\tilde{Y}^{n+1,i}_{t_i} \leq Y^n_{t_i} \wedge Y^{n+1,i}_{t_i}. \tag{5.23}$$

Da $\mathcal{A}_{t_i}(\xi, g)$ nach Lemma 5.2.6 nach unten gerichtet ist, existiert ein solches $\tilde{Y}^{n+1,i}$. Für die Familie $(\tilde{Y}^{n+1,i}, \tilde{Z}^{n+1,i})_{0\leq i\leq l}$ existieren wieder nach Lemma 5.3.1 $(Y^{n+1}, Z^{n+1}) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ mit

$$Y^{n+1}_{t_i} \leq \tilde{Y}^{n+1,i}_{t_i} \quad (0 \leq i \leq l).$$

Insbesondere folgt aus (5.23) auch

$$Y_{t_i}^{n+1} \leq Y_{t_i}^n \quad (0 \leq i \leq l).$$

Schritt 4.: Konstruiere nun (Y^1, Z^1) wie in Schritt 2 und für $n \geq 2$ (Y^n, Z^n) rekursiv nach Schritt 3. Dann erhalten wir eine Folge $(Y^n, Z^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\xi, g)$, die (5.22) und

$$Y_{t_i}^n \leq Y_{t_i}^{n,i} \quad (0 \leq i \leq l, n \in \mathbb{N})$$

erfüllt. Aus letzterem erhalten wir nach Defintion von $\hat{\mathcal{E}}^g(\xi, g)$ insbesondere

$$0 \leq Y_{t_i}^{n,i} - \hat{\mathcal{E}}_{t_i}^g(\xi) \leq Y_{t_i}^n - \hat{\mathcal{E}}_{t_i}^g(\xi) \quad (0 \leq i \leq l, n \in \mathbb{N}).$$

Wegen

$$\|Y_{t_i}^{n,i} - \hat{\mathcal{E}}_{t_i}^g(\xi)\|_K \to 0 \quad (n \to \infty, 0 \leq i \leq l)$$

und, da $\|\cdot\|_K$ eine Verbandsnorm ist, folgt somit auch, dass $(Y^n, Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (5.21) genügt. □

5.3.3 Satz. *Setze* Dyad $:= \{\frac{iT}{2^l} : l \in \mathbb{N}, i = 0, \ldots, 2^l - 1\}$. *Dann existiert eine Folge* $(Y^n, Z^n) \in \mathcal{A}(\xi, g)$, *so dass*

$$\forall t \in \text{Dyad} : \lim_{n\to\infty} \|Y_t^n - \hat{\mathcal{E}}_t^g(\xi)\|_K = 0 \quad \textit{f.s.}, \tag{5.24}$$

$$\forall n \in \mathbb{N}, t \in [0, T] : Y_t^{n+1} \leq Y_t^n. \tag{5.25}$$

Beweis: Im folgenden sei $t_i^l := \frac{iT}{2^l}$ $(l \in \mathbb{N}, i = 0, \ldots, 2^l)$

Schritt 1: Sei $l \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach Lemma 5.3.2 existiert ein Folge $(Y^{l,n}, Z^{l,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\xi, g)$, so dass für alle $i = 0, \ldots, 2^l - 1$

$$\lim_{n\to\infty} \|Y_{t_i^l}^{l,n} - \hat{\mathcal{E}}_{t_i^l}^g\|_K = 0 \quad \text{f.-s.},$$

$$Y_{t_i^l}^{l,n+1} \leq Y_{t_i^l}^{l,n} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Schritt 2: Ist $(Y^{j,n}, Z^{j,n})$ für ein $l \in \mathbb{N}$ und alle $j \leq l$ auf diese Weise definiert, so wähle für $r := l + 1$, $n \in \mathbb{N}$ und $i = 0, \ldots, 2^r - 1$ eine Folge $(\tilde{Y}^{r,n,i}, \tilde{Z}^{r,n,i}) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ so, dass

$$\|\tilde{Y}_{t_i^r}^{r,n,i} - \hat{\mathcal{E}}_{t_i^r}^g\|_K \to 0 \quad \text{f.-s.} \tag{5.26}$$

und $(Y^{r,n,i}, Z^{r,n,i}) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ mit

$$Y^{r,n,i}_{t^r_i} \le \tilde{Y}^{r,n,i}_{t^r_i} \wedge \inf\{Y^{j,n}_{t^r_i} : j < r\} \quad (n \in \mathbb{N}). \tag{5.27}$$

Wie im Beweis von Lemma 5.3.2 erhält man aus dieser Familie von Folgen eine Folge $(Y^{r,n}, Z^{r,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\xi, g)$ mit

$$\begin{aligned} Y^{r,n}_{t^r_i} &\le Y^{r,n,i}_{t^r_i}, \\ Y^{r,n+1}_{t^r_i} &\le Y^{r,n}_{t^r_i} \quad (i = 0, \ldots, 2^r - 1,\ n \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

Aus (5.26) und (5.27) folgt daraus für $i = 0, \ldots, 2^r - 1$, außerdem

$$\lim_{n\to\infty} \|Y^{r,n}_{t^r_i} - \hat{\mathcal{E}}^g_{t^r_i}\|_K = 0 \ \text{ f.-s.}, \tag{5.28}$$

$$Y^{r,n}_{t^r_i} \le Y^{j,n}_{t^r_i} \quad (j \le r, n \in \mathbb{N}). \tag{5.29}$$

Schritt 3: Konstruieren wir zunächst $(Y^{1,n}, Z^{1,n})_{n\in\mathbb{N}}$ wie in Schritt 1 und $(Y^{l,n}, Z^{l,n})_{n\in\mathbb{N}}$ für $l \ge 2$ rekursiv nach Schritt 2, so erhalten wir eine Familie von Folgen $(\bar{Y}^{l,n}, \bar{Z}^{l,n})_{n,l\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\xi, g)$, die folgendes erfüllt

$$\lim_{n\to\infty} \|Y^{l,n}_{t^l_i} - \hat{\mathcal{E}}^g_{t^l_i}\|_K = 0 \ \text{ f.-s.} \ (l \in \mathbb{N}, i = 0, \ldots, 2^l - 1) \tag{5.30}$$

$$Y^{l,n+1}_{t^l_i} \le Y^{l,n}_{t^l_i} \quad (l, n \in \mathbb{N}, i = 0, \ldots, 2^l - 1) \tag{5.31}$$

$$Y^{l,n}_{t^l_i} \le Y^{j,n}_{t^l_i} \quad (n, l \in \mathbb{N}, i = 0, \ldots, 2^{l+1} - 1, j \le l). \tag{5.32}$$

Beachte außerdem, dass aus (5.32) mit $\{t^j_0, \ldots t^j_{2^j-1}\} \subset \{t^l_0, \ldots t^l_{2^l-1}\}$ $(l \ge j)$ auch

$$\bar{Y}^{l,n}_{t^l_i} \le \bar{Y}^{j,n}_{t^j_i} \quad (n, l \in \mathbb{N}, i = 0, \ldots, 2^l - 1, j \le l). \tag{5.33}$$

folgt. Definiere nun die Diagonalfolge $(Y^n, Z^n) := (Y^{n,n}, Z^{n,n})$. Ist nun $l \in \mathbb{N}$, $i = 0, \ldots, 2^l - 1$ beliebig, so folgt aus (5.33) für $n \ge l$

$$Y^n_{t^l_i} = Y^{n,n}_{t^l_i} \le Y^{l,n}_{t^l_i}.$$

Da nach (5.30) $(Y^{l,n}_{t^l_i})_{n\in\mathbb{N}}$ fast sicher gegen $\hat{\mathcal{E}}^g_{t^l_i}(\xi)$ konvergiert, gilt das auch für $(Y^n_{t^l_i})_{n\in\mathbb{N}}$ und da $t^l_i \in$ Dyad belibig gewählt war, erüllt $(Y^n, Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$

somit (5.24). Für den nächsten Schritt ist zudem wichtig, dass für alle $n \in \mathbb{N}, i = 0, \dots 2^{n+1} - 1, j \leq n$

$$Y^n_{t^n_i} = Y^{n,n}_{t^n_i} \leq Y^{j,n}_{t^n_i} \leq Y^{j,j}_{t^n_i} = Y^j_{t^n_i}. \tag{5.34}$$

Dies folgt unmittelbar aus (5.31) und (5.32).

Schritt 5: Um eine Folge zu erhalten, die zusätzlich (5.25) erfüllt, definiere

$$\bar{Y}^1 := Y^1, \quad \bar{Z}^1 := Z^1.$$

Sowie rekursiv für $n \geq 2$, $j = 1, \dots, 2^n - 1$ und $k \in \mathbb{N}$ (setze im folgenden $t^n_{2^n} := T$)

$$\begin{aligned}
\bar{Y}^{n,k} &:= \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(Y^{n,k} \mathbb{1}_{[t^n_i, \tau^{n,k}_i)} + \bar{Y}^{n-1,k} \mathbb{1}_{[\tau^{n,k}_i, t^n_{i+1})} \right), \quad \bar{Y}^{n,k}_T := \xi^k \\
\bar{Z}^{n,k} &:= \sum_{i=0}^{2^n-1} \left(Z^{n,k} \mathbb{1}_{(t^n_i, \tau^{n,k}_i]} + \bar{Z}^{n-1,k} \mathbb{1}_{(\tau^{n,k}_i, t^n_{i+1}]} \right), \quad \bar{Z}^{n,k}_0 := Z^{n,k}_0
\end{aligned}$$

mit

$$\tau^{n,k}_i := \inf \left\{ t > t^n_i : Y^{n,k}_t > \bar{Y}^{n-1,k}_t \right\} \wedge t^n_{i+1}, \; (i = 0, \dots, 2^n - 1),$$

sowie

$$\begin{aligned}
\bar{Y}^n &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \bar{Y}^{n,k} e_k \\
\bar{Z}^n &= \sum_{k \in \mathbb{N}} \bar{Z}^{n,k} e_k.
\end{aligned}$$

Dann ist $(\bar{Y}^n, \bar{Z}^n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\xi, g)$ und erfüllt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\bar{Y}^n_{t^n_i} = Y^n_{t^n_i} \quad (i = 0, \dots, 2^n - 1), \tag{5.35}$$

$$\bar{Y}^n_{t^l_i} \geq Y^l_{t^l_i} \quad (l \geq n, i = 0, \dots, 2^l - 1), \tag{5.36}$$

$$\bar{Y}^{n+1}_t \leq \bar{Y}^n_t \quad (t \in [0, T]). \tag{5.37}$$

Zunächst zeige induktiv $(\bar{Z}^n, \bar{Y}^n) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ und (5.35), (5.36) für alle $n \in \mathbb{N}$.

Für $n = 1$ ist nichts zu zeigen.

Nehme nun an, dass für ein $n \in \mathbb{N}$ $(\bar{Y}^{n-1}, \bar{Z}^{n-1}) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ sind und (5.35), (5.36) erfüllen. Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Aus der Darstellung von $\bar{Y}^{n,k}$ ergibt sich direkt $\bar{Y}_t^{n,k} \in \{\bar{Y}_t^{n-1,k}, Y_t^{n,k}\}$ $(t \in [0,T])$. Ist $l \geq n$ und $j = 0, \dots, 2^l - 1$, folgt aus (5.34) $Y_{t_j^l}^{n,k} \geq Y_{t_j^l}^{l,k}$ und aus der Induktionsvorausetzung (5.36) folgt auch $\bar{Y}_{t_j^l}^{n-1,k} \geq Y_{t_j^l}^{l,k}$. Das heißt $\bar{Y}_{t_j^l}^{n,k} \geq Y_{t_j^l}^{l,k}$. Somit erfüllt auch $(\bar{Y}^n, \bar{Z}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ (5.36).

Sei $k \in \mathbb{N}, i = 0, \dots, 2^n - 1$ beliebig. Beachte zunächst

$$t_{i+1}^n \geq \tau_i^{n,k} \geq t_i^n. \tag{5.38}$$

Da $\bar{Y}^{n-1,k}$ nach Induktionsvorausetzung und $Y^{n,k}$ nach Definition câdalg sind, ist $\tau_i^{n,k}$ eine Stoppzeit. Außerdem gilt direkt per Definition von $\bar{Y}^{n,k}$

$$\bar{Y}_{t_i^n}^{n,k} = \begin{cases} Y_{t_i^n}^{n,k} & , t_i^n < \tau_i^{n,k} \\ \bar{Y}_{t_i^n}^{n-1,k} & , t_i^n = \tau_i^{n,k}. \end{cases}$$

Aus $t_i^n = \tau_i^{n,k}$ folgt aber $\bar{Y}_{t_i^n}^{n-1,k} \leq Y_{t_i^n}^{n,k}$ und mit (5.36) folgt draus wiederrum $\bar{Y}_{t_i^n}^{n-1,k} = Y_{t_i^n}^{n,k}$. Insgesamt ergibt sich $\bar{Y}_{t_i^n}^n = Y_{t_i^n}^n$. (5.35) ist also auch für $(\bar{Y}^n, \bar{Z}^n)_{n \in \mathbb{N}}$ gezeigt. Es bleibt $(\bar{Y}^n, \bar{Z}^n) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ nachzuweisen.

