A Einiges über Algebren

Bisher hatten wir uns mit Vektorräumen und ihren Homomorphismen beschäftigt. Wir wollen nun Vektorräume untersuchen, die noch eine weitere Struktur, herrührend von einer weiteren Operation "Multiplikation" tragen. Wir kommen so zum Begriff der "Algebra", der schon in Kapitel Z angeklungen ist.

Definition A.1 (**K-Algebra mit Eins**) *Eine K-Algebra mit Eins besteht aus einer Menge A mit zwei ausgezeichneten Elementen 0, e, einem Körper K und Operationen: "Addition" $+ : A \times A \to A$, "Multiplikation mit Skalaren" $\alpha\cdot : K \times A \to A$, "Multiplikation in A" $\cdot : A \times A \to A$, sodaß gelten*

A1: $(A, 0, +, \alpha\cdot)$ *ist K-Vektorraum,*

A2: $\bigwedge_{x,y,z\in A} (x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ *(assoziativ)*

A3: $\bigwedge_{x,y,z\in A} (x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z,\ x \cdot (y + z) = x \cdot y + x \cdot z,$ *(distributiv).*

A4: $\bigwedge_{\alpha\in K} \bigwedge_{x,y\in A} \alpha(x \cdot y) = (\alpha x) \cdot y = x \cdot (\alpha y).$

A5: $\bigwedge_{x\in A} e \cdot x = x \cdot e = x$ *(e Einselement).*

Das Wort "Algebra" bezeichne im ganzen Kapitel stets ein K-Algebra mit Einselement, verschiedene gleichzeitig betrachtete Algebren haben den selben Grundkörper. Das Operationszeichen $\cdot$ für die Multiplikation werden wir im allgemeinen weglassen oder auch durch spezielle Zeichen wie $\otimes$ oder $\wedge$ ersetzen.

Beispiele für Algebren sind etwa der Körper K selbst, die Polynomalgebra $K[X]$, die $n \times n$ - Matrizen $K^{n\times n}$.

Homomorphismen sind Abbildungen, die die algebraische Struktur respektieren. Somit ergibt sich als sachgerechte Begriffsbildung folgende

Definition A.2 (**K-Algebra-Homomorphismus**) *Es seien A, A' Algebren mit Einselementen e bzw. e' und $\varphi : A \to A'$ eine Abbildung. Dann heißt φ ein Algebra-Homomorphismus, wenn gelten*

(i) φ *ist Homomorphismus für die Vektorräume A, A',*

(ii) $\bigwedge_{x,y\in A} \varphi(x \cdot y) = \varphi(x) \cdot \varphi(y),$

(iii) $\varphi(e) = e'.$

Die Gesamtheit der Algebra-Homomorphismen $\varphi : A \to A'$ bezeichnen wir mit $A-$ $\mathrm{Hom}(A, A')$, während $\mathrm{Hom}(A, A')$ für die Vektorraum-Homomorphismen reserviert bleibt.

Betrachten wir Algebren und deren Homomorphismen, so können wir natürlich auch von der Multiplikation absehen und landen dann bei Vektorräumen und deren Homomorphismen. Somit bleibt (fast) alles über Vektorräume Gesagte auch für Algebren anwendbar.

1

Wir können hier nur wenige Aspekte von Algebren untersuchen. Zunächst konstruieren wir uns das Urbild aller Algebren, die freie Algebra. Hieraus gewinnen wir einmal die Verallgemeinerung der schon in Kapitel Z betrachteten Algebra der Polynome, nun für mehrere Variable. Zum anderen benutzen wir diese freie Algebra, um tiefere Einsichten über die schon im Zusammenhang mit Determinanten aufgetretenen multi-linearen Abbildungen zu gewinnen.

Definition A.3 (Freie Algebra)

Es sei A eine Algebra, B eine Menge. Dann heißt A freie Algebra über B, wenn es eine Funktion $\eta : B \to A$ gibt, sodaß gilt: Zu jeder Algebra A' und jeder Funktion $\lambda : B \to A'$ gibt es genau einen Algebra-Homomorphismus $\varphi \in A - \mathrm{Hom}(A, A')$ mit $\varphi \circ \eta = \lambda$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "\lambda"] \arrow[dd, "\eta"'] & \\ & A' \\ A \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Ersetzt man hier überall "Algebra" durch "Vektorraum", so geht diese Definition in die des freien Vektorraumes über.

Wir hatten gesehen, daß jeder Vektorraum frei ist. Für Algebren ist dies falsch! Ein Beispiel ist etwa die $\mathbb{R}$-Algebra der reellen 2×2-Matrizen: $A := \mathbb{R}^{2\times 2}$. Wir zeigen, daß es überhaupt keinen Algebra-Homomorphismus $\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to A' := \mathbb{R}$ gibt, während ein solcher ja bei einer freien $\mathbb{R}$-Algebra vorhanden sein müßte.

Dazu betrachten wir in $\mathbb{R}^{2\times 2}$ die vier Matrizen:

$$E_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_2 := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_3 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad E_4 := \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ferner

$$I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = E_1 + E_4, \quad \mathcal{J} := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = E_2 + E_3.$$

Es ist I das Einselement im $\mathbb{R}^{2\times 2}$, ferner haben wir

$$\mathcal{J} \cdot \mathcal{J} = I, \; E_1 \cdot E_4 = E_1 \cdot E_3 = E_2 \cdot E_1 = 0.$$

Wäre nun $\varphi : \mathbb{R}^{2\times 2} \to \mathbb{R}$ ein Algebra-Homomorphismus, so müßte folgendes gelten:

$$0 = \varphi(0) = \varphi(E_1 \cdot E_4) = \varphi(E_1) \cdot \varphi(E_4).$$

Also müßte einer der Faktoren verschwinden, etwa $\varphi(E_4) = 0$. Dann wäre aber

$$1 = \varphi(I) = \varphi(E_1 + E_4) = \varphi(E_1) + \varphi(E_4) = \varphi(E_1), \text{ d.h. } \varphi(E_1) = 1.$$

Nun ist $E_1 \cdot E_3 = E_2 \cdot E_1 = 0$, also $\varphi(E_1)\varphi(E_3) = \varphi(E_2)\varphi(E_1) = 0$ und wegen $\varphi(E_1) = 1$ wäre also $\varphi(E_2) = \varphi(E_3) = 0$. Dann wäre aber auch $\varphi(\mathcal{J}) = \varphi(E_2 + E_3) = \varphi(E_2) + \varphi(E_3) = 0$, was zu folgendem Widerspruch führen würde: $1 = \varphi(I) = \varphi(\mathcal{J} \cdot \mathcal{J}) = \varphi(\mathcal{J}) \cdot \varphi(\mathcal{J}) = 0$.

Hätten wir oben $\varphi(E_1) = 0$ angenommen , hätte dies den selben Widerspruch ergeben.

Ehe wir freie Algebren konstruieren, zeigen wir die Eindeutigkeit.

Satz A.4 *Je zwei freie Algebren über der selben Menge B sind isomorph, die zugehörigen Funktionen η, η' stets injektiv. Damit können wir insbesondere stets $B \subset A$ annehmen.*

Beweis: Wir benutzen nochmal die schon öfter bei universellen Eigenschaften angewendete Schlußweise: Es seien A, A' frei über B und $\eta : B \to A$, $\eta' : B \to A'$ die zugehörigen Funktionen.

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[dl, "\eta"'] \arrow[dr, "\eta'"] & \\ A \arrow[rr, dashed, bend right, "\varphi"'] & & A' \arrow[ll, dashed, bend right, "\varphi'"'] \end{tikzcd}$$

A ist frei. Wähle $\lambda := \eta'$. Dies liefert einen Algebrahomomorphismus $\varphi \in A - \mathrm{Hom}(A, A')$ mit $\varphi \circ \eta = \eta'$.
A' ist frei. Wähle $\lambda := \eta$. Dies liefert einen Algebrahomomorphismus $\varphi' \in A - \mathrm{Hom}(A', A)$ mit $\varphi' \circ \eta' = \eta$.
Dann ist $\varphi' \circ \varphi \in A - \mathrm{Hom}(A, A)$, $\varphi \circ \varphi' \in A - \mathrm{Hom}(A', A')$ und

$$\varphi' \circ \varphi \circ \eta = \varphi' \circ \eta' = \eta, \quad \varphi \circ \varphi' \circ \eta' = \varphi \circ \eta = \eta'.$$

Nun wählen wir in Definition A.3 als A' gerade A und $\lambda = \eta$. Dann gibt es genau einen Homomorphismus $\psi \in \mathrm{Hom}(A, A)$ mit $\psi \circ \eta = \eta$. Der Homomorphsmus $\varphi' \circ \varphi$ erfüllt dies, ebenso id_A . Also ist $\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}_A$. Durch Rollentausch folgt völlig analog, daß auch $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_{A'}$ ist und somit φ und φ' zueinander inverse Isomorphismen sind.

Nun sind also φ und φ' Isomorphismen mit $\varphi' \circ \eta' = \eta$ und $\varphi \circ \eta = \eta'$. Ist somit η injektiv, so notwendig auch η' und umgekehrt. Bei der folgenden Konstruktion werden wir eine freie Algebra über B mit injektivem η konstruieren. Somit müssen stets diese η injektiv sein. $\square$

Konstruktion einer freien Algebra

Zu einer Menge B sei $B^n := \{w = b_1 \dots b_n \mid b_i \in B\}$ die Menge aller Folgen der Länge n aus Elementen von B. Wir setzen $B^* := \bigcup_{n=0}^{\infty} B^n$. Insbesondere für endliche Mengen B nennt man B^* auch die Menge aller Worte über dem Alphabet B. Für $n = 0$ erhalten wir die "leere Folge" $\epsilon \in B^*$.

In B^* ist auf natürliche Weise eine Multiplikation $*$ durch das Hintereinanderhängen von Folgen gegeben:

$$b_1 \dots b_n * b'_1 \dots b'_m := b_1 \dots b_n b'_1 \dots b'_m.$$

Dabei ist offenbar die Länge der Produktfolge die Summe der Längen der Faktoren. Man sagt auch, daß $(B^*, *, \epsilon)$ ein "Monoid" sei. Beachten Sie, daß B^* immer mindestens das Element ϵ enthält, auch im Falle $B = \emptyset$.

Wir bilden nun den freien von B^* (nicht nur von B!) erzeugten Vektorraum $A(B)$. Seine Elemente sind alle endlichen Linearkombinationen der Elemente der Basis B^*, (schauen Sie notfalls nochmal nach Definition und Satz Q.14!), d.h.

$$A(B) := \left\{ x = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{b_1, \dots, b_n \in B} \alpha_{b_1 \dots b_n} b_1 \dots b_n \right\}$$

oder äquivalent geschrieben

$$A(B) := \left\{ x = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{w \in B^n} \alpha_w w \right\}.$$

Die Räume

$$A_n(B) := \left\{ x = \sum_{w \in B^n} \alpha_w w \right\} = \mathrm{span}(B^n)$$

sind offenbar freie von B^n erzeugte Unterräume von $A(B)$, auf die die Situation von Satz Q.13 paßt. Wir halten diese fest als

Lemma A.5 *B^n ist Basis von $A_n(B)$,*
$A(B) = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} A_n(B)$,
speziell sind
$A_0(B) = \{x = \alpha \cdot \epsilon \mid \alpha \in K\} = K$ *der Grundkörper und*
$A_1(B) = \{x = \sum_{b \in B} \alpha_b \cdot b \mid \alpha_b \in K\}$ *der freie von B selbst (nicht B^*!) erzeugte Vektorraum.*

Die Räume $A_n(B)$ heißen "homogene Räume vom Grad n", ihre Elemente "homogen vom Grad n".

In $A(B)$ erkären wir nun eine Multiplikation $\otimes : A(B) \times A(B) \to A(B)$ durch

$$\left(\sum_{w\in B^*} \alpha_w w\right) \otimes \left(\sum_{w'\in B^*} \alpha'_{w'} w'\right) := \left(\sum_{w,w'\in B^*} \alpha_w \alpha'_{w'} ww'\right),$$

wobei ww' die oben definierte Multiplikation $*$ in B^* also das Hintereinanderhängen der Folgen w, w' bedeutet. Damit ist insbesondere für $w, w' \in B^* : w \otimes w' = ww'$. Rechnen sie selbst nach, daß die eben definierte Operation $\otimes$ assoziativ und distributiv ist und ϵ als Einselement hat. Dagegen ist ja, wenn B wenigstens zwei Elemente b_1, b_2 besitzt, dann $b_1 b_2 \neq b_2 b_1$, d.h. diese Operation ist im allgemeinen *nicht* kommutativ.

Wir fassen zusammen:

Satz A.6 *Es seien B eine Menge, B^n die Folgen der Länge n über B und $B^* = \bigcup_{n=0}^{\infty} B^n$, ferner $A(B)$ der freie Vektorraum über B^* und $A_n(B)$ die von B^n erzeugten (homogenen) Unterräume von $A(B)$. Dann ist $A(B) = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} A_n(B)$.*

Mit der eingeführten Multiplikation $\otimes$ wird $A(B)$ zu einer Algebra mit Einselement ϵ, dem einzigen Element von B^0. $A(B)$ enthält den Grundkörper $K = A_0(B)$ den freien von B erzeugten Vektorraum $A_1(B)$ und damit natürlich auch B selbst. Aus der Homogenität der Unterräume und der Definition der Multiplikation folgt zudem

$$A_n(B) \otimes A_m(B) \subset A_{n+m}(B).$$

Diese Algebra $A(B)$ erweist sich nun als freie Algebra. Genauer gilt

Satz A.7 *Mit der durch die Inklusion $B \subset A(B)$ definierten kanonischen Funktion $\eta : B \to A(B) : \eta(b) = b$ $(b \in B)$ ist $A(B)$ freie Algebra über B.*

Beweis: Sei A' irgend eine Algebra, $\lambda : B \to A'$ eine gegebene Funktion. Gibt es überhaupt einen Algebra-Homomorphismus $\varphi : A \to A'$ mit $\varphi \circ \eta = \lambda$, für den also für alle $b \in B$ stets $\varphi(b) = \lambda(b)$, so muß für alle $x, y \in A$ gelten, daß $\varphi(x \otimes y) = \varphi(x)\varphi(y)$. Somit ist insbesondere für $w = b_1 \otimes \ldots \otimes b_n \in B^*$ dann $\varphi(w) = \varphi(b_1 \otimes \ldots \otimes b_n) = \varphi(b_1) \cdot \ldots \cdot \varphi(b_n) = \lambda(b_1) \cdot \ldots \cdot \lambda(b_n)$, und da ϵ das Einselement von $A(B)$ ist ist auch $\varphi(\epsilon) = e'$, also das Einselement von A'. Folglich muß φ auf B^* folgende Werte annehmen:

$$\varphi(\epsilon) = e',\ \varphi(b) = \lambda(b),\ \varphi(b_1 \cdots b_n) = \lambda(b_1) \cdot \ldots \cdot \lambda(b_n), \quad (b, b_1, \ldots, b_n \in B).$$

Da $A(B)$ der freie Vektorraum über B^* ist, läßt sich diese Vorgabe auf genau eine Weise zu einem Vektorraum-Homomorphismus $\varphi : A(B) \to A'$ fortsetzen. Der ist dann aber auch schon ein Algebra-Homomorphismus; denn auf B^* ist $\varphi(w) \cdot \varphi(w') = \varphi(ww')$ und somit

$$\begin{aligned}
\varphi(\sum_w \alpha_w w) \cdot \varphi(\sum_{w'} \alpha'_{w'} w') &= (\sum_w \alpha_w \varphi(w)) \cdot (\sum_{w'} \alpha'_{w'} \varphi(w')) \\
&= \sum_{w,w'} \alpha_w \alpha'_{w'} \varphi(w) \cdot \varphi(w') = \sum_{w,w'} \alpha_w \alpha'_{w'} \varphi(ww') \\
&= \varphi(\sum_{w,w'} \alpha_w \alpha'_{w'} ww') = \varphi\left((\sum_w \alpha_w w) \otimes (\sum_{w'} \alpha'_{w'} w')\right)
\end{aligned}$$

Damit ist ein $\varphi \in A - \mathrm{Hom}(A(B), A')$ mit $\varphi \circ \eta = \lambda$ gefunden und die Konstruktion zeigt, daß es nur diesen einen geben kann. Die benutzte Funktion η war die Einbettung von $B \in A(B)$ und damit trivialerweise injektiv. Also ist auch Satz A.4 jetzt vollständig gezeigt. □

Wir haben nun zu jeder Menge B eine freie Algebra $A(B)$ konstruiert, damit aber anders als bei Vektorräumen noch nicht alle Algebren erfaßt. Es gilt jedoch

Satz A.8 *Jede Algebra ist homomorphes Bild einer freien Algebra, d.h. zu jeder Algebra A' gibt es eine Menge B und einen surjektiven Algebra-Homomorphismus $\varphi : A(B) \to A'$.*

Beweis: Wähle als Menge B die ganze Algebra A', d.h. $B := A'$ und als $\lambda : B \to A'$ gerade $\lambda := \mathrm{id}_{A'}$. Da $A(B)$ frei ist über B gibt es dann einen Homomorphismus $\varphi : A(B) = A(A') \to A'$, der λ fortsetzt. Da λ surjektiv ist, muß es φ ebenfalls sein. $\square$

Diese hier benutzte freie Algebra $A(A')$ ist selbst für "kleine" Algebren A' ein riesiges Objekt und Sie sollten gar nicht versuchen, sich dies elementweise vorzustellen. Deutlich ist aber, daß der eben konstruierte Homomorphismus φ keineswegs injektiv sein kann. Da jeder Homomorphismus von Algebren auch ein Homomorphismus von Vektorräumen ist, (wir brauchen ja nur die Multiplikation in den Algebren zu vergessen und erhalten Vektorräume,) führt uns dies auf die Untersuchung der Kerne von Algebra-Homomorphismen. Hierzu folgende

Definition A.9 (Ideal) *Es sei A eine Algebra. Eine Teilmenge $U \subset A$ heißt ein (zweiseitiges) Ideal in A, wenn*

(i) U ein Unterraum von A und

(ii) für alle $u \in U, x, y \in A$ stets $xuy \in U$ ist oder abgekürzt $AUA \subset U$. Da wir ein Einselement der Multiplikation haben bedeutet dies: Ist von einem Produkt ein Faktor in U, so schon das ganze Produkt.

Der Ideal-Begriff ist fundamental für alle Untersuchungen im Zusammenhang mit Algebren und verwandten Strukturen. Ein Beispiel hatten wir schon in Kapitel Z betrachtet, nämlich die Menge $\mathcal{J}(f)$ aller Polynome in $K[X]$, die von einem festen Polynom – dort dem Minimalpolynom zu f – geteilt werden.

Satz A.10 *Ist $\varphi \in A - \mathrm{Hom}(A, A')$ also ein Algebra-Homomorphismus, und ist $U := \{x \in A \mid \varphi(x) = 0\}$ der Kern von φ, so ist U ein Ideal in A.*

Beweis: Da φ auch ein Vektorraum-Homomorphismus ist, ist U insbesondere ein Unterraum. Ferner ist für $u \in U$ ja $\varphi(u) = 0$ und damit für beliebige $x, y \in A$ dann

$$\varphi(xuy) = \varphi(x)\varphi(u)\varphi(y) = \varphi(x) \cdot 0 \cdot \varphi(y) = 0,$$

sodaß auch $xuy \in \ker(\varphi) = U$ ist. $\square$

Dieser Satz läßt sich umkehren und diese Umkehrung wird sich als ungeheuer wirksames Instrument zur Konstruktion neuer Algebren mit vorgegebenen Eigenschaften erweisen.