Definiere dafür

$$B_i^k := \{\tau_i^{n,k} < t_{i+1}^n\}$$

Dann ist offensichtlich $B_i^k \in \mathcal{F}_{\tau_i^{n,k}}$ und mit der Rechtsstigkeit von $\bar{Y}^{n-1}$ und Y^n erhalten wir

$$Y_{\tau_i^{n,k}}^{n,k} \mathbb{1}_{B_i^k} \geq \bar{Y}_{\tau_i^{n,k}}^{n-1,k} \mathbb{1}_{B_i^k} \quad (k \in \mathbb{N}). \tag{5.39}$$

Setze nun

$$\begin{aligned}
\hat{Y}^{0,n,k} &:= Y^{n,k} \mathbb{1}_{[0,\tau_0^{n,k})} + \mathbb{1}_{[\tau_0^{n,k},T]} \left(\bar{Y}^{n-1,k} \mathbb{1}_{B_0^k} + Y^{n,k} \mathbb{1}_{\Omega \setminus B_0^k} \right), \\
\hat{Z}^{0,n,k} &:= Z^{n,k} \mathbb{1}_{[0,\tau_0^{n,k}]} + \mathbb{1}_{(\tau_0^{n,k},T]} \left(\bar{Z}^{n-1,k} \mathbb{1}_{B_0^k} + Z^{n,k} \mathbb{1}_{\Omega \setminus B_0^k} \right), \\
\hat{Y}^{0,n} &:= \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat{Y}^{1,n,k} e_k, \\
\hat{Z}^{0,n} &:= \sum_{k \in \mathbb{N}} \hat{Z}^{1,n,k} e_k.
\end{aligned}$$

Außerdem defniere rekursiv für $i = 1, \dots, 2^n - 1$

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}^{i,n} &:= \hat{Y}^{i-1,n}\mathbb{1}_{[0,t_i^n)} + Y^n\mathbb{1}_{[t_i^n,T]},\\
\tilde{Z}^{i,n} &:= \hat{Z}^{i-1,n}\mathbb{1}_{[0,t_i^n]} + Z^n\mathbb{1}_{(t_i^n,T]}
\end{aligned}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\hat{Y}^{i,n,k} &:= \tilde{Y}^{i,n,k}\mathbb{1}_{[0,\tau_i^{n,k})} + \mathbb{1}_{[\tau_i^{n,k},T]}\left(\bar{Y}^{n-1,k}\mathbb{1}_{B_i^k} + \tilde{Y}^{i,n,k}\mathbb{1}_{\Omega\setminus B_i^k}\right),\\
\hat{Z}^{i,n,k} &:= \tilde{Z}^{i,n,k}\mathbb{1}_{[0,\tau_i^{n,k}]} + \mathbb{1}_{(\tau_i^{n,k},T]}\left(\bar{Z}^{n-1,k}\mathbb{1}_{B_i^k} + \tilde{Z}^{i,n,k}\mathbb{1}_{\Omega\setminus B_i^k}\right),\\
\hat{Y}^{i,n} &:= \sum_{k\in\mathbb{N}} \hat{Y}^{i,n,k}e_k,\\
\hat{Z}^{i,n} &:= \sum_{k\in\mathbb{N}} \hat{Z}^{i,n,k}e_k.
\end{aligned}$$

Wir behaupten, dass für alle $i = 0, \dots, 2^n - 1$ $(\hat{Y}^{i,n}, \hat{Z}^{i,n}) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ und folgendes für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\begin{aligned}
\hat{Y}^{i,n,k} &= \sum_{j=0}^{i-1}\left(Y^{n,k}\mathbb{1}_{[t_j^n,\tau_j^{n,k})} + \bar{Y}^{n-1,k}\mathbb{1}_{[\tau_j^{n,k},t_{j+1}^n)}\right) + Y^n\mathbb{1}_{[t_i^n,\tau_i^{n,k})}\\
&\quad + \mathbb{1}_{[\tau_i^{n,k},T]}\left(\bar{Y}^{n-1,k}\mathbb{1}_{B_i^k} + \tilde{Y}^{i,n,k}\mathbb{1}_{\Omega\setminus B_i^k}\right), \qquad (5.40)\\
\hat{Z}^{i,n,k} &= \sum_{j=0}^{i-1}\left(Z^{n,k}\mathbb{1}_{(t_j^n,\tau_j^{n,k}]} + \bar{Z}^{n-1,k}\mathbb{1}_{(\tau_j^{n,k},t_{j+1}^n]}\right) + Z^n\mathbb{1}_{(t_i^n,\tau_i^{n,k}]}\\
&\quad + \mathbb{1}_{(\tau_i^{n,k},T]}\left(\bar{Z}^{n-1,k}\mathbb{1}_{B_i^k} + \tilde{Z}^{i,n,k}\mathbb{1}_{\Omega\setminus B_i^k}\right), \quad \hat{Z}_0^{i,n,k} := Z_0^{n,k}. \qquad (5.41)
\end{aligned}$$

Da wir für alle $(Y, Z) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ stets $Y_T = \xi$ voraussetzen, folgt aus dieser Darstellung insbesondere $(\hat{Y}^{l,n}, \hat{Z}^{l,n)} = (\bar{Y}^n, \bar{Z}^n) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ für $l = 2^n - 1$ und dies ist in der Induktion noch zu zeigen.

Für $i = 0$ ist diese Darstellung per Definition gegeben. Da nach Induktionsvorausetzung $(\bar{Y}^{n-1}, \bar{Z}^{n-1}) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ gilt, folgt aus (5.39) mit Lemma 5.2.5 auch $(\hat{Y}^{0,n}, \hat{Z}^{0,n}) \in \mathcal{A}(\xi, g)$.

Gelte nun $(\hat{Y}^{i-1,n}, \hat{Z}^{i-1,n})_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\xi, g)$ und (5.40), (5.41) für ein $i \in \{1, \dots, 2^n - 1\}$. Sei $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann ist

$$\hat{Y}_{t_i^n}^{i-1,n,k} = \begin{cases} Y_{t_i^n}^{n,k} & , t_i^n < \tau_i^{n,k}\\ \bar{Y}_{t_i^n}^{n-1,k} & , t_i^n = \tau_i^{n,k}. \end{cases}$$

Nach (5.36) ist $Y^{n,k}_{t^n_i} \leq \bar{Y}^{n-1,k}_{t^n_i}$. Somit ist $\hat{Y}^{i-1,n,k}_{t^n_i} \leq Y^{n,k}_{t^n_i}$. Aus Lemma 5.2.5 folgt daher $(\tilde{Y}^{i,n}, \tilde{Z}^{i,n}) \in \mathcal{A}(\xi, g)$. Für $k \in \mathbb{N}$ ergibt sich aus der Darstellung von $\hat{Y}^{i-1,n,k}$, $\tau^{n,k}_{i-1} \leq t^n_i$ und $B^k_{i-1} = \{\tau^{n,k}_{i-1} < t^n_i\}$

$$\begin{aligned}
\hat{Y}^{i-1,n,k}\mathbb{1}_{[0,t^n_i)} &= \sum_{j=0}^{i-2}\left(Y^{n,k}\mathbb{1}_{[t^n_j,\tau^{n,k}_j)} + \bar{Y}^{n-1,k}\mathbb{1}_{[\tau^{n,k}_j,t^n_{j+1})}\right) \\
&\quad + Y^n\mathbb{1}_{[t^n_{i-1},\tau^{n,k}_{i-1})} + \mathbb{1}_{[\tau^{n,k}_{i-1},t^n_i)}\bar{Y}^{n-1,k} \\
&= \sum_{j=0}^{i-1}\left(Y^{n,k}\mathbb{1}_{[t^n_j,\tau^{n,k}_j)} + \bar{Y}^{n-1,k}\mathbb{1}_{[\tau^{n,k}_j,t^n_{j+1})}\right).
\end{aligned}$$

Das heißt

$$\begin{aligned}
\tilde{Y}^{i,n,k} &= \hat{Y}^{i-1,n,k}\mathbb{1}_{[0,t^n_i)} + Y^{n,k}\mathbb{1}_{[t^n_i,T]} \\
&= \sum_{j=0}^{i-1}\left(Y^{n,k}\mathbb{1}_{[t^n_j,\tau^{n,k}_j)} + \bar{Y}^{n-1,k}\mathbb{1}_{[\tau^{n,k}_j,t^n_{j+1})}\right) + Y^{n,k}\mathbb{1}_{[t^n_i,T]}.
\end{aligned}$$

Analog ergibt sich

$$\begin{aligned}
\tilde{Z}^{i,n,k} &= \sum_{j=0}^{i-1}\left(Z^{n,k}\mathbb{1}_{(t^n_j,\tau^{n,k}_j]} + \bar{Z}^{n-1,k}\mathbb{1}_{(\tau^{n,k}_j,t^n_{j+1}]}\right) + Z^{n,k}\mathbb{1}_{(t^n_i,T]}, \\
\hat{Z}^{i,n,k}_0 &= Z^{n,k}_0.
\end{aligned}$$

Insbesondere folgt $\tilde{Y}^{i,n,k}_{\tau^{n,k}_i} = Y^{n,k}_{\tau^{n,k}_i}$. Mit (5.39) ergibt sich wiederum

$$\tilde{Y}^{i,n,k}_{\tau^{n,k}_i}\mathbb{1}_{B^k_i} \geq \bar{Y}^{n-1,k}_{\tau^{n,k}_i}\mathbb{1}_{B^k_i}.$$

Mit Lemma 5.2.5 folgt dann $(\bar{Y}^{i,n,k}, \bar{Z}^{i,n,k})$ $(\bar{Y}^{i,n}, \bar{Z}^{i,n}) \in \mathcal{A}(\xi, g)$. Die Darstellungen (5.40), (5.41) erhält man durch Einsetzen unter Beachtung von $t^n_i \leq \tau^{n,k}_i$. Damit ist die Induktion über i und nach obigen Bemerkungen auch jene über n abgeschlossen.

Aus der Gültigkeit von (5.35) folgt insbesondere, dass auch $(\bar{Y}^n, \bar{Z}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ (5.24) erfüllt. Es bleibt noch $\bar{Y}^{n+1}_t \leq \bar{Y}^n_t$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $t \in [0,T]$ zu zeigen.

Sei also $n \in \mathbb{N}$, $i \in \{0, \ldots, 2^{n+1} - 1\}$ und $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Auf $[\tau^{n+1,k}_i, t^{n+1}_{i+1})$ ist $\bar{Y}^{n+1,k}_t = \bar{Y}^{n,k}$. Auf $[t^{n+1}_i, \tau^{n+1,k}_i)$, folgt aus der Definition von $\tau^{n+1,k}_i$

und der Definition von $\bar{Y}^{n+1,k}$ direkt $\bar{Y}_t^{n,k} \geq Y_t^{n+1,k} = \bar{Y}_t^{n+1,k}$. Da dies für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, genügt $(Y^n, Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch (5.25).

□

Bevor wir den Beweis der Existenz einer minimalen Superlösung kommen, benötigen wir noch ein Resultat aus der Theorie der reellen Semimartingale. Die Definition eines Semimartingals, der quadratischen Variation und Kovariation sowie des stochastischen Integrals eines adaptierten câglad Prozesses (Pfade sind f.s. linksstetig mit rechten Grenzwerten) bezüglich eines Semimartingals sind dabei wie in [Pro04] (Kapitel II) zu verstehen. Beachte, dass die Menge aller Semimartingale einen Vektorraum bilden, der càdlag L^2-Martingale und adaptierte càdlag Prozesse von endlicher Variation enthält (siehe [Pro04] S.53 Theorem 1 und S.55 Theoreme 7, 8). Desweiteren ist die quadratische Variation eines Semimartingals ein monoton wachsender adaptierter càdlag Prozess, also insbesondere von endlicher Variation (siehe [Pro04] S.66 Theorem 22). Außerdem verwenden wir folgende Notation.

5.3.4 Notation. Sei $(X_t)_{t\in[0,T]}$ ein càdlag Prozess, dann definieren wir für alle $t \in [0,T)$ den Prozess $(X_{t-})_{t\in[0,T]}$ durch

$$X_{t-} := \lim_{s\uparrow t} X_s \ (t \in [0,T)), \quad X_{0-} := 0$$

und den Sprungprozess $\triangle X$ durch

$$\triangle X_t = X_t - X_{t-}.$$

Mit $[X,X]$ bezeichnen wir die quadratische Variation eines Semimartingals und mit $[X,Y]$ die quadratische Kovariation zweier Semimartingale.

5.3.5 Bemerkung. Da die betrachtete Filtrierung vollständig ist, ist zu einem Semimartingal X der Prozess X_{t-} adaptiert und per Definition câglad.

Nun erhalten wir folgendes Lemma.

5.3.6 Lemma. *Sie $C = (C_t)_{t\in[0,T]} \subset L^2(\Omega)$ ein reeller adaptierter càdlag Prozess von endlicher Variation mit $C_0 = 0$, $z \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, H')$ und $Y_0 \in \mathbb{R}$.*

Setze $M := \int z dW$ und betrachte das Semimartingal $Y := Y_0 - C + M$. Ist $\sup_{s\in[0,T]} |Y_s| \in L^2(\Omega)$, dann gilt für alle Stoppzeiten $\tau \in \mathcal{T}$

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\left[\int_0^\tau \|z\|_{H'}^2 ds\right] ds = \|Y_\tau\|_{L^2(\Omega)}^2 - (Y_0)^2 - \mathrm{E}\left[\sum_{s\in(0,\tau]} (\triangle C_s)^2\right] \\ + 2\mathrm{E}\left[\int_0^\tau Y_{s-} dA_s\right]. \end{aligned} \tag{5.42}$$

Beweis: Seien C, z, M und Y wie im Lemma definiert und $\tau \in \mathcal{T}$ beliebig. Nach der Definition der quadratischen Variation von Y (siehe [Pro04], Definition auf S.66) gilt

$$Y_\tau^2 = [Y,Y]_\tau - \int_0^\tau Y_{s-} dY_s. \tag{5.43}$$

Da die quadratische Kovariation zweier Semimartingale bilinear und symmetrisch ist (siehe [Pro04] S.66), ergibt sich aus der Gestalt von Y

$$[Y,Y] = [Y_0 + M, Y_0 + M] - 2[Y_0 + M, C] + [C,C].$$

A ist nun adaptiert, càdlag und von endlicher Variation mit $A_0 = 0$. Daher erhalten wir für jedes Semimartingal X

$$[C,X]_\tau = \sum_{s\in(0,\tau]} \triangle C_s \triangle X_s$$

(siehe [Pro04] S.71, Theorem 26 und S.75 Theorem 28). Insbesondere ist $[C,C]_\tau = \sum_{s\in(0,\tau]} (\triangle C_s)^2$ und wegen der Stetigkeit von M ist $[Y_0+M, C] = 0$. Wir setzen dies in (5.43) ein und bekommen

$$\begin{aligned} (Y_\tau)^2 = (Y_0)^2 + [M,M]_\tau + \sum_{s\in(0,\tau]} (\triangle C_s)^2 \\ - 2\int_0^\tau Y_{s-} dM_s - 2\int_0^\tau Y_{s-} dA_s. \end{aligned} \tag{5.44}$$