Zunächst jedoch ein paar Beispiele für Ideale:

In der freien Algebra $A(B)$ sind alle Unterräume $U_m := \bigoplus_{n \geq m} A_n(B)$, $(m = 0, 1, \ldots)$ Ideale; denn für jedes Element kann der Grad durch eine Multiplikation mit einem anderen Element höchstens wachsen.

Ist ferner A eine beliebige Algebra, darin $S \subset A$ eine beliebige Menge, so gibt es stets ein Ideal, das S enthält, nämlich A selbst. Da der Durchschnitt von beliebig vielen Idealen stets wieder ein Ideal ist (warum?), können wir also den Durchschnitt aller S enthaltender Ideale in A bilden und erhalten das Ideal

$$U(S) := \bigcap_{\substack{S \subset U \subset A \\ U \text{ Ideal}}} U$$

Definition A.11 *Dieses eben konstruierte Ideal heißt das von S erzeugte Ideal.*

Zeigen Sie selbst, daß dieses Ideal $U(S)$ aus allen endlichen Summen von Elementen der Art xsy besteht, wobei $s \in S, x, y \in A$ sind.

Nun kommen wir zu der angekündigten Umkehrung von Satz A.8

Satz und Definition A.12 (Quotienten-Algebra)

Es sei A eine Algebra, $U \subset A$ ein Ideal. Dann gibt es eine Algebra A/U, genannt "Quotienten-Algebra" und einen surjektiven Homomorphismus $\pi : A \to A/U$, genannt " kanonischer Epimorphismus" mit $\ker\pi = U$, sodaß die Algebra A/U die folgende sie bis auf Isomorphie charakterisierende universelle Eigenschaft besitzt:

$$\begin{tikzcd} U \subset \ker\varphi \subset & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & A' \\ & A/U \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Für jede Algebra A' und jeden Homomorphismus $\varphi : A \to A'$ mit $U \subset \ker\varphi$ gibt es genau einen Homomorphismus $\psi : A/U \to A'$, sodaß $\varphi = \psi \circ \pi$.

Beweis: Wir hatten einen analogen Satz für Vektorräume bewiesen, auf den wir nun zurückgreifen. Zunächst vergessen wir in unseren Algebren die Multiplikation, sodaß nur noch Vektorräume und Vektorraum-Homomorphismen übbrigbleiben. Insbesondere ist U ein Unterraum von A. Dann haben wir aber genau die schon bei Vektorräumen betrachtete Situation. Dies bedeutet, daß es einen Vektorraum A/U und einen Vektorraum-Epimorphismus $\pi : A \to A/U$ gibt, mit dem alles in unserem Satz behauptete gilt, solange wir nicht die Algebra-Multiplikation ins Spiel bringen. Wir haben also nur noch folgendes zu leisten:

1. *Definiere in A/U eine Multiplikation, die die schon vorhandene Vektorraum-Struktur zu einer Algebra mit Eins erweitert, und zwar so, daß π zu einem Algebra-Homomorphismus wird.*

2. *Zeige, daß damit auch $\psi : A/U \to A'$ ein Algebra-Homomorphismus wird.*

Zu 1.: Sei $\overline{x}, \overline{y} \in A/U$. Da π surjektiv ist, gibt es $x, y \in A$, sodaß $\pi(x) = \overline{x}, \pi(y) = \overline{y}$. Nun definieren wir eine Multiplikation in A/U durch

$$\overline{x} \cdot \overline{y} := \pi(xy), \text{ d.h. } \pi(x) \cdot \pi(y) := \pi(xy). \qquad (*)$$

Da π ja eine nichttrivialen Kern hat, gibt es verschiedene x, die alle von π auf $\overline{x}$ abgebildet werden, sodaß wir prüfen müssen, ob mit $(*)$ überhaupt eine vernünftige Operation definiert ist:

Sei also $\pi(x) = \pi(x') = \overline{x}, \pi(y) = \pi(y') = \overline{y}$. Dann ist $\pi(x - x') = \pi(x) - \pi(x') = 0$ und ebenso $\pi(y - y') = 0$. Folglich ist $u := x - x' \in U = \ker\pi$ und ebenso $v := y - y \in U = \ker\pi$. Also ist

$$x = x' + u, \; y = y' + v \text{ mit } u, v \in U = \ker\pi.$$

Dann erhalten wir aber mit dem Einselement e von A

$$xy = (x' + u)(y' + v) = x'y' + x'v + uy' + uv = x'y' + (x've + euy' + euv)$$

und im letzten Term ist die ganze Klammer in $U = \ker\pi$. Wir haben also $xy = x'y' + w$ mit $w \in \ker\pi$, sodaß $\pi(xy) = \pi(x'y') + \pi(w) = \pi(x'y')$.

Damit ist also durch $(*)$ jedenfalls eine Operation in A/U definiert. Prüfen wir die Axiome:

A2: assoziativ:

$$\overline{(xy)} \cdot \overline{z} = \pi(xy) \cdot \pi(z) = \pi((xy)z) = \pi(x(yz)) = \pi(x) \cdot \pi(yz) = \overline{x} \cdot \overline{(yz)}.$$

A3: distributiv:

$$\overline{(x+y)} \cdot \overline{z} = \pi((x+y)z) = \pi(xz+yz) = \pi(xz) + \pi(yz) = \overline{(xz)} + \overline{(yz)}.$$

und analog die andere Formel.

A4:

$$\begin{aligned}\alpha \cdot \overline{(xy)} = \alpha \cdot \pi(xy) &= \pi(\alpha xy) = \pi((\alpha x)y) \\ &= \pi(\alpha x) \cdot \pi(y) = (\alpha \cdot \pi(x)) \cdot \pi(y) = (\alpha \cdot \overline{x}) \cdot \overline{y} \\ \alpha \cdot \overline{(xy)} = \alpha \cdot \pi(xy) &= \pi(\alpha xy) = \pi(x(\alpha y)) \\ &= \pi(x) \cdot \pi(\alpha y) = \pi(x) \cdot (\alpha \cdot \pi(y))) = \overline{x} \cdot (\alpha \cdot \overline{y})\end{aligned}$$

A5: Sei $\overline{e} := \pi(e)$ für das Einselement e von A. Dann ist

$$\overline{e} \cdot \overline{x} = \pi(ex) = \pi(x) = \overline{x} = \pi(x) = \pi(xe) = \overline{x} \cdot \overline{e},$$

sodaß also $\overline{e} := \pi(e)$ das Einselement von A/U ist.

Mit der durch $(*)$ mittels π von A auf A/U übertragenen Multiplikation ist also A/U eine Algebra und dabei trivialerweise auch π ein Algebra-Homomorphismus. Damit ist 1. gezeigt.

Zu 2. : Wir wissen, daß es einen Vektorraum-Homomorphismus ψ gibt, sodaß $\varphi = \psi \circ \pi$, d.h. für alle $x \in A$:

$$\varphi(x) = (\psi \circ \pi)(x) = \psi(\pi(x)) = \psi(\overline{x}),$$

wobei wieder $\overline{x} := \pi(x)$. Dann ist insbesondere

$$\begin{aligned}&\psi(\overline{x} \cdot \overline{y}) = \psi(\pi(xy)) = \varphi(xy) = \varphi(x) \cdot \varphi(y) = \psi(\overline{x}) \cdot \psi(\overline{y}) \text{ und} \\ &\psi(\overline{e}) = \psi(\pi(e)) = \varphi(e) = \text{ Einselement von } A'.\end{aligned}$$

Also ist ψ ein Algebra-Homomorphismus. Damit ist Satz und Definition A.12 gezeigt. □

2

Wir werden diese Konstruktion mehrfach auf freie Algebren $A(B)$ anwenden. Für die Diskussion der erhaltenen Quotienten-Algebra wird der folgende Satz helfen, der die Zerlegung in homogene Unterräume benutzt.

Satz A.13 *Es sei $A(B)$ freie Algebra, $U \subset A(B)$ ein Ideal, für das mit einem $m \in \mathbb{N}$ gilt, daß $U \subset \bigoplus_{n \geq m} A_n(B)$, ferner sei $\pi : A(B) \to A(B)/U$ der kanonische Epimorphismus. Dann ist π eingeschränkt auf $\bigoplus_{n<m} A_n(B)$ injektiv. Insbesondere enthält im Falle $m \geq 2$ die Quotientenalgebra ein isomorphes Bild von $K \oplus \mathrm{span}(B)$.*

Beweis: Es genügt zu zeigen, daß $\ker \pi \cap \bigoplus_{n<m} A_n(B) = (0)$ ist. Dies ist aber trivialerweise so; denn nach Voraussetzung ist ja $\ker \pi = U \subset \bigoplus_{n \geq m} A_n(B)$ und $(\bigoplus_{n<m} A_n(B)) \cap (\bigoplus_{n \geq m} A_n(B)) = (0)$, da es sich um Summanden einer direkten Summe handelt. □

Als nächstes wollen wir über diese Quotientenkonstruktion die sogenannten kommutativen Algebren gewinnen.

Definition A.14 (Kommutative Algebra)
Eine K-Algebra A heißt kommutativ, wenn ihre Multiplikation komutativ ist, d.h. für alle $x, y \in A$ gilt $xy = yx$.
Es sei B ein Menge, A eine kommutative Algebra. Dann heißt A freie von B erzeugte kommutative Algebra, wenn es eine Funktion $\eta : B \to A$ gibt, sodaß gilt: Zu jeder kommutativen Algebra A' und jeder Funktion $\lambda : B \to A'$ gibt es genau einen Algebra-Homomorphismus $\psi : A \to A'$ mit $\lambda = \psi \circ \eta$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[dr, "\lambda"] \arrow[dd, "\eta"'] & \\ & A' \\ A \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

Beispiele für kommutative Algebren sind etwa der Körpe K selbst oder die von einem Element erzeugte freie Algebra, d.h. die Polynome in einer Unbestimmten. Dagegen sind für $n \geq 2$ die Matrizen-Algebren $K^{n \times n}$ nicht kommutativ.

Freie kommutative Algebren werden wir gleich konstruieren. Zunächst wieder deren Eindeutigkeit:

Satz A.15 *Je zwei freie, von der selben Menge B erzeugte kommutative Algebren sind isomorph.*

Der Beweis ist eine wörtliche Wiederholung des Beweises von Satz A.4 und sei deshalb übergangen.

Nun zur Konstruktion einer freien kommutativen Algebra:

Sind A, A' Algebren, davon A' kommutativ und $\varphi : A \to A'$ ein Homomorphismus, so ist notwendig für alle $x, y \in A$:

$$\begin{aligned} \varphi(xy) &= \varphi(x)\varphi(y) = \varphi(y)\varphi(x) = \varphi(yx), \text{ d.h.} \\ 0 &= \varphi(xy) - \varphi(yx) = \varphi(xy - yx), \text{ also } xy - yx \in \ker \varphi. \end{aligned}$$

Damit ist also $\ker \varphi$ ein Ideal in A, das alle Elemente der Form $xy - yx$ enthält. Das kleinste Ideal mit dieser Eigenschaft nutzen wir nun:

Satz A.16 *Es sei B eine Menge, $A := A(B)$ die freie von B erzeugte Algebra, $U := U(S)$ das von $S := \{xy - yx \mid x, y \in A\}$ erzeugte Ideal. Dann ist $K[B] := A/U$ eine freie von B erzeugte kommutative Algebra.*

Der kanonische Epimorphismus $\pi : A \to K[B]$ ist auf B injektiv.

Beweis: Wir haben die universelle Eigenschaft aus Definition A.14 nachzuweisen.

Wir haben folgende Situation:

$$\begin{tikzcd} & B \arrow[d, phantom, "\cap"] \arrow[drr, "\lambda"] & & \\ U = U(S) \subset & A = A(B) \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & & A' \\ & A/U \arrow[urr, dashed, "\psi"'] & & \end{tikzcd}$$

A ist frei über B. Somit ist $B \subset A$ und zu jedem $\lambda : B \to A'$ gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi : A \to A'$ mit $\varphi_{|B} = \lambda$. Die Algebra A' ist kommutativ, somit enthält $\ker \varphi$ alle Elemente der Form $xy - yx$. d.h. ganz S und somit auch $U = U(S)$. Also gibt es genau ein $\psi : A/U \to A'$, sodaß mit dem kanonischen Epimorphismus $\pi : A \to A/U$ dann $\psi \circ \pi = \varphi$, d.h. $\psi \circ \pi_{|B} = \varphi_{|B} = \lambda$.
$K[B] = A/U$ ist selbst kommutativ; denn die Multiplikation in A/U ist definiert durch $\pi(x)\pi(y) = \pi(xy)$ und wegen $xy - yx \in U = \ker \pi$ ist $\pi(xy) = \pi(yx)$, d.h. $\pi(x)\pi(y) = \pi(y)\pi(x)$.
Damit ist $K[B]$ die gesuchte freie kommutative Algebra.
Das Ideal U wird erzeugt von $S := \{xy - yx \mid x, y \in A\}$ und diese Elemente liegen alle in $\bigoplus_{n \geq 2} A_n(B)$. Damit ist auch $U = U(S) \subset \bigoplus_{n \geq 2} A_n(B)$ und nach Satz A.13 ist dann π eingeschränkt auf $A_0(B) \oplus A_1(B)$ injektiv, woraus unmittelbar die letzte Behauptung folgt.

□

Dieses Hexen mit universellen Eigenschaften klingt natürlich furchtbar abstrakt. Was wir dabei erhalten ist aber gar nicht so gespenstisch. Untersuchen wir zwei typische Fälle für $K[B]$:

B habe genau ein Element, $B = \{b\}$: Wir schreiben statt $A(\{b\})$ kurz $A(b)$. Diese freie Algebra $A(b)$ ist erzeugt von $\{b\}^*$, der Menge aller endlichen Folgen aus $\{b\}$. Hier hat jede solche Folge w die Form $w = bb \dots b$. Sind dies genau n Exemplare von b, so schreiben wir dafür kurz $w = b^n$. Somit ist $\{b\}^* = \{b^n \mid n = 0, 1, \dots\}$ und $A(b)$ besteht aus allen Elementen der Form

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n b^n, \ \alpha_n \in K, \ \neq 0 \text{ nur endlich oft.}$$

Diese Algebra ist trivialerweise schon selbst kommutativ. Damit ist für alle $x, y \in A(b)$ stets $xy - yx = 0$. Wir haben also $S = \{0\}$ und damit auch $U(S) = 0$. Wegen $U(S) = \ker \pi$ ist also π ein Isomorphismus $A(b) \to K[b]$. Benennen wir noch $\pi(b) =: X$, so haben also alle Elemente von $K[b]$ die Gestalt

$$x = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n X^n, \ \alpha_n \in K, \ \neq 0 \text{ nur endlich oft,}$$

d.h. wir haben genau die Algebra der Polynome in einer Unbestimmten erhalten.

Die Situation ändert sich, wenn B mindestens zwei Elemente besitzt. Betrachten wir den Fall

$B = \{b, b'\}$: Wir schreiben wieder $A(b, b')$ statt $A(\{b, b'\})$. Die freie Algebra $A(b, b')$ besteht aus allen endlichen Linearkombinationen von endlichen Folgen aus b und b'. Diese Algebra ist nicht mehr kommutativ, da ja etwa bb' und $b'b$ verschiedene Elemente sind. Beim Übergang $\pi : A(b, b') \to K[b, b']$ wird aber insbesondere

$$\pi(b)\pi(b') = \pi(bb') = \pi(b'b) = \pi(b')\pi(b),$$

d.h. die Bilder $X := \pi(b)$ und $Y := \pi(b')$ in $K[b, b']$ dürfen wir vertauschen. Ist also $w \in B^*$ eine Folge, die genau i-mal b und genau j mal b' enthält, so ist

$$\pi(w) = (\pi(b))^i (\pi(b'))^j = X^i Y^j.$$

Damit besteht $K[b, b']$ aus allen Elementen der Form

$$\sum_{i,j=0}^{\infty} \alpha_{ij} X^i Y^j, \ \alpha_{ij} \in K, \ \neq 0 \text{ nur endlich oft,}$$

d.h. aus allen "Polynomen in den beiden Variablen X, Y" über K.

Der homogene Unterraum $A_n(b, b')$ wird von allen Folgen der Längen n in B^* erzeugt. Die Bilder seiner Elemente unter π in $K[b, b']$ haben somit die Gestalt

$$\sum_{i+j=n} \alpha_{ij} X^i Y^j, \ \alpha_{ij} \in K,$$

was man üblicherweise als "homogene Polynome vom Grad n in den beiden Variablen X, Y" bezeichnet.

Für größerer Mengen B enthält man entsprechend "Polynome" in mehr Variablen. – Man beachte, daß selbst, wenn B unendlich viele Elemente besitzt, jedes Polynom nur endlich viele Terme und damit auch nur endlich viele Variablen enthält.–

Man nennt $K[B]$ auch die "Polynom-Algebra mit den Unbestimmten B."

3

Wir werden noch ein weiteres Beispiel einer Quotienten-Algebra untersuchen und dabei die äußere Algebra zu einem Vektorraum gewinnen, die in engem Zusammenhang mit Determinantentheorie steht. Determinanten haben etwas mit n-linearen Abbildungen zu tun, und diese hängen eng mit der schon konstruierten freien Algebra $A(B)$ zusammen.

Schauen wir zunächst die freie Algebra $A(B)$ von einem anderen Standpunkt an. Wir hatten $A(B)$ in eine direkte Summe der homogenen Unterräume zerlegt (Satz A.6), d.h. dargestellt als

$$A(B) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} A_n(B).$$

Hier war insbesondere $A_0 = K,\ A_1 = \mathrm{span}(B)$, d.h. ein Vektorraum mit Basis B. Man rechnet leicht nach, daß die Räume $A_n(B)$ genau aus allen (endlichen) Summen von Produkten von genau n Elementen aus $A_1(B)$ bestehen. Damit ist also der von B erzeugte Vektorraum $V := A_1(B)$ in $A(B)$ enthalten und legt auch schon alle Räume $A_n(B)$, d.h. ganz $A(B)$ fest. Somit können wir statt von der Menge B auch von dem Vektorraum V aus die freie Algebra gewinnen, d.h. ohne Rückgriff auf eine Basis B von V. Dieser Standpunkt wird gerechtfertigt durch

Satz A.17 *Es sei V ein (endlich dimensionaler) Vektorraum, B, B' seien Basen von V und $A(B)$ bzw. $A(B')$ die von B bzw. B' erzeugten freien Algebren. Dann gelten:*

(i) Es gibt einen Algebra-Isomorphismus $\varphi : A(B) \to A(B')$,

(ii) dessen Einschränkungen $\varphi_n := \varphi_{|A_n(B)}$ auf die homogenen Räume $A_n(B)$ sind Vektorraum-Isomorphismen $A_n(B) \to A_n(B')$.