Da M ein Martingal ist, ist der stochastische Integralprozess $t \mapsto \int_0^t Y_{s-} dM$ ein lokales Martingal (siehe [Pro04] S.63 Theorem 20). Für die quadratische Variation dieses lokalen Martingals gilt nach [Pro04] (S. 75 Theorem 29)

$$\left[\int Y_{s-} dM_s, \int Y_{s-} dM_s\right]_\tau = \int_0^\tau Y_{s-} d[M,M]_s.$$

Da $[M,M]$ von endlicher Variation ist, ist der Integral-Prozess $\int Y_{s-}d[M,M]_s$ ununterscheidbar von dem pfadweisen Lebesgue-Stieltjes Integral (siehe [Pro04] S.61 Theorem 70). $[M,M]$ ist dabei sogar monoton wachsend, das heißt $d[M,M]$ ist fast sicher ein (positives) Maß auf $[0,T]$. Daraus folgt

$$\int_0^T Y_{s-}d[M,M]_s \leq \sup_{s\in[0,T]} |Y_{s-}| d[M,M]_s([0,T]) \leq \sup_{s\in[0,T]} |Y_s| M_T.$$

Nach Voraussetzung sind $M_T, \sup_{s\in[0,T]} |Y_s| \in L^2(\Omega)$. Daher ergibt sich mit der Hölderschen Ungleichung

$$\mathrm{E}\left[\left[\int Y_{s-}dM_s, \int Y_{s-}dM_s\right]_T\right] \leq \sup_{s\in[0,T]} \|Y_s\|_{L^2(\Omega)} \|M_T\|_{L^2(\Omega)} < \infty.$$

Die quadratische Variation des lokalen Martingals $\left(\int_0^t Y_{s-}dM\right)_{t\in[0,T]}$ ausgewertet an T ist also in $L^1(\Omega)$. Damit ist $\int Y_{s-}dM$ sogar ein Martingal (siehe [Pro04] S.73 Korollar 3). Insbesondere ist wegen $(\int Y_{s-}dM)_0 = Y_{0-}M_0 = 0$ und dem Satz über optionales Stoppen auch

$$\mathrm{E}\left[\int_0^\tau Y_{s-}dM_s\right] = 0.$$

Demnach folgt aus (5.44)

$$\begin{aligned} \|Y_\tau\|^2_{L^2(\Omega)} = Y_0^2 + \mathrm{E}[[M,M]_\tau] + \mathrm{E}\left[\sum_{s\in(0,\tau]} (\triangle C_s)^2\right] \\ - 2\mathrm{E}\left[\int_0^\tau Y_{s-}dA_s\right]. \end{aligned} \tag{5.45}$$

Nach Definition 2.4.33 und Bemerkung 2.4.35 ist

$$[M,M]_\tau = \int_0^\tau \|Z_s\|_{H'} ds$$

und die Behauptung ergibt sich durch Umstellen von (5.45). □

Nun können wir folgendes Resultat über K-wertige Prozesse beweisen.

5.3.7 Lemma. *Sei* $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H,K))$, $(A^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega, K)$ *eine Folge* K*-wertiger monoton wachsender adaptierter càdlag Prozesse mit* $A_0^n = 0$ $(n \in \mathbb{N})$ *und* $(Y_0^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset K$. *Für* $n \in \mathbb{N}$ *definiere* $M_n := \int Z^n dW$ *und*

$$Y^n := Y_0^n - A^n + M^n. \tag{5.46}$$

Existiert ein $\gamma > 0$ mit

$$\mathrm{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \sup_{t\in[0,T]} |Y_t^{n,k}|^2\right] \leq \gamma \quad (n \in \mathbb{N}), \tag{5.47}$$

dann ist $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H,K))$ und $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega_T, K)$ beschränkt.

Beweis: Seien $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(Y_0^n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(M^n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ wie im Lemma definiert. Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist A^n càdlag und damit insbesondere $\mathcal{F} \otimes \mathcal{B}([0,T])$ messbar. Weiter ist A^n monoton wachsend und positiv. Da $\|\cdot\|_K$ eine Verbandsnorm ist, ist somit auch $\|A^n\|_K$ monoton wachsend. Daher folgt mit der Hölderschen Ungleichung

$$\|A^n\|_{L^2(\Omega_T,K)} \leq \sqrt{T}\|A_T^n\|_{L^2(\Omega,K)}.$$

Für die Beschränktheit von $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega_T, K)$ genügt es also, die Beschränktheit der Folge $(A_T^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega, K)$ zu zeigen. Sei $n \in \mathbb{N}$ beliebig. Zunächst folgt unmittelbar aus (5.46) mit (5.47) und der Ito-Isometrie

$$\begin{aligned}\|A_T^n\|^2_{L^2(\Omega,K)} &\leq 4\|Y_0\|_K^2 + 4\|Y_T^n\|^2_{L^2(\Omega,K)} + 2\|M_T^n\|^2_{L^2(\Omega_K)} \\ &\leq C_1 + 2\|M_T^n\|^2_{L^2(\Omega_K)} = C_1 + \|Z\|^2_{L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T,\mathcal{S}_2(H,K))}\end{aligned} \tag{5.48}$$

für ein $C_1 = C_1(\gamma) > 0$. Sei nun auch $k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann erfüllen $Y^{n,k}$, $Z^{n,k}$ und $A^{n,k}$ die Bedingungen aus Lemma 5.3.6. Danach gilt

$$\begin{aligned}\|Z^{n,k}\|^2_{L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T,H')} &= \|Y_t^{n,k}\|^2_{L^2(\Omega)} - (Y_0^{n,k})^2 - \mathrm{E}\left[\sum_{s\in(0,t]} \left(\triangle A_s^{n,k}\right)^2\right] \\ &\quad + 2\mathrm{E}\left[\int_0^t Y_{s-}^{n,k} dA_s^{n,k}\right] \\ &\leq \|Y_T^{n,k}\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\mathrm{E}\left[\int_0^T Y_{s-}^{n,k} dA_s^{n,k}\right].\end{aligned}$$

Da $A^{n,k}$ sogar monoton wachsend mit $A_0^{n,k} = 0$ ist, definiert $dA^{n,k}$ fast sicher ein (positives) Maß auf $[0,T]$ mit $dA^{n,k}([0,T]) = A_T^{n,k}$. Daraus erhalten wir unter Verwendung der Ungleichung von Cauchy

$$\begin{aligned}\|Z^{n,k}\|^2_{L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T,H')} &\leq \|Y_T^{n,k}\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\mathrm{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} |Y_s^{n,k}| A_T^{n,k}\right] \\ &\leq \|Y_T^{n,k}\|^2_{L^2(\Omega)} + 4\mathrm{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} |Y^{n,k}|^2\right] + \frac{1}{4}\|A_T^{n,k}\|_{L^2(\Omega)}.\end{aligned}$$

Da dies für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, ergibt sich mit monotoner Konvergenz und (5.47)

$$\begin{aligned}\|Z^n\|^2_{L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T,\mathcal{S}_2(H,K))} &\leq \|Y^n_T\|^2_{L^2(\Omega,K)} + 4\mathrm{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \sup_{s\in[0,T]} |Y^{n,k}_s|^2\right] \\ &\quad + \frac{1}{4}\|A^n_T\|^2_{L^2(\Omega,K)} \\ &\leq C_2 + \frac{1}{4}\|A^{n,k}_T\|^2_{L^2(\Omega,K)}\end{aligned} \tag{5.49}$$

für ein $C_2 = C_2(\gamma)$. Durch Einsetzen in (5.48) bekommen wir insgesamt

$$\|A^n_T\|^2_{L^2(\Omega,K)} \leq C_1 + 2C_2 + \frac{1}{2}\|A^n_T\|^2_{L^2(\Omega;K)}.$$

$(A^n_T)_{n\in\mathbb{N}}$ ist also tatsächlich in $L^2(\Omega, K)$ beschränkt und aus (5.49) folgt somit, dass $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H,K))$ beschränkt ist. □

Um die Existenz einer minimalen Superlösung zu beweisen, benötigen wir folgende Eigenschaften an den Generator. Wir nennen einen kompatiblen Generator

(con) konvex, falls $g_t(y, \lambda z + (1-\lambda z')) \leq \lambda g_t(y,z) + (1-\lambda) g_t(y,z')$ für alle $t \in [0,T]$, $y \in H$, $z, z' \in \mathcal{S}_2(H,K)$ und $\lambda \in (0,1)$ gilt.

(wac) monoton wachsend, falls $g_t(y,z) \geq g_t(y',z)$ für alle $t \in [0,T]$, $y, y' \in H$ mit $y \geq y'$ und $z \in \mathcal{S}_2(H;K)$ gilt.

(fal) monoton fallend, falls $g_t(y,z) \leq g_t(y',z)$ für alle $t \in [0,T]$, $y, y' \in H$ mit $y \geq y'$ und $z \in \mathcal{S}_2(H;K)$ gilt.

(hvu) halbstetig von unten, falls für alle $k \in \mathbb{N}$, $t \in [0,T]$ $(y,z) \mapsto g^k_t(y,z)$ halbstetig von unten ist.

Außerdem benötigen wir folgende Defintion.

5.3.8 Definition. Sei V ein reeller Vektorraum. Für eine Teilmenge $D \subset V$ nennen wir

$$\operatorname{conv} D := \left\{\sum_{i=1}^N \lambda_i x_i : N \in \mathbb{N}, x_i \in D, \lambda_i \in [0,1], \sum_{i=1}^N \lambda_i = 1\right\}$$

die konvexe Hülle von D. Wir sagen eine Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$ ist in der asymptotisch konvexen Hülle von $(y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset V$, falls

$$y_n \in \operatorname{conv}\{x_i : i \geq n\} \quad (n \in \mathbb{N}).$$

Damit können wir nun das Existenztheorem formulieren.

5.3.9 Theorem. *Sei g ein positiver kompatibler Generator, der (con),(hvu) und (wac) oder (fal) sowie (H1.1) erfüllt, $\xi \in L^2(\Omega, H)$ eine Endbedingung und $\mathcal{A}(\xi, g) \neq \emptyset$. Dann existiert eine minimale Superlösung $\hat{Y}, \hat{Z} \in \mathcal{A}(\xi, g)$, wobei der Werteprozess durch $\hat{Y} = \mathcal{E}^g(\xi)$ gegeben ist. Ist $(\tilde{Y}, \tilde{Z}) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ eine weitere minimale Superlösung, so sind $\hat{Y}$ und $\tilde{Y}$ ununterscheidbar und $\hat{Z} = \tilde{Z}$ als Gleichheit in $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H, K))$.*

Beweis: **Schritt1:** Zunächst zeigen wir die Eindeutigkeit. Wir nehmen an, dass ein $\hat{Z} \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T; \mathcal{S}_2(H; K))$ existiert, so dass $(\mathcal{E}^g(\xi), \hat{Z}) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ ist. Da $\mathcal{E}^g(\xi)$ eine Modifiaktion von $\hat{\mathcal{E}}^g(\xi)$ ist, gilt für alle $(Y, Z) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ und $t \in [0, T]$ bereits $Y_t \geq \mathcal{E}^g_t(\xi)$. $(\mathcal{E}^g(\xi), \hat{Z})$ ist also tatsächlich eine minimale Superlösung. Ist $(\tilde{Y}, \tilde{Z}) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ eine weitere, so gilt aber auch $\tilde{Y}_t \leq \mathcal{E}^g_t(\xi)$ für alle $t \in [0, T]$. In diesem Fall ist $\tilde{Y}$ also eine Version von $\mathcal{E}^g(\xi)$. Da beides per Definition von $\mathcal{A}(\xi, g)$ càdlag Prozesse sind, sind Y und $\mathcal{E}^g(\xi)$ damit ununterscheidbar. Die Eindeutigkeit von $\hat{Z}$ folgt dann aus Lemma 5.2.4.

Es bleibt also zu zeigen, dass es tatsächlich einen Kontrollprozess $\hat{Z} \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H; K))$ mit $(\mathcal{E}^g(\xi), \hat{Z}) \in \mathcal{A}(\xi, g)$ gibt.

Schritt2: Wegen $\mathcal{A}(\xi, g) \neq \emptyset$ exsitiert nach Satz 5.3.3 eine Folge $(Y^n, Z^n) \subset \mathcal{A}(\xi, g)$, die (5.24) und (5.25) erfüllt. Nun ist $\xi \in L^2(\Omega, K)$ und damit $(\mathrm{E}[\xi|\mathcal{F}_t])_{t\in[0,T]} \subset L^2(\Omega, K)$. Da $(\mathcal{F}_t)_{t\in[0,T]}$ die von W erzeugte normale Filtrierung ist, erhalten wir mit einem erweiterten Martingaldarstellungssatz aus [HP90] (S.167, Corollary 3.2), dass das Martingal $(\mathrm{E}[\xi|F_t])_{t\in[0,T]}$ eine stetige Version hat. Diese betrachten wir im Folgenden. Nach Lemma 5.2.2 und (5.25) gilt

$$Y^n_t \geq Y^{n+1}_t \geq \mathrm{E}[\xi|\mathcal{F}_t] \quad \text{f.s.}$$

für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in [0, T]$. Da alle Prozesse in dieser Ungleichung càdlag sind, existiert sogar eine Nullmenge $N \in \mathcal{F}$, so dass für alle $t \in [0, T]$ und alle $\omega \in \Omega \setminus N$

$$Y^n_t(\omega) \geq Y^{n+1}_t(\omega) \geq \mathrm{E}[\xi|\mathcal{F}_t](\omega) \tag{5.50}$$

gilt. Für $(\omega, t) \in \Omega \setminus N \times [0, T]$ ist $(Y^n_t(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ also eine monoton fallende von unten beschränkte Folge in K. Da K ordnungsstetig ist existiert nach Satz 3.2.4 für $(\omega, t) \in \Omega \setminus N \times [0, T]$ ein $\bar{Y}_t(\omega) \in K$ mit

$$\bar{Y}_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} Y^n_t(\omega).$$

Setzen wir noch $\bar{Y}_t(\omega) := 0$ für $\omega \in N$, so ist -unter Beachtung der Vollständigkeit der Filtrierung- für alle $t \in [0, T]$ $\bar{Y}_t$ als fast sicherer Grenzwert $\mathcal{F}_t - \mathcal{B}(K)$ messbarer Funktionen selbst $\mathcal{F}_t - \mathcal{B}(K)$ messsbar, also adaptiert. Aus (5.50) und der Abschätzung (5.5) in Lemma 5.2.2 ergibt sich für alle $n \in \mathbb{N}$ und $t \in [0, T]$

$$\mathrm{E}[\xi|\mathcal{F}_t] \leq Y_t^n \leq Y_t^1 \leq Y_0^1 + \int_0^t Z_s^1 dW_s. \tag{5.51}$$