Beweis: Zu (i) : Da B und B' Basen deselben Raumes sind, gibt es eine Bijektion $\lambda : B \to B'$. Ferner seien $\eta : B \to A(B)$ und $\eta' : B' \to A(B')$ die Inklusionen. Da $A(B)$ und $A(B')$ frei sind, haben wir Homomorphismen $\varphi : A(B) \to A(B')$ mit $\varphi \circ \eta = \eta' \circ \lambda$ und $\psi : A(B') \to A(B)$ mit $\psi \circ \eta' = \eta \circ \lambda^{-1}$. Dafür ist dann $\psi \circ \varphi : A(B) \to A(B) : \psi \circ \varphi \circ \eta = \psi \circ \eta' \circ \lambda = \eta \circ \lambda^{-1} \circ \lambda = \eta$ bzw. $\varphi \circ \psi : A(B') \to A(B') : \varphi \circ \psi \circ \eta' = \varphi \circ \eta \circ \lambda^{-1} = \eta' \circ \lambda \circ \lambda^{-1} = \eta'$, woraus wie bei Satz A.4 folgt, daß φ und ψ Isomorphismen sind.

$$\begin{tikzcd}
B \arrow[rr, bend right, "\lambda"'] \arrow[d, "\eta"'] & & B' \arrow[ll, bend right, "\lambda^{-1}"'] \arrow[d, "\eta'"] \\
A(B) \arrow[rr, bend right, "\varphi"'] & & A(B') \arrow[ll, bend right, "\psi"']
\end{tikzcd}$$

Zu (ii): $n = 0$: Sind ϵ bzw. ϵ' die Einselemente von $A(B)$ bzw. $A(B')$, so ist $A_0(B) = \{\alpha\epsilon \mid \alpha \in K\}$ und $A_0(B') = \{\alpha\epsilon' \mid \alpha \in K\}$ und somit notwendig $\varphi(\alpha\epsilon) = \alpha\varphi(\epsilon) = \alpha\epsilon'$, woraus man abliest, daß φ_0 ein Isomorphismus ist.

$n = 1$: Da φ insbesondere B auf B' bijektiv abbildet und beides Basen von $A_1(B) = V = A_1(B')$ sind, ist φ_1 ein Vektorraum-Isomorphismus $A_1(B) \to A_1(B')$.

$n > 1$: Wie oben bemerkt wird $A_n(B)$ von den n-fachen Produkten von Elementen aus V erzeugt. Damit überträgt sich die Aussage vom Fall $n = 1$ auf den allgemeinen Fall. □

Das Wesentliche an der freien Algebra $A(B)$ ist also garnicht die Menge B, sondern der von ihr erzeugte freie Vektorraum V, zu dem B eine Basis ist und der selbst wiederum in $A(B)$ als homogener Raum $A_1(B)$ enthalten ist. Dieser Standpunkt führt uns zu folgender Festsetzung:

Definition und Satz A.18 (Tensoralgebra) *Es sei V ein (endlich dimensionaler) Vektorraum, B eine Basis von V und $A(B)$ die freie Algebra über B. Wir nennen dann auch $T(V) := A(B)$ die "Tensoralgebra über V" und die homogenen Unterräume $T_n(V) := A_n(B)$ auch "Tensorräume".*

Es ist $T_0(V) = K$ der Grundkörper, $T_1(V) = V$ und ferner für $n \geq 2$ stets $T_n(V) = \mathrm{span}\{x_1 \otimes \ldots \otimes x_n \mid x_i \in V\}$, und damit dann

$$T(V) = \bigoplus_{n=0}^{\infty} T_n(V).$$

Die Tensoralgebra $T(V)$ und ihre Tensor-Unterräume sind durch V bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt. $T_n(V)$ nennt man auch das Tensorprodukt von n Exemplaren des Raumes V. Wir schreiben dafür auch

$$T_n(V) = V \otimes \ldots \otimes V \qquad (n \text{ mal.})$$

Warnung! *Durch die zuletzt notierte Schreibweise lasse man sich nicht zu der irrigen Meinung verleiten, daß alle Elemente von $V \otimes \ldots \otimes V$ die Gestalt $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$ hätten. Alle solchen Elemente liegen drin und erzeugen diesen Raum, aber er besteht aus allen Linearkombinationen solcher Elemente.*

Diese Tensorräume besitzen nun eine universelle Eigenschaft im Zusammenhang mit multilinearen Abbildungen, die schon bei Determinanten (n-linear) und reellen Skalarprodukten (bilinear) aufgetreten waren.

Definition A.19 (n-linear) *Es seien $V_1, \ldots, V_n, W$ Vektorräume über dem selben Körper K. Eine Abbildung*

$$f : V_1 \times V_2 \times \ldots \times V_n \to W : \ (x_1, x_2, \ldots, x_n) \mapsto f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

heißt n-linear, wenn für jedes $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ gilt: Fixiert man alle Argumente bis auf das mit Nummer i, so ist die entstehende Funktion $V_i \to W$ ein Vektorraum-Homomorphismus, also

$$\begin{aligned} & f(x_1, \ldots, x_{i-1}, \alpha x + \beta y, x_{i+1}, \ldots, x_n) = \\ & = \alpha f(x_1, \ldots, x_{i-1}, x, x_{i+1}, \ldots, x_n) + \beta f(x_1, \ldots, x_{i-1}, y, x_{i+1}, \ldots, x_n). \end{aligned}$$

Ist speziell $V_1 = \ldots = V_n = V$, so spricht man von n-linearen Abbildungen von V nach W.

Die 1-linearen Abbildungen sind offenbar genau die gewöhnlichen Vektorraum-Homomorphismen.

Zu jedem Vektorraum V ist die Abbildung

$$\otimes : V \times \ldots \times V \to T_n(V) : (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$$

eine n-lineare Abbildung, da ja in der freien Algebra, d.h. in unserer Tensoralgebra das Distributivgesetz für die Multiplikation $\otimes$ gilt und skalare Faktoren vor das Produkt gezogen werden dürfen, (Axiome A2, A3, A4). Wir werden sehen, daß damit eigentlich schon das Wichtigste über n-lineare Abbildungen gesagt ist.

Zunächst noch ein paar Vorbereitungen. Lineare Abbildungen sind durch ihre Werte auf einer Basis bestimmt. Ähnliches gilt für n-lineare Abbildungen:

Satz A.20 *Es seien $V_1, \ldots, V_n$ endlich dimensionale Vektorräume jeweils mit Basen $B_i := \{b_1^{(i)}, \ldots, b_{m_i}^{(i)}\}$, ferner W ein Vektorraum und $\lambda : B_1 \times \ldots \times B_n \to W$ eine Funktion. Dann gibt es genau eine n-lineare Abbildung $f : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ mit $f_{|B_1 \times \ldots \times B_n} = \lambda$.*

Beweis: Wir behandeln nur den Fall $n = 2$ und nennen die Basen $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ und $C = \{c_1, \dots, c_n\}$. Ist $f : V_1 \times V_2$ 2-linear mit $f_{|B\times C} = \lambda$, so haben wir also für

$$x_1 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i, \quad x_2 = \sum_{j=1}^{n} \beta_j c_j,$$

$$\begin{aligned} f(x_1, x_2) &= f(\sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j c_j) = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i f(b_i, \sum_{j=1}^{n} \beta_j c_j) \\ &= \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \sum_{j=1}^{n} \beta_j f(b_i, c_j) = \sum_{i=1,j=1}^{m,n} \alpha_i \beta_j \lambda(b_i, c_j). \end{aligned}$$

Somit bestimmen die $\lambda(b_i, c_j)$ schon die Werte von f, d.h. es gibt höchstens eine Abbildung mit diesen Werten. Andrerseits definiert obige Formel auch eine bilineare Abbildung, womit alles gezeigt ist.

Die Ausdehnung auf $n > 2$ können Sie wohl selbst! □

Nun können wir die angekündigte Eigenschaft des Tensorproduktes zeigen.

Satz A.21
Es seien V, W Vektorräume, $f : V \times \dots \times V \to W$ eine n-lineare Abbildung. Dann gibt es genau einen Vektorraum-Homomorphismus $\varphi : T_n(V) \to W$, sodaß für alle $x_i \in V$ gilt, daß $f(x_1, \dots, x_n) = \varphi(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$, d.h. $f = \varphi \circ \otimes$.

$$\begin{tikzcd} V \times \dots \times V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\otimes"'] & A \\ T_n(V) \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] & \end{tikzcd}$$

Beweis: Es sei B eine Basis von V. Dann ist $\{b_1 \otimes \dots \otimes b_n \mid b_i \in B\}$ Basis von $T_n(V)$. Somit gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi : T_n(V) \to W$ mit

$$\varphi(b_1 \otimes \dots \otimes b_n) = f(b_1, \dots, b_n) \text{ für alle } (b_1, \dots, b_n) \in B \times \dots \times B.$$

Die Abbildung

$$\otimes : V \times \dots \times V \to T_n(V) : (x_1, \dots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \dots \otimes x_n$$

ist n-linear. Somit ist auch

$$\varphi \circ \otimes : (x_1, \dots, x_n) \mapsto \varphi(x_1 \otimes \dots \otimes x_n)$$

n-linear und stimmt auf $B \times \dots \times B$ mit f überein. Damit ist diese Abbildung nach Satz A.20 identisch mit f. □

Jede n-lineare Abbildung $V \times \dots \times V \to W$ läßt sich also in folgende zwei Teilabbildungen zerlegen:

- *Führe zunächst die "universelle" n-lineare Abbildung $\otimes : V \times \dots \times V \to T_n(V)$ in den Tensorraum aus und anschließend*
- *eine (im gewöhnlichen Sinne) lineare Abbildung $\varphi : T_n(V) \to W$.*

Wir hatten n-lineare Abbildungen aus einem Produkt im allgemeinen verschiedener Räume definiert. Dies fügt sich hier zwanglos ein. Seien $V_1, \dots, V_n$ beliebige Vektorräume. Wir bilden einen Raum V, der alle diese Räume als Unterräume enthält, etwa die direkte Summe $V := \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$. Nun bilden wir den Tensorraum $T_n(V)$ und betrachten darin den Unterraum

$$V_1 \otimes \dots \otimes V_n := \operatorname{span}(x_1 \otimes \dots \otimes x_n \mid x_i \in V_i, i = 1, \dots, n) \subset T_n(V).$$

Definition A.22 *Der eben eingeführte Raum $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ heißt das "Tensorprodukt" der Räume $V_1, \ldots, V_n$.*

Die Rechtfertigung für diese Definition liegt in folgendem

Satz A.23 *(i) Zu jeder n-linearen Abbildung $f : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ gibt es genau einen Vektorraum-Homomorphismus $\varphi : V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \to W$ mit*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n).$$

(ii) Das Tensorprodunkt ist durch die universelle Eigenschaft (i) bis auf Isomorphoie eindeutig bestimmt.

(iii) Für jede Permutation π der Indizes $1, \ldots, n$ sind die Räume $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ und $V_{\pi(1)} \otimes \ldots \otimes V_{\pi(n)}$ isomorph.

Beweis: Zu (i): Die Existenz von φ : Wir wählen einen Raum V, sodaß $V_i \subset V$ für alle i. Dann gibt es zu jedem V_i einen komplementären Raum U_i in V, sodaß $V = V_i \oplus U_i$. Dazu seien $\pi_i : V \to V_i$ die Projektoren nach Satz Q.15. Wir erweitern die n-lineare Abbildung $f : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ zu einer Abbildung

$$g : V \times \ldots \times V \to W : g(x_1, \ldots, x_n) := f(\pi_1(x_1), \ldots, \pi_n(x_n)),$$

die offenbar wieder n-linear ist, da ja die π_i Vektorraum-Homomorphismen sind. Nach Satz A.21 gibt es zu g (genau) einen Homomorphismus $\psi : T_n(V) \to W$, sodaß stets

$$g(x_1, \ldots, x_n) = \psi(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n)$$

ist. Ist nun sogar $x_i \in V_i$, so ist $\pi(x_i) = x_i$ und damit in dieser Situation sogar

$$g(x_1, \ldots, x_n) := f(x_1, \ldots, x_n).$$

Also ist die Einschränkung von ψ auf den Unterraum $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n \subset T_n(V)$ der gesuchte Homomorphismus φ.

Durch die Bedingung $f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n)$ ist dieser Homomorphismus φ auf einem Erzeugendensystem von $V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ festgelegt, sodaß es auch höchstens einen solchen geben kann.

Zu (ii): Zum Tensorprodukt $P := V_1 \otimes \ldots \otimes V_n$ gehört die "natürliche" n-lineare Abbildung

$$\eta : V_1 \times \ldots \times V_n \to P, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \otimes \ldots \otimes x_n,$$

sodaß sich jede n-lineare Abbildung $f : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ mit einem eindeutig bestimmten Homomorphismus φ als $f = \varphi \circ \eta$ schreiben läßt.

Sei nun noch so eine Situation gegeben, d.h. eine weiterer Raum P' und eine n-lineare Abbildung $\eta' : V_1 \times \ldots \times V_n \to P'$, sodaß sich jede n-lineare Abbildung $f : V_1 \times \ldots \times V_n \to W$ mit einem eindeutig besimmten Homomorphismus ψ als $f = \psi \circ \eta'$ schreiben läßt.

Dann, so wird behauptet, sind P und P' isomorph. Dies geht wieder mit der schon mehrfach benutzten Methode:

– Wähle $W := P'$, $f := \eta'$. Dies liefert einen Homomorphismus $\varphi : P \to P'$ mit $\eta' = \varphi \circ \eta$.

– Wähle $W := P$, $f := \eta$. Dies liefert einen Homomorphismus $\psi : P' \to P$ mit $\eta = \psi \circ \eta'$.

Daraus erhält man

$$\psi \circ \varphi \circ \eta = \psi \circ \eta' = \eta \text{ und ebenso } \varphi \circ \psi \circ \eta' = \varphi \circ \eta = \eta',$$

woraus $\psi \circ \varphi = \mathrm{id}_P$ und $\varphi \circ \psi = \mathrm{id}_{P'}$ folgen, sodaß φ und ψ zueinander inverse Isomorphismen sind.

Dieser Beweis zeigt überdies, daß der als gemeinsamer Oberraum der V_i gewählte Raum V für das erhaltene Tensorprodukt völlig belanglos ist.

Zu (iii): Wir zeigen dies exemplarisch für zwei Räume V_1, V_2 und verwenden dabei (ii).

Dazu sei

$$P' := V_2 \otimes V_1 \text{ und } \eta' : V_1 \times V_2 \to P' : \ (x_1, x_2) \mapsto x_2 \otimes x_1.$$

Man rechne nach, daß η' bilinear ist.

Nun betrachten wir $f : V_1 \times V_2 \to W$, bilinear und bilden dazu

$$g : V_2 \times V_1 \to W : g(x_2, x_1) = f(x_1, x_2).$$

Mit f ist auch g bilinear und damit gibt es einen Homomorphismus

$$\psi : P' = V_2 \otimes V_1 \to W : g(x_2, x_1) = \psi(x_2 \otimes x_1).$$

Dann ist aber

$$(\psi \circ \eta')(x_1, x_2) = \psi(x_2 \otimes x_1) = g(x_2, x_1) = f(x_1, x_2),$$

d.h. $f = \psi \circ \eta'$ und, wie oben gesehen, kann es überhaupt nur einen solchen Homomorphismus ψ geben. Also erfüllt $P' := V_2 \otimes V_1$ mit η' die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes von V_1 und V_2 und ist damit isomorph zu $V_1 \otimes V_2$. $\square$

Mit diesem Satz können wir auch zu einer konkreten Darstellung von Tensorprodukten kommen. Betrachten wir exemplarisch das Tensorprodukt

$$K^m \otimes K^n \otimes K^\ell :$$

Wir bilden

$$K^{m \times n \times \ell} := \{A := (\alpha_{\mu\nu\lambda}) \mid \alpha_{\mu\nu\lambda} \in K, 1 \le \mu \le m, 1 \le \nu \le n, 1 \le \lambda \le \ell\},$$

womit die Bildung von Matrizen auf höherer Stufe, hier dreidimensional, verallgemeinert ist. Solche “Tensoren” genannte “Kisten voll Zahlen” sind historisch der Zugang zur Tensorrechnung überhaupt.

Als Vektorraum ist natürlich der $K^{m \times n \times \ell}$ auf natürliche Weise isomorph zum $K^{mn\ell}$ – bzw. analog für höhere Dimensionen – und die Tensoren, die an genau einer Position eine 1, sonst überall 0 haben, bilden eine Basis; denn bis auf die Schreibweise sind sie ja gerade die kanonischen Einheitsvektoren. Die Abbildung

$$\eta : K^m \times K^n \times K^\ell \to K^{m \times n \times \ell} : \left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \zeta_1 \\ \vdots \\ \zeta_\ell \end{pmatrix} \right) \mapsto (\xi_\mu \eta_\nu \zeta_\lambda)$$

ist offenbar trilinear. Sie bewirkt für die kanonischen Einheitsvektoren mit dem KRONECKERsymbol δ_{ij} :

$$\eta(e_i, e_j, e_k) = (\delta_{\mu i} \cdot \delta_{\nu j} \cdot \delta_{\lambda k}),$$

was als Bilder also gerade die kanonische Basis im $K^{m \times n \times \ell}$ ergibt. Mit Satz A.20 erhalten wir also für $K^{m \times n \times \ell}$ mit η die universelle Eigenschaft des Tensorproduktes, sodaß (bis auf Isomorphie)

$$K^m \otimes K^n \otimes K^\ell = K^{m \times n \times \ell}$$

ist.

Die Verallgemeinerung auf zwei bzw. auf mehr als drei Faktoren ist wohl klar.

Ein wichtiger Spezialfall sei noch explizit erwähnt.

Zu dem Vektorraum V sei $V^* := \mathrm{Hom}(V, K)$ der Raum der linearen Funktionale auf V. Wir setzen

$$V_s^r := \underbrace{V \otimes \ldots \otimes V}_{r} \otimes \underbrace{V^* \otimes \ldots \otimes V^*}_{s},$$

das Tensorprodukt aus r Exemplaren von V und s Exemplaren von V^*. Solche Tensoren nennt man r-fach kontravariant und s-fach kovariant, was auf ihr Verhalten bei Koordinatentransformationen zurückgeht. Es ist sinnvoll $V_0^0 := K$ zu setzen.

Zwischen solchen Räumen gibt es eine wichtige natürliche Abbildung, genannt "Verjüngung".

Satz und Definition A.24 (Verjüngung) *Für $r, s \geq 1$ gibt es genau einen Homomorphismus ψ, genannt Verjüngung, mit folgenden Eigenschaften:*

$$\begin{gathered}\psi : V_s^r \to V_{s-1}^{r-1} : \\ x_1 \otimes \ldots \otimes x_r \otimes y_1^* \otimes \ldots \otimes y_s^* \mapsto y_s^*(x_r) \cdot x_1 \otimes \ldots \otimes x_{r-1} \otimes y_1^* \otimes \ldots \otimes y_{s-1}^*.\end{gathered}$$

Beweis: y_s^* ist ein Funktional auf V, somit $y_s^*(x_r) \in K$. Zum Nachweis, daß es einen Homomorphismus mit den behaupteten Eigenschaften gibt, nutzen wir Satz A.23. Zunächst kommt es demnach nicht auf die Reihenfolge der Faktoren an, sodaß wir auch

$$V_s^r = V \otimes V^* \otimes V_{s-1}^{r-1}$$

schreiben können. Die Abbildung

$$\begin{aligned} f : V \times V^* \times V_{s-1}^{r-1} &\to V_{s-1}^{r-1} \\ (x, y^*, t) &\mapsto y^*(x) \cdot t \end{aligned}$$

ist offenbar trilinear (nachrechnen!), bestimmt also eindeutig einen Homomrphismus

$$\psi : V_s^r = V \otimes V^* \otimes V_{s-1}^{r-1} \to V_{s-1}^{r-1}$$

mit

$$\psi(x \otimes y^* \otimes t) = f(x, y^*, t) = y^*(x) \cdot t,$$

und der ist der gesuchte. □

Man beachte wieder, daß die Elemente der Form $x \otimes y^* \otimes t$ nicht schon ganz $V \otimes V^* \otimes V_{s-1}^{r-1}$ bilden, sondern erst deren Linearkombinationen!