Daraus folgt unmittelbar

$$0 \leq Y_t^n - \mathrm{E}[\xi|\mathcal{F}_t] \leq Y_0^1 + \int_0^t Z_s^1 dW_s - \mathrm{E}[\xi|\mathcal{F}_t].$$

und da $\|\cdot\|_K$ eine Verbansdnorm ist schließlich

$$\|Y_t^n - \mathrm{E}[\xi|\mathcal{F}_t]\|_K \leq \|\mathrm{E}[\xi|\mathcal{F}_t]\|_K + \|Y_0^1\|_K + \left\| \int_0^t Z_s^1 dW_s \right\|_K .$$

Da alle Zufallsvariablen auf der rechten Seite in $L^2(\Omega, K)$ liegen, folgt mit majorisierter Konvergenz auch $Y_t^n \to \bar{Y}_t$ $(n \to \infty)$ in $L^2(\Omega, K)$ für alle $t \in [0, T]$. Da die Abbildung $x \mapsto \mathrm{E}[x|F_s]$ ein beschränkter Operator von $L^2(\Omega, K)$ nach $L_s^2(\Omega, K)$ ist (siehe Lemma 2.3.2), gilt auch $\mathrm{E}[Y_t^n|\mathcal{F}_s] \to \mathrm{E}[\bar{Y}_t|\mathcal{F}_s]$ $(n \to \infty)$ in $L_s^2(\Omega, K)$ für alle $0 \leq s \leq t \leq T$. Mit der Abgeschlossenheit des positiven Kegels in $L_s^2(\Omega, K)$ erhalten wir daraus zusammen mit der Supermartingaleigenschaft von Y für $0 \leq s \leq t \leq t$

$$\mathrm{E}[\bar{Y}_t|F_s] = \lim_{n\to\infty} \mathrm{E}[Y_t^n|\mathcal{F}_s] \leq \lim_{n\to\infty} Y_s^n = \bar{Y}_s$$

als Ungleichung in $L_s^2(\Omega, K)$. Damit ist $\bar{Y}$ also ebenfalls ein Supermartingal und erfüllt wegen (5.51) die Abschätzung

$$E[\xi|F_t] \leq \bar{Y}_t \leq Y_0^1 + \int_0^t Z_s^1 dW_s.$$

Mit denselben Argumenten wie bei der Konstruktion von $\mathcal{E}^g(\xi)$ im Beweis von Lemma 5.2.7 können wir das câdlag Supermartingal $\tilde{Y}$ durch

$$\tilde{Y}_t := \lim_{s\downarrow t, s\in\mathbb{Q}} \bar{Y}_s \ (t \in [0, T]), \quad \bar{Y}_T = \xi$$

definieren. Da $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$(5.24) erfüllt, gilt $\bar{Y}_t = \hat{\mathcal{E}}_t^g(\xi)$ für alle $t \in$ Dyad und somit $\tilde{Y} = \mathcal{E}^g(\xi)$. Es ist nun a-priori aber nicht klar, dass $(Y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in einem für uns nützlichen Sinne gegen $\mathrm{E}^g(\xi)$ konvergiert. Dazu müssen wir zunächst auch die Folge $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ betrachten.

Schritt 3: Für alle $n \in \mathbb{N}$ besitzt Y^n die Darstellung

$$Y^n = Y_0^n - A^n + M_t^n \tag{5.52}$$

mit $M_t^n := \int_0^t Z_s^n dW_s$ für einen K-wertigen monoton wachsenden adaptierten càdlag Prozess A^n mit $A_0^n = 0$ nach Lemma 5.2.4. Aus (5.51) folgt für alle $n, k \in \mathbb{N}$

$$\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^{n,k}| \leq \sup_{t\in[0,T]} \left|\mathrm{E}[\xi^k | F_t]\right| + \sup_{t\in[0,T]} \left|\int_0^t Z_s^{1,k} dW_s\right| + |Y_0^{1,k}|.$$

Wie oben schon angemerkt sind $\mathrm{E}[\xi^k|\mathcal{F}_t]$ und $\int Z^{1,k}$ beides stetige reelle L^2-Martingale. Aus der Doobschen Maximalungleichung und der Ito-Isometrie ergibt sich so für ein $\gamma > 0$

$$\mathrm{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^{n,k}|^2\right] \leq \gamma \left(\|\xi^k\|_{L^2(\Omega)} + \|Z^{1,k}\|_{L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T,H')} + |Y_0^{1,k}|^2\right)$$

Dies gilt für alle $k \in \mathbb{N}$. Mit monotoner Konvergenz erhält man daraus

$$\mathrm{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \sup_{t\in[0,T]} |Y_t^{n,k}|^2\right] \leq \gamma \left(\|\xi\|^2_{L^2(\Omega,K)} + \|Z^1\|^2_{L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T,\mathcal{S}_2(H,K))} + \|Y_0^{1,k}\|\right)$$

Damit erfüllt $(Y^n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Voraussetzungen aus Lemma 5.3.7. Also ist $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H,K))$ beschränkt. Da $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H,K))$ ein separabler Hilbertraum ist, existiert eine Teilfoge von $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$, die wir ebenfalls mit $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichnen, und ein $Z \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H,K))$, so dass $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$ schwach gegen Z konvergiert. Somit existiert eine weitere Folge $(\bar{Z}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus der asymptotischen konvexen Hülle von $(Z^n)_{n\in\mathbb{N}}$, die in $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(K,H))$ stark gegen ein $\bar{Z} \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H,K))$ konvergiert. Durch Übergang zu einer weiteren Teilfolge -ohne die Notation zu ändern- erhalten wir nach Satz 2.1.18 eine Folge $(\bar{Z}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ die $P\otimes\lambda$-fast überall und in $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H,K))$ gegen $\bar{Z}$ konvergiert. Setze nun für $n \in \mathbb{N}$

$$\bar{M}^n := \int \bar{Z} dW, \quad \bar{M} := \int \bar{Z} dW.$$

Aus der Ito-Isometrie ergibt sich

$$\bar{M}^n \to \bar{M} \quad (n \to \infty)$$

in $\mathcal{M}_T^2(K)$ und damit in $L^2(\Omega, C([0,T],K))$. Wieder erhalten wir durch Übergang auf eine Teilfolge eine Folge $(\bar{M}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ so dass $(\bar{M}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $C([0,T],K)$ fast sicher und in $\mathcal{M}_T^2(K)$ gegen $\bar{M}$ konvergiert. $(\bar{Z}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bezeichne von nun an die zu $(\bar{M}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörende Folge der Integranten.

Wir werden zeigen, dass $\bar{Z}$ der Kontrollprozess zu $\mathcal{E}^g(\xi)$ ist.

Schritt 4: Dazu beweise zunächst

$$\mathcal{E}^g(\xi) = \bar{Y} = \lim_{n\to\infty} Y^n \quad P\otimes\lambda\text{-f.s.}.$$

Betrachte dafür die zu $(\bar{Z}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ korrespondierende Folge $(\bar{Y}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ in der asymptotischen konvexen Hülle von $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Das heißt ist $\bar{Z}^n = \sum_{i=1}^{N^n}$ für $N^n \geq n$, $n \leq i \leq N^n$ und $\lambda_i^n > 0$ mit $\sum_{i=n}^{N^n} \lambda_i^n = 1$, so setze

$$\bar{Y}^n := \sum_{i=1}^{N^n} \lambda_i^{N^n} Y^i.$$

Beachte, dass für alle $t\in[0,T]$ für jedes $n\in\mathbb{N}$

$$\|\bar{Y}_t^n - \bar{Y}_t\|_K \leq \sup_{l\geq n} \|Y_t^l - \bar{Y}_t\|_K.$$

Da fast sicher gilt, dass $(Y_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $t\in[0,T]$ gegen $\bar{Y}$ konvergiert, trifft das somit auch auf $(\bar{Y}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ zu. Aus der Darstellung (5.52) für Y^n erhalten wir die Zerlegung

$$\bar{Y}^n = \bar{Y}_0^n - \bar{A}^n + \bar{M}^n$$

für eine entsprechende Folge von Prozessen $(\bar{A}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus der konvexen Hülle von $(A^n)_{n\in\mathbb{N}}$, die als Konvexkombinationen offensichtlich auch monoton wachsend càdlag, adaptiert sind und $\bar{A}^n = 0$ erfüllen. Nach der Argumentation in Schritt 2 und Schritt 3 gilt fast sicher, dass $(\bar{Y}_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\bar{M}_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $t\in[0,T]$ gegen $\bar{Y}_t$ bzw. $\bar{M}_t$ konvergieren. Daher konvergiert $(\bar{A}_t^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $t\in[0,T]$ gegen

$$\bar{A}_t := \bar{Y}_0 - \bar{Y}_t + \bar{M}_t, \quad \text{f.s.} \tag{5.53}$$

Wegen der Abgeschlossenheit des positiven Kegels in K, ist auch $\bar{A} = (\bar{A}_t)_{t\in[0,T]}$ ein monoton wachsender Prozess. Da K ordnungsstetig und $\bar{A}$ monoton wachsend ist, gilt fast sicher, dass für alle $t\in[0,T)$ bzw. $t\in(0,T]$ die rechten und linken Grenzwerte

$$\bar{A}_{t+} = \lim_{s\downarrow t} \bar{A}_s \quad \text{bzw.} \quad \bar{A}_{t-} = \lim_{s\uparrow t} \bar{A}_s$$

existieren und die Menge $\{t \in [0,T] : \bar{A}_{t+} \neq \bar{A}_{t-}\}$ abzählbar ist (siehe Lemma 3.4.3 und Lemma 3.4.4). Nach Defintion von $\bar{A}$ gilt

$$\bar{Y} = \bar{Y}_0 - \bar{A} + \bar{M}$$

und in Schritt 2 haben wir

$$\mathcal{E}_t^g(\xi) = \lim_{s \downarrow t, s \in \mathbb{Q}} \bar{Y}_s$$

festgestellt. Da $\bar{M}$ ein stetiger Prozesse ist, folgt daraus

$$\mathcal{E}_t^g(\xi) = \bar{Y}_0 - \bar{A}_{t+} + \bar{M}_t \quad (t \in [0,T])$$

und somit

$$\mathcal{E}_t^g(\xi) - \bar{Y}_t = \bar{A}_t - \bar{A}_{t+} \quad (t \in [0,T]),$$

Genauso erhalte

$$\triangle \mathcal{E}_t^g(\xi) = \mathcal{E}_t^g(\xi) - \lim_{s \uparrow t} \mathcal{E}_s^g(\xi) = A_{t+} - A_{t-} \quad (t \in [0,T]).$$

Insgesamt ergibt sich mit $\bar{A}_{t+} \geq \bar{A}_t \geq \bar{A}_{t-}$ folgende Gleichheit von Teilmengen von Ω_T bis auf Ununterscheidbarkeit

$$\{\mathcal{E}_t^g(\xi) \neq \bar{Y}_t\} = \{\bar{A}_{t+} > \bar{A}_t\} \subset \{\bar{A}_{t+} > \bar{A}_{t-}\} = \{\triangle \mathcal{E}_t^g(\xi) \neq 0\}.$$

Da $\tilde{Y}^k$ für jedes $k \in \mathbb{N}$ ein reeller càdlag Prozess ist, existieren für alle $k \in \mathbb{N}$ Folgen von Stoppzeiten $(\rho_j^k)_{j \in \mathbb{N}}$, die $\{\triangle \tilde{Y}_t^k \neq 0\}$ ausschöpfen (siehe [Nik06] S.354 Proposition 2.43), das heißt bis auf Ununterscheidbarkeit gilt

$$\{(\omega,t) \in \Omega_T : \triangle \left(\mathcal{E}_t^g(\xi)\right)^k(\omega) \neq 0\} = \dot{\bigcup_{j \in \mathbb{N}}} \{(\omega, \rho_j^k(\omega)) : \omega \in \Omega\}.$$

Als Graphen von $\mathcal{F} - \mathcal{B}([0,T])$ messbaren Funktionen, sind die Mengen $\{(\omega, \rho_j^k(\omega)) : \omega \in \Omega\}$ offensichtlich $P \otimes \lambda$-Nullmengen. Daher ist auch $\{\triangle \mathcal{E}_t^g(\xi) \neq 0\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} \{\triangle \left(\mathcal{E}_t^g(\xi)\right)^k \neq 0\}$ eine $P \otimes \lambda$-Nullmenge. Insgesamt gilt also

$$\mathcal{E}^g(\xi) = \bar{Y} = \lim_{n \to \infty} Y^n \quad P \otimes \lambda\text{-f.s..}$$

Schritt 5 Nun können wir verifizieren, dass $(\mathcal{E}^g(\xi), \bar{Z})$ tatsächlich (5.1) erfüllen. Da der Generator kompatibel ist, genügt es, für jedes k zu zeigen, dass $\left(\left(\mathcal{E}^g(\xi)\right)^k, \bar{Z}^k\right)$ (5.4) genügen. Wähle zunächst eine Menge $B \subset \mathcal{F} \otimes$

$\mathcal{B}([0,T])$ mit $P(B) = 1$ so dass $\bar{Z}(\omega) = \lim_{n\to\infty} \bar{Z}^n(\omega)$ und $\lim_{n\to\infty} = \bar{Y}^n = \mathcal{E}_t^g(\xi)$ für alle $(\omega, t) \in B$ gilt. Für $\omega \in \Omega$ setze dann $I(\omega) = \{t \in [0,T] : (\omega, t) \in B\}$. Nach dem Prinzip von Cavalieri existiert dann eine Menge $D \in \mathcal{F}$ mit $P(D) = 1$, so dass für alle $\omega \in D$ $\lambda(I(\omega)) = T$ gilt. Setze außerdem

$$\begin{aligned}
S &:= \{\omega \in \Omega : \forall n \in \mathbb{N}, t \in [0,T] : Y_t^n \geq Y_t^{n+1} \geq \mathcal{E}_t^g\}, \\
Q &:= \{\omega \in \Omega : \forall t \in [0,T] : \bar{M}_t(\omega) = \lim_{n\to\infty} \bar{M}_t^n(\omega)\}, \\
R &:= \{\omega \in \Omega : \forall n \in \mathbb{N}, t \in [0,T] : (Y^n, Z^n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ erfüllt (5.1)}\}.
\end{aligned}$$