Betrachten wir diese Verjüngung noch für den Fall $r = s = 1$, d.h. $V_{s-1}^{r-1} = K$.

Dazu wählen wir eine Basis $B = (b_1, \ldots, b_n)$ in V und dazu die duale Basis $B^* = (b_1^*, \ldots, b_n^*)$ in V^*. Es ist dann also

$$b_j^*(b_i) = \delta_{ij}.$$

Es bildet $(b_i \otimes b_j^* \mid i, j = 1, \ldots, n)$ eine Basis von $V \otimes V^* = V_1^1$ und jedes Element s von V_1^1 hat damit die eindeutigen Darstellung

$$s = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(b_i \otimes b_j^*).$$

Mit dem Verjüngungshomomorphismus ψ ist dann

$$\begin{aligned}\psi(s) &= \psi(\sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}(b_i \otimes b_j^*)) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\psi((b_i \otimes b_j^*)) \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij} b_j^*(b_i) = \sum_{i,j=1}^{n} \alpha_{ij}\delta_{ij} = \sum_{i=1}^{n} \alpha_{ii}.\end{aligned}$$

Es ist also $\psi(s) = \mathrm{spur}(A(s))$, wobei $A(s)$ die Matrix der Koeffizienten in der Darstellung von s über duale Basen ist.

Da die Verjüngung selbst ja ohne Basen definiert und eindeutig bestimmt ist, folgt so etwa die Unabhängigkeit der Spur der Darstellungsmatrix $A(s)$ von der gewählten Basis.

4

Kommen wir nun zur angekündigten äußeren Algebra:

Schon bei Determinanten hatten wir n-lineare, alternierende Abbildungen betrachtet. Dies greifen wir nun wieder in einem allgemeineren Rahmen auf.

Definition A.25 *Es seien V, W Vektorräume. Wir nennen eine n-lineare Abbildung $f : V\times\ldots\times V \to W$ "alternierend", wenn $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, sofern $(x_1, \ldots, x_n)$ linear abhängig sind.*

Wie bei den Determinantenfunktionen beweist man

Satz A.26 *Es sei $f : V \times \ldots \times V \to W$ n-linear.*

(i) Ist immer $f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, sofern zwei Argumente gleich sind, so ist f alternierend.

(ii) Ist f alternierend, so ändert f den Wert nicht, wenn man zu einem Argument eine Linearkombination der anderen addiert.

(iii) Ist f alternierend, so ändert der Wert von f beim Vertauschen von zwei Argumenten das Vorzeichen.

Die n-linearen Abbildungen hatten zur Tensor-Algebra geführt, die – bis auf die Betrachtungsweise – die freie Algebra war. Die zusätzliche Forderung des Alternierens führt uns auf die Äußere Algebra, die ein Quotient der freien, also der Tensor-Algebra ist.

Beim Übergang von der freien Algebra zur kommutativen Algebra hatten wir benutzt, daß dort $xy - yx = 0$ ist, und daher das von allen Elementen der Form $xy - yx$ in $A(B)$ erzeugte Ideal herausfaktorisiert. Mit der ursprünglich eingeführten Schreibweise hätten wir für diese Elemente $x \otimes y - y \otimes x$ schreiben müssen.

Den Zugang zu den alternierenden Abbildungen bekommen wir analog durch Herausfaktorisieren aller Elemente der Form $x \otimes x$.

Definition A.27 (Äußere Algebra) *Es sei V ein endlichdimensionaler Vektorraum, $T(V)$ die Tensor-Algebra über V und $U = U(S)$ das von $S := \{x\otimes x \mid x \in V\}$ in $T(V)$ erzeugte Ideal. Dann heißt*

$$E(V) := T(V)/U$$

die "äußere Algebra" über V.

Der kananonische Epimorphismus $T(V) \to E(V)$ sei wieder mit π bezeichnet, sein Kern ist U.

Die Multiplikation in $E(V)$ bezeichnet man mit dem Symbol $\wedge$, es ist damit also $\pi(x \otimes y) = \pi(x) \wedge \pi(y)$.

Die π-Bilder der homogenen Räume $T_n(V)$ werden mit $E_n(V)$ bezeichnet.

Da Satz A.13 wieder anwendbar ist, sind $V, T_1(V), E_1(V)$ wieder isomorph sodaß wir im weiteren

$$V = T_1(V) = E_1(V)$$

setzen. Damit ist dann für $x \in V$ auch $x = \pi(x)$ und entsprechend

$$\pi(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = x_1 \wedge \ldots \wedge x_n.$$

Damit ist also auch

$$E_n(V) = \operatorname{span}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \mid x_i \in V).$$

Diese Räume $E_n(V) = \pi(T_n(V))$ können wir nun auch anders gewinnen und erhalten damit die Verbindung zu den n-linearen Abbildungen.

Die Abbildung $\pi_n := \pi_{|T_n(V)} : T_n(V) \to E_n(V)$ ist insbesondere ein Vektorraum-Homomorphismus, der nach Konstruktion surjektiv ist. Sein Kern ist offenbar

$$\ker \pi_n = \ker \pi \cap T_n(V) = U \cap T_n(V) =: U_n$$

und dies ist ein Unterraum von $T_n(V)$. Wir bilden damit den Quotienten

$$Q_n := T_n(V)/U_n, \text{ zu dem der kanonische Epimorphismus } \pi'_n \text{ gehöre.}$$

Nach Konstruktion ist dann $\ker \pi'_n = U_n = \ker \pi_n$ und über Definition und Satz Q.5 folgt, daß Q_n und E_n isomorph sind. Wir haben also

Lemma A.28 *Es ist $E_n(V) = T_n(V)/(U \cap T_n(V))$.*

Damit bekommen wir nun

Satz A.29 *Es seien V, W Vektorräume, $f : V \times \ldots \times V \to W$ sei n-linear und alternierend. Dann gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi : E_n(V) \to W$, sodaß stets*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = \varphi(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n)$$

ist.

Die Räume $E_n(V)$ sind hierdurch bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.

Beweis:

Da f n-linear ist, gibt es genau einen Homomorphismus $\psi : T_n(V) \to W$ mit $f(x_1, \ldots, x_n) = \psi(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n)$. Nun liegt $U \cap T_n(V)$ in $\ker \psi$; denn $U \cap T_n(V)$ besteht aus Linearkombinationen von Elementen der Form $x_1 \otimes \ldots \otimes x_n$, in denen zwei benachbarte Faktoren gleich sind. Für solche ist aber $\psi(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = f(x_1, \ldots, x_n) = 0$, da ja f alternierend ist. Wir haben damit, daß $\ker \pi_{|T_n(V)} \subset \ker \psi$ und wegen Lemma A.28 existiert genau ein Homomorphismus $\varphi : E_n(V) \to W$ mit $\psi = \varphi \circ \pi$, sodaß also $\varphi(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = \psi(x_1 \otimes \ldots \otimes x_n) = f(x_1, \ldots, x_n)$.

$$\begin{tikzcd}
V \times \ldots \times V \arrow[d, "\otimes"'] \arrow[dr, "f"] & \\
T_n(V) \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\
E_n(V) \arrow[ur, dashed, "\varphi"'] &
\end{tikzcd}$$

Der Nachweis, daß die $E_n(V)$ dadurch auch eindeutig charakterisiert werden, sei übergangen. $\square$

Die Struktur dieser äußeren Algebra $E(V)$ bzw. der Räume $E_n(V)$ sei noch genauer untersucht.

Dazu betrachten wir eine Basis $B = (b_1, \ldots, b_m)$ von V, die insbesondere den kanonischen Isomorphismus $\lambda : V \to K^m$

$$V \ni x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i b_i \mapsto \lambda(x) := \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$$

bestimmt.

Nun fixieren wir $n \leq m$ und wählen Indizes $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leq m$ und dazu den Projektor

$$P_{i_1 \ldots i_n} : K^m \to K^n : \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_m \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{i_1} \\ \vdots \\ \alpha_{i_n} \end{pmatrix}.$$

Bildet man für n solcher Vektoren $x_j \in V$ nun

$$(P_{i_1 \ldots i_n}(\lambda(x_1)), \ldots, P_{i_1 \ldots i_n}(\lambda(x_n)))\,,$$

so ist dies eine $n \times n$-Matrix, deren Determinante wir mit

$$\Delta_{i_1 \ldots i_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

bezeichnen. Dafür gilt offenbar

Satz A.30 *Für einen K-Vektorraum V mit Basis $B = (b_1, \ldots, b_m)$ und Indizes $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_n \leq m$ ist die eben definierte Abbildung*

$$\Delta_{i_1 \ldots i_n} : V \times \ldots \times V \to K : \ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \Delta_{i_1 \ldots i_n}(x_1, \ldots, x_n)$$

n-linear und alternierend.