Nach Schritt 2 des Beweises ist $P(S) = 1$, nach Schritt 3 $P(Q) = 1$ und nach Bemerkung 5.1.3 $P(R) = 1$

Im folgenden betrachten wir Ungleichungen für $\omega \in D \cap Q \cap S \cap R$, $s, t \in I(\omega)$ mit $s \leq t$. Aus Gründen der Lesbarkeit unterdrücken wir die Abhängigkeit von ω in der Notation. $k \in \mathbb{N}$ sei beliebig gewählt und wir setzen

$$(\mathcal{E}_t^g(\xi))^k =: \mathcal{E}_t^{g,k}(\xi).$$

Da g (hvu) erfüllt, erhalten wir aus $\bar{Z}_t = \lim_{n\to\infty} \bar{Z}_t^n$ λ-f.ü.

$$\liminf_{n\to\infty} g_t^k(\mathcal{E}_t^g(\xi), \bar{Z}^{n,k}) \geq g^k(\mathcal{E}^{g,k}(\xi), \bar{Z}) \quad \lambda\text{-f.ü..}$$

Da g außerdem positiv ist, folgt daraus mit Fatous Lemma für alle $0 \leq s \leq t$

$$\liminf_{n\to\infty} \int_s^t g_u^k(\mathcal{E}_u^{g,k}(\xi), \bar{Z}_u^{n,k}) du \geq \int_s^t g_u^k(\mathcal{E}_u^{g,k}(\xi), \bar{Z}^k) du. \tag{5.54}$$

Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_s^{g,k} - \int_s^t g_u^k(\mathcal{E}_u^{g,k}, \bar{Z}_u^k) du + \int_s^t \bar{Z}_u^k dW_u \\
&\qquad \geq \limsup_{n\to\infty} \left(\bar{Y}_s^n - \int_s^t g_u^k(\mathcal{E}_u^{g,k}, \bar{Z}_u^{n,k}) + \int_s^t \bar{Z}_u^{n,k} dW_u \right).
\end{aligned} \tag{5.55}$$

Dabei ist $(\bar{Y}^n, \bar{Z}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus der asymptotischen konvexen Hülle von $(Y^n, Z^n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{A}(\xi, g)$. Für alle $n \in \mathbb{N}$ existieren also ein $N^n \geq n$ und $\lambda_i^n > 0$, $n \leq i \leq N^n$ mit $\sum_{i=n}^{N^n} \lambda_i^n = 1$, so dass $(\bar{Y}^n, \bar{Z}^n) = \sum_{i=1}^{N^n} \lambda_i^n (Y^i, Z^i)$. Da g (con) erfüllt, erhalten wir aus (5.55)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_s^{g,k} - \int_s^t g_u^k(\mathcal{E}_u^{g,k}, \bar{Z}_u^k) du + \int_s^t \bar{Z}_u^k dW_u \\
&\quad \geq \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N^n} \lambda_i^n \left(Y_s^{i,k} - \int_s^t g_u^k(\mathcal{E}_u^{g,k}, Z_u^{i,k}) du + \int_s^t Z_u^{i,k} dW_u \right).
\end{aligned} \tag{5.56}$$

Nehmen wir nun an, dass g (wac) erfüllt, so erhalten wir aus $Y_u^{i,k} \geq \mathcal{E}_u^{g,k}$ für alle $i \in \mathbb{N}$ und $u \in [0,T]$ sowie der Eigenschaft, dass $(Y^i, Z^i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Superlösungen ist

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_s^{g,k} - \int_s^t g_u^k(\mathcal{E}_u^{g,k}, \bar{Z}_u^k)du + \int_s^t \bar{Z}_u^k dW_u \\ \geq \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N^n} \lambda_i^n \left(Y_s^{i,k} - \int_s^t g_u^k(Y_u^{i,k}, Z_u^{i,k})du + \int_s^t Z_u^{i,k} dW_u \right) \\ \geq \limsup_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{N^n} \lambda_i^n Y_t^{i,k} = \lim_{n\to\infty} Y_t^{n,k} = \mathcal{E}_t^{g,k}. \end{aligned} \quad (5.57)$$

Für $s, t \notin I(\omega)$, können wir wegen $\lambda(I(\omega)) = T$, Folgen $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}, (t_n)_{n\in n} \subset I(\omega)$ mit $s_n \leq t_n$ $(n \in \mathbb{N})$ und $s_n \downarrow s$, $t_n \downarrow t$ wählen. Ungleichung (5.57) gilt dann mit s_n und t_n für alle $n \in \mathbb{N}$. Da alle Prozesse in (5.57) rechtsstetig sind, gilt (5.57) dann auch für s, t. Der Beweis unter der Vorraussetzung (wac) ist damit abgeschlossen.

Falls wir (fal) statt (wac) vorraussetzen, erhalten wir aus (hvu) und $\bar{Z} = \lim_{n\to\infty} \bar{Z}^n$, $\mathcal{E}^g = \lim_{n\to\infty} Y^n$ λ-f.ü.

$$\liminf_{n\to\infty} \int_s^t g_u^k(Y_u^{n,k}, \bar{Z}_u^{n,k})du \geq \int_s^t g_u^k(\mathcal{E}_u^{g,k}, \bar{Z}_u^k)du$$

und damit

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_s^{g,k} - \int_s^t g_u^k(\mathcal{E}_u^{g,k}, \bar{Z}_u^k)du + \int_s^t \bar{Z}_u^k dW_u \\ \geq \limsup_{n\to\infty} \left(\bar{Y}_s^n - \int_0^t g_u^k(Y_u^{n,k}, \bar{Z}_u^{n,k}) + \int_s^t \bar{Z}_u^{n,k} dW_u \right). \end{aligned} \quad (5.58)$$

Aus $Y_t^n \geq Y_t^i$ für alle $n, i \in \mathbb{N}$ mit $n \leq i$, folgt aus (fal) außerdem

$$-\int_s^t g_u^k(Y^{n,k}, \bar{Z}^{n,k})du \geq -\int_s^t g_u^k(Y^{i,k}, \bar{Z}^{n,k})du.$$

Da $\bar{Z}^n$ eine Konvexkombination aus Elementen Z^i mit $i \geq n$ ist, ergibt sich aus (5.58) wieder Ungleichung (5.57) und der Beweis geht von da an analog weiter.

Insgesamt existiert unter den Vorausetzungen (kon), (hvu) und (wac) oder (fal) ein $Z \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H;K))$ mit $(\mathcal{E}^g(\xi), Z) \in \mathcal{A}(\xi, g)$. Der Beweis ist damit abgeschlossen.

$\square$

6 Hilbertraumwertige Superlösungen von BSDEs mit Lipschitz-Generatoren

Die Argumentation in diesem Kapitels beruht größenteils auf dem Artikel [Pen99], in dem das hier vorgestellte Problem im reellwertigen Fall behandelt wird. Wir werden hier wie schon in Kapitel 4 den hilbertraumwertigen Fall untersuchen.

Die Situation sei dieselbe wie in Kapitel 4. Wir betrachten eine K-wertige stochastische Rückwärts-Differentialgleichung der Form

$$Y_t = \xi + \int_t^T g_s(Y_s, Z_s)ds + (A_T - A_t) - \int_t^T Z_s dW_s. \tag{6.1}$$

Dabei sind die Endbedingung $\xi \in L^2(\Omega, K)$, ein $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(K) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{S}_2(K; H)) - \mathcal{B}(K)$ messbarer Generator $g : \Omega_T \times K \times \mathcal{S}_2(H; K) \to K$ und ein monoton wachsender càdlag Prozess A mit $A_0 = 0$ gegeben. Wir betrachten den Fall, dass g uniform Lipschitz ist, d.h. g erfülle folgende Bedingungen:

(H2.1) Es existiert ein $\mu > 0$, so dass

$$\|g_t(y_1, z_1) - g_t(y_2, z_2)\|_K \leq \mu \Big(\|y_1 - y_2\|_K + \|z_1 - z_2\|_{\mathcal{S}_2(H;K)} \Big),$$

für alle $(\omega, t) \in \Omega_T$ und alle $(y_1, z_1), (y_2, z_2) \in K \times \mathcal{S}_2(H; K)$

(H2.2) Es gilt $(\omega, t) \mapsto g_t(0, 0) \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, K)$.

Insbesondere folgt aus (H2.1) und (H2.2)

$$(\omega, t) \mapsto g_t(Y_t, Z_t) \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, K)$$

für alle Prozesse $(Y, Z) \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, K) \times L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H; K))$.

Wir erhalten folgenden Existenz-und Eindeutigkeitssatz.

6.0.10 Satz. *Sei $\xi \in L^2(\Omega_T, K)$, A ein K-wertiger adaptierter monoton wachsender càdlag-Prozess mit $A_0 = 0$ und $A_T \in L^2(\Omega, K)$ sowie g ein Generator, der (H2.1) und (H2.2) erfüllt. Dann existiert eine eindeutige Lösung $(Y, Z) \in (L^2(\Omega_T, K) \cap \mathcal{S}(K)) \times L^2(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H; K))$ von (6.1) mit*

$$\mathrm{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \sup_{t\in[0,T]} |Y_t^k|^2\right] < \infty. \tag{6.2}$$

Beweis: Im Falle $A = 0$ folgt die Existenz und Eindeutigkeit einer eindeutigen Lösung $(Y, Z) \in L^2(\Omega_T, K) \times L^2(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H; K))$ aus [HP91]. Für nicht verschwindendes A betrachte die Gleichung

$$\tilde{Y}_t = \xi + \int_t^T g_s(\tilde{Y}_s - A_s, Z_s)ds - \int_t^T Z_s dW_s \tag{6.3}$$

Definiere nun $\tilde{g} : \Omega_T \times K \times \mathcal{S}_2(H; K) \to K$ durch $\tilde{g}_s(y, z) := g_s(y - A_s, z)$. Da A càdlag, also insbesondere progressiv messbar ist, ist $\tilde{g}$ $\mathcal{P} \otimes \mathcal{B}(K) \otimes \mathcal{B}(\mathcal{S}_2(K; H)) - \mathcal{B}(K)$ messbar. Offensichtlich erfüllt $\tilde{g}$ auch (H2.1). Da A monoton wachsend und positiv ist, ist auch $\|A\|_K$ monoton wachsend. Aus $A_T \in L^2(\Omega, K)$ folgt daher $A \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, K)$. Damit erfüllt $\tilde{g}$ auch (H2.2). Nach Definition von $\tilde{g}$ existiert wieder nach [HP91] eine eindeutige Lösung $(\tilde{Y}, Z) \in L^2(\Omega_T, K) \times L^2(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H; K))$ von (6.3) und $(\tilde{Y} + A, Z)$ ist die eindeutige Lösung von (6.1). Die càdlag-Eigenschaft des Werteprozesses lässt sich direkt aus der der Gleichung ablesen.

Um (6.2) zu zeigen, sei (Y, Z) die eindeutige Lösung von (6.1). Betrachte zunächst ein beliebiges $k \in \mathbb{N}$. Da A^k monoton wachsend ist, gilt

$$\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^k| \leq |\xi^k| + \int_0^T \left|g_s^k(Y_s, Z_s)\right| ds + \sup_{t\in[0,T]} \left|\int_t^T Z_s^k dW_s\right|.$$

Daraus erhalten wir mit Hölder-Ungleichung, Doobscher Maximalungleichung und Ito-Isometrie für ein $C > 0$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |Y_t^k|^2\right] \leq C\|\xi^k\|^2_{L^2(\Omega)} + C\mathrm{E}\left[\int_0^T |g_s^k(Y_s, Z_s)|^2 ds\right] \\ + C\mathrm{E}\left[\int_0^T \|Z_s^k\|^2_{H'} ds\right].\end{aligned}$$

Mit monotoner Konvergenz ergibt sich schließlich

$$\mathrm{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}}\sup_{t\in[0,T]}|Y_t^k|^2\right] \leq C\|\xi\|^2_{L^2(\Omega,K)} + C\|g_\bullet(Y_\bullet,Z_\bullet)\|^2_{L^2(\Omega_T,K)} + C\|Z\|^2_{L^2(\Omega_T,\mathcal{S}_2(H;K))}.$$

Nach den Voraussetzungen (beachte insbesondere (H2.1), (H2.2)) sind alle Normen auf der rechten Seite der Ungleichung endlich. Damit erfüllt Y (6.2). □

Wir fixieren nun ein g, dass (H2.1), (H2.2) erfüllt. Dazu betrachte eine Folge von Superlösungen $(Y^i,Z^i)_{i\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega_T,K)\times L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T,\mathcal{S}_2(H;K))$, die jeweils folgende Gleichung erfüllen

$$Y_t^i = \xi^i + \int_t^T g_s(Y_s^i,Z_s^i)ds + (A_T^i - A_t^i) - \int_t^T Z_s^i dW_s. \tag{6.4}$$

Dabei gelte $(\xi^i)_{i\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega,K)$. und die Folge $(A^i)_{i\in\mathbb{N}}$ genüge folgender Bedigung:

(H3.1) A^i ist stetig monoton, wachsend mit $A^i = 0$ und $A_T^i \in L^2(\Omega_T,K)$ $(i\in\mathbb{N})$.

Weiterhin erfülle $(Y^i)_{i\in\mathbb{N}} \subset L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_t,K)$ folgende Bedingungen:

(H4.1) Für alle $i\in\mathbb{N}$ gilt $Y_t^{i+1} \leq Y_t^i$ für alle $t\in[0,T]$, f.s. und

$$\mathrm{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}}\sup_{t\in[0,T]}|Y_t^k|^2\right] < \infty.$$

(H4.2) Es existiert ein $Y\in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T,K)$ mit

$$\mathrm{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}}\sup_{t\in[0,T]}|Y_t^k|^2\right] < \infty,$$

so dass $Y_t^i \to Y_t$ $(i\to\infty)$ für alle $t\in[0,T]$, f.s..

Unser Ziel ist nun, zu zeigen, dass auch Y der Werteprozess einer Superlösung von (6.1) ist. Wegen (6.2) aus Satz 6.0.10 ist Bedingung (H4.1) notwendig dafür. Zunächst betrachte folgende einfache Resultate.

6.0.11 Bemerkung. Es lässt sich unmittelbar aus der Gleichung ablesen, dass die Stetigkeit der A^i die Stetigkeit der Y^i impliziert. Darüberhinaus folgt aus (H4.1) und (H4.2) auch

$$\|Y^i\|_{L^2(\Omega_T,K)} \leq \|Y^0\|_{L^2(\Omega_T,K)} + \|Y\|_{L^2(\Omega_T,K)} < \infty.$$

Mit majorisierter Konvergenz gilt deshalb

$$\|Y^i - Y\|_{L^2(\Omega_T,K)} \to 0 \quad (i \to \infty). \tag{6.5}$$

Für jede Stoppzeit $\tau \in \mathcal{T}$ erhält man

$$\mathrm{E}[\|Y^i_\tau\|^2_K] \leq \mathrm{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \|Y^i_t\|^2_K\right] \leq \mathrm{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} \left(2\|Y^0_t\|^2_K + 2\|Y_t\|^2_K\right)\right] < \infty.$$

Damit ergibt sich erneut mit majorisierter Konvergenz

$$\|Y^i_\tau - Y_\tau\|_{L^2_\tau(\Omega,K)} \to 0 \quad (i \to \infty). \tag{6.6}$$

Um zu bewiesen, dass Y tatsächlich der Werteprozesse einer Superlösung ist, benötigen wir zunächst zwei Lemmas aus [Pen99] für den reellen Fall.

6.0.12 Lemma. *Sei A ein monoton wachsender reeller càdlag Prozees mit $A_0 = 0$ und $A_T \in L^2(\Omega)$. Dann existieren für alle $\epsilon, \delta > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$ und eine Familie von Stoppzeiten $(\sigma_l, \tau_l)_{1\leq l\leq N} \subset \mathcal{T}$ mit $0 < \sigma_l \leq \tau_l$ $(1 \leq l \leq N)$, so dass*

(i) $(\sigma_j, \tau_j] \cap (\sigma_i, \tau_i] = \emptyset$ *für alle* $1 \leq i, j \leq N$, $i \neq j$,

(ii) $\sum_{l=1}^N \mathrm{E}[\tau_l - \sigma_l] \geq T - \epsilon$,

(iii) $\sum_{l=1}^N \mathrm{E}\left[\sum_{t\in(\sigma_l,\tau_l]} \triangle A_t\right] < \delta$.

Beweis: Siehe [Pen99] (S.481, Lemma2.3) □

6.0.13 Lemma. *Für alle $i \in \mathbb{N}$ sei $x_i : [0, T] \to \mathbb{R}$ càdlag mit $x_i(t) \leq x_{i+1}(t)$ für alle $t \in [0, T]$. Außerdem existiere ein $x : [0, T] \to \mathbb{R}$, so dass für alle $t \in [0, T]$ $x_i(t) \to x(t)$ $(i \to \infty)$. Desweiteren gelte $x = b - a$ für eine càdlag Funktion b und eine monoton wachsende Funktion a mit $a(0) = 0$. Dann sind auch x und a càdlag.*

Beweis: Siehe [Pen99] (S.481 Lemma 2.2) □

Es lässt sich leicht folgern, dass dies auch für den K-wertigen Fall gilt.

6.0.14 Korollar. *Für alle $i \in \mathbb{N}$ sei $x_i : [0,T] \to K$ càdlag mit $x_i(t) \leq x_{i+1}(t)$ für alle $t \in [0,T]$. Außerdem existiere ein $x : [0,T] \to \mathbb{R}$, so dass für alle $t \in [0,T]$ $x_i(t) \to x(t)$ $(i \to \infty)$ in K. Desweiteren gelte $x = b - a$ für eine càdlag Funktion $b : [0,T] \to K$ und eine monoton wachsende Funktion $a : [0,T] \to K$ mit $a(0) = 0$. Dann sind auch a und x càdlag.*

Beweis: Es genügt offensichtlich zu zeigen, dass a càdlag ist. Da a monoton wachsend ist, existieren nach Lemma 3.4.3 die rechten und linken Grenzwerte von a. Es bleibt also zu zeigen, dass für alle $t \in [0,T)$ $a(t) = \lim_{s \downarrow t} a_s =: a(t+)$ gilt. Für jedes $k \in \mathbb{N}$ erfüllen x^k, a^k die Voraussetzungen von Lemma 6.0.13. Das heißt a^k ist càdlag. Damit ist für alle $t \in [0,T]$ und $k \in \mathbb{N}$ $a^k(t+) = a^k(t)$, also $a(t+) = a(t)$. □

Zunächst betrachten wir den Fall, dass g nicht von Y oder Z abhängt. Das heißt wir betrachten eine Folge von Prozessen der Form

$$Y_t^i = Y_T^i + \int_t^T g_s^i ds + (A_T^i - A_t^i) - \int_t^T Z_s^i dW_s.$$

Dies ist offensichtlich äquivalent zu der vorwärts Formulierung

$$Y_t^i = Y_0^i - \int_0^t g_s^i ds - A_t^i + \int_0^t Z_s^i dW_s. \tag{6.7}$$

Wir erhalten folgenden Satz.

6.0.15 Satz. *Sei $(Y^i)_{i\in\mathbb{N}} \subset L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, K)$ eine Folge, die (H2.1), (H2.2) erfüllt, und $(A^i)_{i\in\mathbb{N}} \subset L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, K)$ eine Folge, die (H3) erfüllt. Außerdem seien $(g^i)_{i\in\mathbb{N}} \subset L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, K)$ und $(Z^i)_{i\in\mathbb{N}} \subset L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H,K))$ jeweils beschränkt. Für alle $t \in [0,T]$ gelte*

$$Y_t^i = Y_0^i - \int_0^t g_s^i ds - A_t^i + \int_0^t Z_s^i dW_s. \tag{6.8}$$

Dann existieren ein $g^0 \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, K)$, ein monoton wachsender adaptierter càdlag Prozess A mit $A_0 = 0$ und $A_T \in L^2(\Omega, K)$ sowie ein $Z \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H; K))$, so dass

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t g_s^0 ds - A_t + \int_0^t Z_s dW_s. \tag{6.9}$$

Darüberhinaus konvergiert $(Z^i)_{i\in\mathbb{N}}$ für alle $p \in [1,2)$ in $L^p_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H,K))$ gegen Z.

Beweis:

Da $(g^i)_{i\in\mathbb{N}}$ bzw. $(Z^i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, K)$ bzw. in $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega, \mathcal{S}_2(H;K))$ beschränkt sind, existieren Teilfolgen, die wieder mit $(g^i)_{i\in\mathbb{N}}$ bzw. $(Z^i)_{i\in\mathbb{N}}$ bezeichnet werden, und $g^0 \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, K)$ bzw. $Z \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H;K))$ mit $g^i \rightharpoonup g$ bzw. $Z^i \rightharpoonup Z$.

Sei $\tau \in \mathcal{T}$ beliebig. Die Abbildungen

$$\begin{aligned} X &\mapsto \int_0^\tau X_s dW_s, \quad L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H;K)) \to L^2_\tau(\Omega, K) \\ f &\mapsto \int_0^\tau f_s ds, \quad L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, K) \to L^2_\tau(\Omega, K) \end{aligned}$$

sind linear und stetig. Also erhalten wir die schwachen Konvergenzen

$$\int_0^\tau g^i_s ds \rightharpoonup \int_0^\tau g^0_s ds, \quad \int_0^\tau Z^i_s dWs \rightharpoonup \int_0^\tau Z_s dW_s$$

in $L^2_\tau(\Omega, K)$. Nach Bemerkung 6.0.11 gilt $Y^i_\tau \to Y_\tau$ in $L^2_\tau(\Omega, K)$. Damit konvergiert

$$A^i_\tau = -Y^i_\tau + Y^i_0 - \int_0^\tau g^i ds + \int_0^\tau Z^i_s dW_s$$

in $L^2_\tau(\Omega, K)$ schwach gegen

$$A_\tau = -Y_\tau + Y_0 - \int_0^\tau g^0_s ds + \int_0^\tau Z_s dW_s.$$

Insbesondere erhalten wir für alle $B \in \mathcal{F}$ und $k \in \mathbb{N}$

$$\int \mathbb{1}_B A^{i,k}_\tau dP \to \int \mathbb{1}_B A^k_\tau dP \tag{6.10}$$

in K. Da für alle $i \in \mathbb{N}$ A^i ein monoton wachsender Prozess ist, gilt für zwei Stoppzeiten $\sigma, \tau \in \mathcal{T}$ mit $\sigma \leq \tau$ stets $A^{i,k}_\sigma \leq A^{i,k}_\tau$. Mit (6.10) folgt daraus $A^k_\sigma \leq A^k_\tau$. A^k ist also monoton wachsend. Da dies für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, ist auch A monoton wachsend. $A_0 = 0$ sowie $A_T \in L^2(\Omega, K)$ folgen direkt aus der Definition von A. Y ist also tatsächlich von der Gestalt (6.9). Da $-\int g^0 ds + \int Z_s dW_s$ ein stetiger Prozess und A monoton wachsend ist, ergibt sich aus Korollar 6.0.14, dass A und Y càdlag Prozesse sind. Beachte weiterhin, dass Y als Grenzwert von $(Y^i)_{i\in\mathbb{N}}$ eindeutig bestimmt ist. Daher ist nach Satz 6.0.10 Z in der Darstellung (6.9) eindeutig bestimmt. Das heißt jede schwach konvergente Teilfolge der ursprünglichen Folge

$(Z^i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiert schwach gegen dieses Z. Damit konvergiert aber die ursprüngliche Folge und nicht nur eine Teilfolge schwach gegen Z.

Es bleibt noch zu zeigen, dass $(Z^i)_{i\in\mathbb{N}}$ für $p \in [1,2)$ sogar in $L^p(\Omega_T, K)$ gegen Z konvergiert. Dazu zeigen wir, dass $(Z^i)_{i\in\mathbb{N}}$ bzgl. des Maßes $P \otimes \lambda$ gegen Z konvergiert. Da $(Z^i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega_T, K)$ beschränkt ist, ist $(\|Z^i - Z\|_K^p)_{i\in\mathbb{N}}$ für alle $p \in [1,2)$ in $L^q(\Omega_T, K)$ mit $q = \frac{2}{p} > 1$ beschränkt. Damit ist $\|Z^i - Z\|_K^p$ nach Lemma 2.1.24 uniform integrierbar und mit Lemma 2.1.23 folgt dann $\|Z^i - Z\|_{L^p(\Omega_T,K)} \to 0$ $(i \to \infty)$ aus der Konvergenz bezüglich des Maßes.

Setze zunächst $M^i := \int Z^i dW$, und $M := \int Z dW$. Dann gilt für alle $i \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$

$$Y^{i,k} - Y^k = Y_0^{i,k} - Y_0^k - \int g^{i,k} - g^{0,k} ds - (A^{i,k} - A^k) + M^{i^k} - M^k.$$

Da $A^{i,k}$ und A^k monoton wachsende Prozesse sind, ist

$$S^k := \int g^{i,k} - g^{0,k} ds + A^{i,k} - A^k$$

ein Prozess von endlicher Variation. Da Y^i (6.8) und Y (6.9) erfüllt, folgt aus Satz 6.0.10 außerdem

$$\mathrm{E}\left[\sup_{t\in[0,T]} |Y^{i,k} - Y^k|^2\right] \leq 2\mathrm{E}\left[\sum_{l\in\mathbb{N}} \sup_{t\in[0,T]} |Y_t^{i,l}|^2 + \sup_{t\in[0,T]} |Y^l|^2\right] < \infty.$$

Damit erfüllt $Y^{i,k} - Y^k$ die Voraussetzungen von Lemma 5.3.6. Somit erhalten wir für jede Stoppzeit $\tau \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\int_0^\tau \|Z_s^{i,k} - Z_s^k\|_{H'}^2\right] = {} & \left\|Y_\tau^{i,k} - Y_\tau^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left(Y_0^{i,k} - Y_0^k\right)^2 \\ & - \mathrm{E}\left[\sum_{s\in(0,\tau]} \left(\triangle\left(S_s^{i,k}\right)\right)^2\right] \\ & + 2\mathrm{E}\left[\int_0^\tau (Y_{s-}^{i,k} - Y_{s-}^k) d(S^{i,k})_s\right]\end{aligned} \tag{6.11}$$

Betrachte zunächst den Integralprozes $\left(\int_0^t Y_{s-}^k dS_s^{i,k}\right)_{t\in[0,T]}$. Da $S^{i,k}$ von endlicher Variation ist, stimmt dieser Prozess mit dem pfadweisen Lebesgue-Stieltjes-Integral überein. Nun ist nach Voraussetzung $A^{i,k}$ stetig. Da auch

$\int g^{0,k} - g^{i,k} ds$ stetig ist, folgt $\triangle S^{i,k} = -\triangle A^k$. Außerdem erfüllt Y (6.9) und M sowie $\int g_s ds$ sind stetige Prozesse. Daraus folgt

$$\triangle Y_t^k = Y_t^k - Y_{t-}^k = A_{t-}^k - A_t^k = -\triangle A_t^k = \triangle S_t^{i,k} \quad (t \in [0,T])$$

Weiterhin sind die Unstetigkeitsstellen von A^k und damit auch jene von Y^k abzählbar (Siehe Lemma 3.4.4). Daraus erhält man für $t \in [0,T]$

$$\begin{aligned}\int_0^t Y_{s-}^k dS_s^{i,k} &= \int_0^t Y_s^k dS_s^{i,k} - \int_0^t \triangle Y_s^k dS_s^{i,k} \\ &= \int_0^t Y_s^k dS_s^{i,k} - \sum_{s\in(0,t]} \triangle Y_s^k \triangle S_s^{i,k} \\ &= \int_0^t Y_s^k dS_s^{i,k} - \sum_{s\in(0,t]} \left(\triangle A_s^k\right)^2 .\end{aligned} \tag{6.12}$$

Diese Gleichheit gilt im Sinne ununterscheidbarer Prozesse. Da $Y^{i,k}$ nach Voraussetzung stetig ist, ergibt sich somit aus (6.11)

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\int_0^\tau \|Z_s^{i,k} - Z_s^k\|_{H'}^2\right] = &\left\|Y_\tau^{i,k} - Y_\tau^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2 - \left(Y_0^{i,k} - Y_0^k\right)^2 \\ &- \mathrm{E}\left[\sum_{s\in(0,\tau]} \left(\triangle\left(A_s^k\right)\right)^2\right] \\ &+ 2\mathrm{E}\left[\int_0^\tau (Y_s^{i,k} - Y_s^k)(g_s^{i,k} - g_s^{0,k}) ds\right] \\ &+ 2\mathrm{E}\left[\int_0^\tau Y_s^{i,k} - Y_s^k dA_s^{i,k}\right] \\ &- 2\mathrm{E}\left[\int_0^\tau Y_s^{i,k} - Y_s^k dA_s^k\right]\end{aligned} \tag{6.13}$$

Damit bekommen wir für zwei beliebige Stoppzeiten $\sigma, \tau \in \mathcal{T}$ mit $\sigma \leq \tau$ f.s.

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\int_\sigma^\tau \|Z_s^{i,k} - Z_s^k\|_{H'}^2 ds\right] = \left\|Y_\tau^{i,k} - Y_\tau^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2 &- \left\|Y_\sigma^{i,k} - Y_\sigma^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2 \\
&+ \mathrm{E}\left[\sum_{s\in(\sigma,\tau]} \left(\triangle A_s^k\right)^2\right] \\
&+ 2\mathrm{E}\left[\int_\sigma^\tau (Y_s^{i,k} - Y_s^k)(g_s^{i,k} - g_s^{0,k}) ds\right] \\
&+ 2\mathrm{E}\left[\int_{(\sigma,\tau]} Y_s^{i,k} - Y_s^k dA_s^{i,k}\right] \\
&- 2\mathrm{E}\left[\int_{(\sigma,\tau]} Y_s^{i,k} - Y_s^k dA_s^k\right]
\end{aligned}$$

Da $A^{i,k}$ ein monoton wachsender Prozess ist, ist $dA^{i,k}$ pfadweise ein (positives) Maß auf $[0,T]$. Mit $Y_t^{i,k} - Y_t^k \leq 0$ für alle $t \in [0,T]$ folgt daraus

$$\int_{(\sigma,\tau]} Y_s^{i,k} - Y_s^k dA^{i,k} \leq 0$$

Insgesamt erhalten wir folgende Abschätzung (beachte, dass auch dA^k ein (positives) Maß auf $[0,T]$ ist)

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\int_\sigma^\tau \|Z_s^{i,k} - Z_s^k\|_{H'}^2 ds\right] \leq \left\|Y_\tau^{i,k} - Y_\tau^k\right\|_{L^2(\Omega)}^2 & \\
&+ \mathrm{E}\left[\sum_{s\in(\sigma,\tau]} \left(\triangle A_s^k\right)^2\right] \\
&+ 2\mathrm{E}\left[\int_\sigma^\tau |Y_s^{i,k} - Y_s^k||g_s^{i,k} - g_s^{0,k}| ds\right] \\
&+ 2\mathrm{E}\left[\int_{(\sigma,\tau]} |Y_s^{i,k} - Y_s^k| dA_s^k\right]
\end{aligned} \tag{6.14}$$

Da dies für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt, folgt mit monotoner Konvergenz

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\left[\int_\sigma^\tau \|Z_s^i - Z_s\|^2_{\mathcal{S}_2(H;K)} ds\right] \leq{}& \left\|Y_\tau^i - Y_\tau\right\|^2_{L^2(\Omega,K)} \\
&+ \mathrm{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{s\in(\sigma,\tau]} \left(\triangle A_s^k\right)^2\right] \\
&+ 2\mathrm{E}\left[\int_\sigma^\tau \langle |Y_s^i - Y_s|, |g_s^i - g_s^0|\rangle_K ds\right] \\
&+ 2\mathrm{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{(\sigma,\tau)} |Y_s^{i,k} - Y_s^k| dA_s^k\right]
\end{aligned} \tag{6.15}$$

Aus der Beschränktheit von $(g^i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega_T, K)$ und $\|Y^i - Y\|_{L^2(\Omega,K)} \to 0$ $(i \to \infty)$ (siehe (6.5), Bemerkung 6.0.11), folgt

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T \langle |Y_s^i - Y_s|, |g_s^i - g_s^0|\rangle_K ds\right] \to 0, \quad \text{für } i \to \infty. \tag{6.16}$$

Da $(Y^i)_{i\in\mathbb{N}}$ (H4.1) und (H4.2) erfüllen, gilt $|Y_s^{i,k} - Y_s^k| \leq |Y_s^{1,k} - Y_s^k|$ $(i, k \in \mathbb{N})$. Wegen $Y_s^{i,k} \to Y_s^k$ $(i \to \infty)$ für alle $s \in [0, T]$ $k \in \mathbb{N}$, f.s, folgt daraus mit majorisierter Konvergenz für alle $k \in \mathbb{N}$

$$\int_0^T |Y_s^{i,k} - Y_s^k| dA_s^k \to 0 \text{ f.s. } (i \to \infty).$$

Aus (H4.1) und (H4.2) folgt zudem

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_0^T |Y_s^{i,k} - Y_s^k| dA_s^k\right] \\
&\qquad \leq \left(\mathrm{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \sup_{s\in[0,T]} |Y_s^{1,k} - Y_s^k|\right]\right)^{\frac{1}{2}} \|A_T\|_{L^2(\Omega,K)} < \infty.
\end{aligned}$$

Wenden wir nochmals majorisierte Konvergenz an, erhalten wir deshalb

$$\mathrm{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_0^T |Y_s^{i,k} - Y_s^k| dA_s^k\right] \to 0, \quad \text{für } i \to \infty. \tag{6.17}$$

Mit (6.5), Bemerkung 6.0.11 gilt außerdem

$$\mathrm{E}\left[\left\|Y_\tau^i - Y_\tau\right\|_K^2\right] \to 0, \quad \text{für } i \to \infty. \tag{6.18}$$

Wäre Y und damit A stetig würde aus (6.15) nun $Z^i \to Z$ in $L^2(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H;K))$ folgen. Da dies im allgemeinen jedoch nicht der Fall ist, müssen wir stattdesssen Lemma 6.0.12 benutzen.

Seien nun $\epsilon, \delta > 0$. Nach Lemma 3.4.5 gilt

$$\mathrm{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \sum_{s\in(0,T]} \left(\triangle A_s^k\right)^2\right] < E[\|A_T\|_K^2] < \infty.$$

Das heißt es existiert ein $L \in \mathbb{N}$ mit

$$\mathrm{E}\left[\sum_{k>L} \sum_{s\in(0,T]} \left(\triangle A_s^k\right)^2\right] < \frac{\epsilon\delta}{8}$$

Aus den Konvergenzen (6.16), (6.17), (6.18) ergibt sich die Exsitenz eine $l_0 \in \mathbb{N}$, so dass für alle $i \geq l_0$

$$\mathrm{E}\left[\left\|Y_T^i - Y_T\right\|_K^2\right] + \mathrm{E}\left[\int_0^T \langle |Y_s^i - Y_s|, |g_s^i - g_s^0|\rangle_K ds\right] \\ + \mathrm{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \int_{(0,T]} |Y_s^{i,k} - Y_s^k| dA_s^k\right] < \frac{\epsilon\delta}{8}.$$

Mit (6.15) erhält man also

$$\mathrm{E}\left[\int_0^T \sum_{k>L} \|Z_s^{i,k} - Z_s^k\|_{H'}^2 ds\right] < \frac{\epsilon\delta}{4}, \quad i \geq l_0.$$

Daraus ergibt sich wiederrum

$$P \otimes \lambda \left(\sum_{k>L} \|Z_s^{i,k} - Z_s^k\|_{H'}^2 \geq \frac{\delta}{2}\right) < \frac{\epsilon}{2}, \quad i \geq l_0. \tag{6.19}$$

Für $k \leq L$, existieren nun nach Lemma 6.0.12 jeweils ein $N^k \in \mathbb{N}$ und eine Familie von Stopzeiten $(\sigma_j^k, \tau_j^k)_{1\leq j\leq N^k}$ mit $\sigma_j^k < \tau_j^k$ und

(i) $(\sigma_j^k, \tau_j^k] \cap (\sigma_i^k, \tau_i^k] = \emptyset$ für alle $1 \leq i^k < j^k \leq N^k$,

(ii) $\sum_{l=1}^{N^k} \mathrm{E}[\tau_l^k - \sigma_l^k] \geq T - \frac{\epsilon}{4L}$,

(iii) $\sum_{l=1}^{N^k} \mathrm{E}\left[\sum_{s\in(\sigma_l^k,\tau_l^k]} \triangle A_s^k\right] < \frac{\epsilon\delta}{16L^2}$.

Aus (6.14) sowie den Konvergenzresulaten (6.16), (6.17), (6.18), folgt die Existenz eines $l_k \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{j=1}^{N^k} \mathrm{E}\left[\int_{\sigma_j^k}^{\tau_j^k} \|Z_s^{i,k} - Z_s^k\|_{H'}^2 ds\right] \le \sum_{j=1}^{N^k} \mathrm{E}\left[\sum_{s\in(\sigma_j^k,\tau_j^k]} \left(\triangle A_s^k\right)^2\right] + \frac{\epsilon\delta}{16L^2}, \quad (i \ge l_k)$$

also mit (iii)

$$\sum_{j=1}^{N^k} \mathrm{E}\left[\int_{\sigma_j^k}^{\tau_j^k} \|Z_s^{i,k} - Z_s^k\|_{H'}^2 ds\right] \le \frac{\epsilon\delta}{8L^2} \quad (i \ge l_k). \tag{6.20}$$

Damit ergibt sich

$$P \otimes \lambda \left(\bigcup_{j=1}^{N^k} (\sigma_j^k, \tau_j^k] \cap \left\{|Z_s^{i,k} - Z_s^k| \ge \frac{\delta}{2L}\right\}\right) < \frac{\epsilon}{4L}, \quad (i \ge l_k).$$

Aus (i) und (ii) erhalten wir zudem

$$P \otimes \lambda \left(\bigcup_{j=1}^{N^k} (\sigma_j^k, \tau_j^k]\right) \ge T - \frac{\epsilon}{4L}.$$

Insgesamt bekommen wir

$$\begin{aligned}
&P \otimes \lambda \left(|Z_s^{i,k} - Z_s^k| \ge \frac{\delta}{2L}\right) \\
&\le P \otimes \lambda \left(\bigcup_{j=1}^{N^k} (\sigma_j^k, \tau_j^k] \cap \left\{|Z_s^{i,k} - Z_s^k| \ge \frac{\delta}{2L}\right\}\right) \\
&\quad + T - P \otimes \lambda \left(\bigcup_{j=1}^{N^k} (\sigma_j^k, \tau_j^k]\right) \\
&< \frac{\epsilon}{4L}, \quad (i \ge l_k).
\end{aligned}$$

Setze nun $l = \max_{0\le k\le K} l_k$. Dann gilt für $i \ge l$

$$
\begin{aligned}
P \otimes \lambda \Big(\|Z_s^i - Z_s\|^2_{\mathcal{S}_2(H;K)} \geq \delta \Big) &\leq P \otimes \lambda \left(\sum_{k > K+1} \|Z_s^{i,k} - Z_s^k\|^2_{H'} \geq \frac{\delta}{2} \right) \\
&\quad + \sum_{k=1}^{K} P \otimes \lambda \left(\|Z_s^{i,k} - Z_s^k\|\|^2_{H'} \geq \frac{\delta}{2K} \right) \\
&< \frac{\epsilon}{2} + \sum_{k=1}^{K} \frac{\epsilon}{2K} = \epsilon
\end{aligned}
$$

Da $\epsilon, \delta > 0$ beliebig gewählt waren, gilt also tatsächlich $Z^i \to Z$ bzgl. des Maßes $P \otimes \lambda$. Mit der Beschränktheit von $(Z^i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H, K))$ folgt daraus wie oben schon angemerkt die Behauptung.

□

Nun können wir das Hauptresultat dieses Kapitels formulieren.

6.0.16 Satz. *Sei g ein Generator, der (H2.1),(H2.2) erfüllt. $(\xi^i)_{i \in \mathbb{N}} \subset L^2(\Omega, K)$ eine Folge von Endbedingungen und $(A^i)_{i \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Prozessen, welche (H3) erfüllt. Für alle $i \in \mathbb{N}$ sei $(Y^i, Z^i) \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, K) \times L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H, K))$ die Lösung von (6.4). $(Y^i)_{i \in \mathbb{N}}$ konvergiere dabei gemäß (H4.1),(H4.2) gegen ein $Y \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, K)$. Dann existieren ein monoton wachsender càdlag Prozess A mit $A_0 = 0$ und $A_T \in L^2(\Omega, K)$ sowie ein Prozess $Z \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H, K)$, so dass*

$$
Y_t = Y_T + \int_t^T g_s(Y_s, Z_s) ds + A_T - A_t - \int_t^T Z_s dW_s. \tag{6.21}
$$

Um dieses Resultat mit Hilfe von Satz 6.0.15 beweisen zu können, benötigen wir zunächst folgendes Reusltat

6.0.17 Lemma. *In der Situation von Theorem 6.0.16 sind $(A^i)_{i \in \mathbb{N}}$ bzw. $(Z^i)_{i \in \mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega_T, K)$ bzw. $L^2(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H; K))$ beschränkt.*

Beweis: Beachte zunächst, dass 6.4 zur vorwärts Formulierung

$$
Y_t^i = Y_0^i - \int_0^t g_s(Y_s^i, Z_s^i) ds - A_t^i + \int_0^t Z_s^i dW_s
$$

äquivalent ist. Sei $i \in \mathbb{N}$ beliebig. Nach Bemerkung 6.0.11 und (6.2) existiert ein $\gamma > 0$ mit

$$\mathrm{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \sup_{t\in[0,T]} |Y_t^{i,k}|^2\right] \leq 2\mathrm{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \sup_{t\in[0,T]} |Y_t^{1,k}|^2 + |Y_t^k|^2\right] < \gamma.$$

Zunächst erhalten wir mit der Lipschitzstetigkeit von g (siehe (H2.1)) folgende Abschätzungen für A_T^i

$$\begin{aligned}\|A_T^i\|_K \leq \|Y_0^i\|_K + \|Y_T^i\|_K + \int_0^T \mu(\|Y_s^i\|_K + \|Z_s^i\|_{\mathcal{S}_2(H;K)}) + \|g_s(0,0)\|_K ds \\ + \left\|\int_0^T Z_s^i dW_s\right\|_K.\end{aligned}$$

Daraus folgt mit der Hölder Ungleichung und der Ito-Isometrie

$$\begin{aligned}\|A_T^i\|_{L^2(\Omega,K)} \leq 2\sqrt{\gamma} + \sqrt{T}\|g(0,0)\|_{L^2(\Omega_T,K)} + \mu\sqrt{T\gamma} \\ + \mu\sqrt{T}\|Z^i\|_{L^2(\Omega_T,\mathcal{S}_2(H;K))} + \|Z^i\|_{L^2(\Omega_T,\mathcal{S}_2(H;K))},\end{aligned}$$

woraus

$$\|A_T^i\|^2_{L^2(\Omega,K)} \leq C_1 + \alpha\|Z^i\|^2_{L^2(\Omega_T,\mathcal{S}_2(H;K))} \tag{6.22}$$

für ein $C_1 = C_1(\gamma, T, g, \mu)$ und ein $\alpha = \alpha(\mu, T) > 0$ folgt.

Sei nun $i, k \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann erfüllt $Y^{i,k}$ die Voraussetzungen aus Lemma 5.3.6. Unter Beachtung der Stetigkeit von $A^{i,k}$ ergibt sich daraus

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\left[\int_0^T \|Z_s^{i,k}\|^2_{H'} ds\right] = \|Y_T^{i,k}\|^2_{L^2(\Omega)} - |Y_0^{i,k}|^2 \\ + 2\mathrm{E}\left[\int_0^T Y_s^{i,k} g_s^k(Y_s^i, Z_s^i) ds\right] + 2\mathrm{E}\left[\int_0^T Y_s^{i,k} dA_s^{i,k}\right].\end{aligned}$$

Mit der Abschätzung

$$\int_0^T Y_s^{i,k} dA_s^{i,k} \leq \sup_{s\in[0,T]} |Y^{i,k}| A_T^{i,k}$$

folgt

$$\|Z^{i,k}\|^2_{L^2(\Omega_T,H')} \leq \|Y^{i,k}\|^2_{L^2(\Omega)} + 2\mathrm{E}\left[\int_0^T |Y_s^{i,k}||g_s^k(Y_s^i, Z_s^i)|ds\right] + 2\mathrm{E}\left[\sup_{s\in[0,T]} |Y^{i,k}|A_T^{i,k}\right].$$

Mit monotoner Konvergenz ergibt sich weiter

$$\|Z^i\|^2_{L^2(\Omega_T,\mathcal{S}_2(H;K))} \leq \|Y^i\|^2_{L^2(\Omega,K)} + 2\mathrm{E}\left[\int_0^T \langle |Y_s^i|, |g_s(Y_s^i, Z_s^i)|\rangle_K ds\right] + 2\mathrm{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \sup_{s\in[0,T]} |Y_s^{i,k}|A_T^{i,k}\right].$$

Mit der Lipschitz-Stetigkeit von g sowie der Ungleichung von Cauchy erhalten wir daraus

$$\begin{aligned}
&\|Z^i\|^2_{L^2(\Omega_T,\mathcal{S}_2(H;K))} \\
&\leq \gamma + 2\alpha\mathrm{E}\left[\sum_{k\in\mathbb{N}} \sup_{t\in[0,T]} |Y_t^{i,k}|^2\right] + \frac{1}{2\alpha}\|A_T^i\|^2_{L^2(\Omega,K)} \\
&\quad + 2\mathrm{E}\left[\int_0^T \|Y_s^i\|_K \left(\mu(\|Y_s^i\|_K + \|Z_s^i\|_{\mathcal{S}_2(H;K)}) + \|g_s(0,0)\|_K\right) ds\right] \\
&\leq \gamma + 2\alpha\gamma + \frac{1}{2\alpha}\|A_T^i\|^2_{L^2(\Omega,K)} \\
&\quad + 2\mathrm{E}\left[\int_0^T (\mu+\mu^2)\|Y_s^i\|^2_K + \frac{1}{4}\|Z_s^i\|_{\mathcal{S}_2(H;K)} + \|g_s(0,0)\|_K ds\right]
\end{aligned}$$

Durch Umstellen und Zusammenfassen aller in i beschränkten Terme bekommen wir schließlich

$$\|Z^i\|^2_{L^2(\Omega_T,\mathcal{S}_2(H;K))} \leq C_2 + \frac{1}{2\alpha}\|A_T^i\|^2_{L^2(\Omega,K)}. \tag{6.23}$$

für ein $C_2 = C_2(\gamma, \alpha, \mu, g) > 0$. Eingesetzt in (6.22) folgt somit

$$\begin{aligned}
\|A_T^i\|^2_{L^2(\Omega,K)} &\leq C_1 + \alpha\left(C_2 + \frac{1}{2\alpha}\|A_T^i\|^2_{L^2(\Omega,K)}\right) \\
&\leq C + \frac{1}{2}\|A_T^i\|^2_{L^2(\Omega,T)}.
\end{aligned}$$

$(A^i_T)_{i\in\mathbb{N}}$ ist also beschränkt in $L^2(\Omega, K)$. Nach (6.23) ist auch $(Z^i)_{i\in\mathbb{N}}$ beschränkt in $L^2(\Omega_T; \mathcal{S}_2(H;K))$.

$\square$

Nun können wir Theorem 6.0.16 beweisen.

Beweis: Für $i \in \mathbb{N}$ setze $g^i_s := g_s(Y^i, Z^i)$. Nach Lemma 6.0.17 ist $(Z^i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H;K))$ und nach Bemerkung 6.0.11 ist $(Y_i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega_T, K)$ beschränkt. Aus (H2.1) und (H2.2) folgt

$$\begin{aligned}\|g^i\|_{L^2(\Omega_T,K)} &= \|g_\bullet(Y^i_\bullet, Z^i_\bullet)\|_{L^2(\Omega_T,K)}\\ &\le \mu(\|Y^i\|_{L^2(\Omega_T,K)} + \|Z^i\|_{L^2(\Omega_T,\mathcal{S}_2(H;K))}) + \|g(0,0)\|_{L^2(\Omega_T,K)}.\end{aligned}$$

Also ist auch $(g^i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega_T, K)$ beschränkt. Nach Satz 6.0.15 existieren dann ein monoton wachsender càdlag Prozess A mit $A_T \in L^2(\Omega, K)$ und $A_0 = 0$, ein $g^0 \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, K)$ und ein $Z \in L^2_{\mathcal{F}}(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H;K)$ mit

$$Y_t = Y_0 - \int_0^t g^0_s ds - A_t + \int_0^t Z_s dW_s.$$

zu zeigen bleibt also noch $g^0_s = g_s(Y_s, Z_s)$. Nach Bemerkung 6.0.11 konvergiert $(Y^i)_{i\in\mathbb{N}}$ in $L^2(\Omega_T, K)$ gegen Y. $(Z^i)_{i\in\mathbb{N}}$ konvergiert nach Satz 6.0.15 in $L^p(\Omega_T, \mathcal{S}_2(H;K))$ gegen Z für $p \in [1,2)$. Damit folgt für $p \in [1,2)$ aus der Lipschitz-Stetigkeit von g auch

$$\|g_\bullet(Y^i_\bullet, Z^i_\bullet) - g_\bullet(Y_\bullet, Z_\bullet)\|_{L^p(\Omega_T,K)} \to 0, \quad (i \to \infty)$$

Da g^0 bereits der $L^2(\Omega_T, K)$-schwache Grenzwert einer Teilfoge von $(g^i)_{i\in\mathbb{N}} = (g_\bullet(Y^i_\bullet, Z^i_\bullet))_{i\in\mathbb{N}}$ ist (siehe Satz 6.0.15), gilt also tatsächlich $g^0 = g(Y, Z)$.

$\square$

Literaturverzeichnis

[AB06] C.D. Aliprantis and K.C. Border. *Infinite Dimensional Analysis*. Springer, Berlin, Heidelberg, third edition, 2006.

[BH06] P. Briand and Y. Hu. BSDE with quadratic growth and unbounded terminal value. *Probability Theory and Related Fields*, 136:604–618, 2006.

[BH08] P. Briand and Y. Hu. Quadratic BSDEs with convex generators and unbounded terminal conditions. *Probability Theory and Related Fields*, 141:543–567, 2008.

[Bis73] J.M. Bismut. Conjugate konvex functions in optimal stochastic control. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 44:384–404, 1973.

[CS] B.D. Choi and L. Sucheston. In *Probability in Banach Spaces III*, pages 85–89. Springer.

[CW14] K.L. Chung and R.J. Williams. *Introduction to Stochastic Integration*. Birkhäuser, New York, second edition, 2014.

[DGL81] W.J. Davis, N. Ghoussoub, and J. Lindenstrauss. A lattice renorming theorem and applications to vector-valued processes. *Transactions of the American Mathematical Society*, 263:531–540, 1981.

[DHB11] F. Delbaen, Y. Hu, and X. Bao. Backward SDEs with superquadratic growth. *Probability Theory and Related Fields*, 150:145–192, 2011.

[DHK13] M. Drapeau, G. Heyne, and M. Kupper. Minimal supersolutions of convex BSDEs. *The Annals of Probability*, 41:3937–4001, 2013.

[DPZ92] G. Da Prato and J. Zabczyk. Stochastic equations in infinite dimensions. volume 45 of *Encyclopedia of Mathematics and its Applications*. Cambridge University Press, 1992.

[DU77] J. Diestel and J.J. Uhl. Vector measures. volume 15 of *Mathematical Surveys and Monographs.* American Mathematical Society, 1977.

[Egg84] L. Egghe. Stopping time techniques for analysts and probabilists. volume 100 of *London Mathematical Society: London Mathematical Society lecture notes series.* Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[EK08] M. EL Kadiri. Predictable representation property of some Hilbertian martingales. *Acta Mathematica Universitatis Comenianae*, 77:123–128, 2008.

[EKPQ97] N. El Karoui, S. Peng, and M. C. Quenez. Backward stochastic differential equations in finance. *Mathematical Finance*, 7:1–71, 1997.

[FdR11] C. Frei and G. dos Reis. A financial market with interacting investors: does an equilibrium exist? *Mathematics and Financial Economics*, 4:161–182, 2011.

[Fra85] N. E. Frangos. On regularity of Banach-valued processes. *The Annals of Probability*, 13:985–990, 1985.

[Hei78] H. Heinich. Convergence des sous-martingales positives dans un Banach réticulé. *C.R. Acad. Sc. Paris Série A*, 286:279–280, 1978.

[HP90] Y. Hu and S. Peng. Maximum principle for semilinear stochastic evolution control systems. *Stochastics and Stochastic Reports*, 33:159–180, 1990.

[HP91] Y. Hu and S. Peng. Adapted solution of a backward semilinear stochastic evolution equation. *Stochastic Analysis and Applications*, 9:445–459, 1991.

[Kob00] M. Kobylanski. Backward stochastic differential equations and partial differential equations with quadratic growth. *The Annals of Probability*, 28:558–602, 2000.

[KS05] I. Karatzas and S.E. Shreve. Brownian motion and stochastic calculus. volume 113 of *Graduate texts in mathematics.* Springer, New York, Berlin, second edition, 2005.

[LT79] J. Lindenstrauss and L. Tzafiri. Function spaces. volume 97 of *Ergebnisse der Mathematik und ihrer Grenzgebiete*. Springer, 1979.

[Nev75] J. Neveu. *Discrete-parameter martingals*. North-Holland Publ., New York City, first edition, 1975.

[Nik06] A. Nikeghbali. An essay on the general theory of stochastic processes. *Probability Surveys*, 3:345–412, 2006.

[Pen99] S. Peng. Monotonic limit theorem of BSDE and nonlinear decomposition theorem of Doob-Meyer's type. *Probability Theory and Related Fields*, 113:473–499, 1999.

[PP90] E. Pardoux and S. Peng. Adapted solution of a backward stochastic differential equation. *Systems and Control Letters*, 14:55–61, 1990.

[PR07] C. Prévôt and M. Röckner. A concise course on stochastic partial differential equations. volume 1905 of *Lecture Notes in Mathematics*. Springer, 2007.

[Pro04] P.E. Protter. Stochastic integration and differential equations. volume 21 of *Applications of mathematics*. Springer, Berlin, Heidelberg, second edition, 2004.

[RY99] D. Revuz and M. Yor. Continuous martingales and Brownian motion. volume 293 of *Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften in Einzeldarstellungen*. Springer, Berlin, Heidelberg, third edition, 1999.

[Sca61] F.S. Scalora. Abstract martingale convergence theorems. *Pacific Journal of Mathematics*, 11:347–374, 1961.

[SW76] J. Szulga and W. A. Woyczynski. Convergence of submartingales in Banach lattices. *The Annals of Probability*, 4:464–469, 1976.

[Tev08] R. Tevzadze. Solvability of backward stochastic differential equations with quadratic growth. *Stochastic Processes and their Applications*, 118:503–515, 2008.

Erklärung

1. Ich versichere hiermit, dass ich die vorliegende Arbeit mit dem Thema *Hilbertraumwertige Superlösungen stochastischer rückwärts Differentialgleichungen* selbstständig verfasst und keine anderen Hilfsmittel als die angegebenen benutzt habe. Die Stellen, die anderen Werken dem Wortlaut oder dem Sinne nach entnommen sind, habe ich in jedem einzelnen Falle durch Angabe der Quelle, auch der benutzten Sekundärliteratur, als Entlehnung kenntlich gemacht.
   Die Arbeit wurde bisher keiner anderen Prüfungsbehörde vorgelegt und auch noch nicht veröffentlicht.

2. Diese Arbeit wird nach Abschluss des Prüfungsverfahrens der Universitätsbibliothek Konstanz übergeben und ist durch Einsicht und Ausleihe somit der Öffentlichkeit zugänglich. Als Urheber der anliegenden Arbeit stimme ich diesem Verfahren zu.

Konstanz, 18.02.2015

Mattias Sroczinski