Für die Basiselemente gelten $\Delta_{i_1 \ldots i_n}(b_{j_1}, \ldots, b_{j_n}) = \begin{cases} 1 & (i_1 \ldots i_n) = (j_1 \ldots j_n) \\ 0 & (i_1 \ldots i_n) \neq (j_1 \ldots j_n) \end{cases}$

Nach Satz A.29 besitzt jede dieser n-linearen Abbildungen $\Delta_{i_1 \ldots i_n}$ eine Darstellung als

$$\Delta_{i_1 \ldots i_n}(x_1, \ldots, x_n) = \varphi_{i_1 \ldots i_n}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n),$$

wobei $\varphi_{i_1 \ldots i_n} : E_n(V) \to K$, also ein lineares Funktional auf $E_n(V)$ ist. Mit diesen Funktionalen erhalten wir nun die folgenden Aussagen über die Räume $E_n(V)$.

Satz A.31 *Es sei V ein m-dimensionaler K-Vektorraum, $B = (b_1, \ldots, b_m)$ eine Basis von V. Dann gelten*

(i) Die Abbildung

$$V \times \ldots \times V \to E_n(V) : \ (x_1, \ldots, x_n) \mapsto x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$$

ist n-linear und alternierend.

(ii) $E_n(V) = (0)$ für $n > m$.

(iii) $\dim E_n(V) = \binom{m}{n}$ und $(b_{i_1} \wedge \ldots \wedge b_{i_n} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m)$ ist Basis von $E_n(V)$.

(iv) Mit den oben konstruierten Funktionalen $\varphi_{i_1\ldots i_n}$ auf $E_n(V)$ ist

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m} \varphi_{i_1\ldots i_n}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) \cdot (b_{i_1} \wedge \ldots \wedge b_{i_n}).$$

(v) Die Räume $E_n(V)$ und $E_{m-n}(V)$ sind isomorph.
Insbesondere ist $E_m(V) = K, E_{m-1}(V) = V$.

(vi) Es sind $(x_1, \ldots, x_n)$ linear abhängig genau, wenn $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = 0 \in E_n(V)$.

Beweis: Zu (i): Dies folgt direkt aus der Konstruktion.

Zu (ii): Es ist $E_n(V) = \operatorname{span}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \mid x_i \in V)$. Ist nun $n > m$, so sind notwendig $(x_1, \ldots, x_n)$ linear abhängig und wegen (i) ist dann nach Satz A.26 $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = 0$. Damit ist notwendig auch $E_n(V) = (0)$.

Zu (iii): Es ist $(b_{i_1} \otimes \ldots \otimes b_{i_n} \mid 1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq m)$ eine Basis von $T_n(V)$ und damit

$$(b_{i_1} \wedge \ldots \wedge b_{i_n} \mid 1 \leq i_1, \ldots, i_n \leq m)$$

erzeugend für $\pi(T_n(V) = E_n(V).)$ Vertauscht man in einem solchen Term zwei Indizes, so ändert sich nach Satz A.26 nur das Vorzeichen, sodaß schon

$$(b_{i_1} \wedge \ldots \wedge b_{i_n} \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m)$$

ganz $E_n(V)$ erzeugt. Von solchen Tupeln gibt es genau $\binom{m}{n}$ viele. Zu jedem solchen wachsend angeordneten Indextupel haben wir das Funktional $\varphi_{i_1\ldots i_n}$, für das ja

$$\varphi_{i_1\ldots i_n}(b_{j_1} \wedge \ldots \wedge b_{j_n}) = \begin{cases} 1 & (i_1 \ldots i_n) = (j_1 \ldots j_n) \\ 0 & (i_1 \ldots i_n) \neq (j_1 \ldots j_n) \end{cases}$$

ist. Damit bilden diese Funktionale auf $E_n(V)$ zusammen mit der Familie der $(b_{j_1} \wedge \ldots \wedge b_{j_n} \mid 1 \leq j_1 < \ldots < j_n \leq m)$ ein Biorthonormalsystem. Dann sind aber beide Systeme linear unabhängig und somit nach dem oben Gezeigten insbesondere $(b_{j_1} \wedge \ldots \wedge b_{j_n} \mid 1 \leq j_1 < \ldots < j_n \leq m)$ eine Basis von $E_n(V)$.

Zu (iv): Dies folgt nun unmittelbar aus der eben gezeigten Tatsache, daß die $\varphi_{i_1\ldots i_n}$ zusammen mit den $b_{j_1} \wedge \ldots \wedge b_{j_n}$ biorthonormale Basen sind.

Zu (v): Wegen $\binom{m}{n} = \binom{m}{m-n}$ haben $E_n(V)$ und $E_{m-n}(V)$ die selbe Dimension.

Zu (vi): Sind $(x_1, \ldots, x_n)$ linear abhängig, so ist nach (i) mit Satz A.26 auch $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = 0$.

Andrerseits kann man eine unabhängige Familie $(x_1, \ldots, x_n)$ stets zu einer Basis $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)$ von V ergänzen. Dann ist $x_1 \wedge \ldots \wedge x_m$ nach (iii) (das einzige) Element einer Basis von $E_m(V)$ und damit jedenfalls $\neq 0$. Da andrerseits $x_1 \wedge \ldots \wedge x_m = (x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) \wedge (x_{n+1} \wedge \ldots \wedge x_m)$ ist, muß dann auch $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \neq 0$ sein. □

Wenden wir dies nun auf den Raum $V := K^m$ mit den kanonischen Einheitsvektoren e_i als Basis an. Jedes $x \in V$ ist dann ein Spaltenvektor

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$$

und die Funktionale sind einfach

$$\varphi_{i_1,\ldots,i_n}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) = \Delta_{i_1,\ldots,i_n}(x_1, \ldots, x_n) = \det \begin{pmatrix} \xi_{i_1 1} & \xi_{i_1 2} & \cdots & \xi_{i_1 n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \xi_{i_n 1} & \xi_{i_n 2} & \cdots & \xi_{i_n n} \end{pmatrix}.$$

Man erhält sie also, indem man zunächst die $x_1, \ldots, x_n$ als Spalten einer $m \times n$-Matrix notiert, daraus alle Zeilen mit Nummern $i \notin \{i_1, \ldots, i_n\}$ herausstreicht und dann die Determinante der entstehenden quadratischen (Unter)-Matrix berechnet.

Insbesondere ist dann

$$\varphi_{1,\ldots,m}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m) = \Delta_{1,\ldots,m}(x_1, \ldots, x_m) = \det(x_1, \ldots, x_m),$$

die gewöhnliche Determinante.

Nun ist für jedes $n < m$ ja

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_m = (x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) \wedge (x_{n+1} \wedge \ldots \wedge x_m),$$

ferner haben wir als Darstellung gemäß Satz A.31.(iii) hier für $k \leq m$:

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_k = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_k \leq m} \varphi_{i_1,\ldots,i_k}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_k)(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_k}).$$

Also gilt

$$\begin{aligned}
&\det(x_1, \ldots, x_m) \cdot (e_1 \wedge \ldots \wedge e_m) \\
&\quad = \varphi_{1,\ldots,m}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_m) \cdot (e_1 \wedge \ldots \wedge e_m) \\
&\quad = x_1 \wedge \ldots \wedge x_m \\
&\quad = (x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) \wedge (x_{n+1} \wedge \ldots \wedge x_m) \\
&\quad = \left(\sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m} \varphi_{i_1,\ldots,i_n}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n)(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}) \right) \\
&\quad \wedge \left(\sum_{1 \leq i_{n+1} < \ldots < i_m \leq m} \varphi_{i_{n+1},\ldots,i_m}(x_{n+1} \wedge \ldots \wedge x_m)(e_{i_{n+1}} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}) \right) \\
&\quad = \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_n \\ i_{n+1} < \ldots < i_m}} \varphi_{i_1,\ldots,i_n}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) \cdot \varphi_{i_{n+1},\ldots,i_m}(x_{n+1} \wedge \ldots \wedge x_m) \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot (e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} \wedge e_{i_{n+1}} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}).
\end{aligned}$$

Sind unter den Indizes $i_1, \ldots, i_m$ zwei gleiche, so verschwindet das zugehörige Produkt der e_{i_k}. Sind dagegen alle m Indizes verschieden, so stellen sie also eine Permutation der Zahlen $1, \ldots, m$ dar und demnach ist

$$(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} \wedge e_{i_{n+1}} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}) \;=\; \pm(e_1 \wedge \ldots \wedge e_m),$$

wobei sich das richtige Vorzeichen ϵ aus der Anzahl der zur Herstellung der natürlichen Ordnung notwendigen Vertauschungen von zwei Elementen, d.h. dem Vorzeichen der dargestellten Permutation zu

$$\epsilon = (-1)^{i_1 + \ldots + i_n + \frac{n(n+1)}{2}}$$

bestimmt, wie wir unten zeigen werden.

Damit ist dann

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_n \\ i_{n+1} < \ldots < i_m}} \varphi_{i_1,\ldots,i_n}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) \cdot \varphi_{i_{n+1},\ldots,i_m}(x_{n+1} \wedge \ldots \wedge x_m) \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot (e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n} \wedge e_{i_{n+1}} \wedge \ldots \wedge e_{i_m}) \\
&= \sum_{\substack{i_1 < \ldots < i_n \\ i_{n+1} < \ldots < i_m \\ \{i_1,\ldots,i_m\} = \{1,\ldots,m\}}} (-1)^{i_1 + \ldots + i_n + \frac{n(n+1)}{2}} \cdot \varphi_{i_1,\ldots,i_n}(x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) \cdot \\
&\qquad\qquad \cdot \varphi_{i_{n+1},\ldots,i_m}(x_{n+1} \wedge \ldots \wedge x_m) \cdot (e_1 \wedge \ldots \wedge e_m).
\end{aligned}$$

Gehen wir nun zum Anfang dieser Gleichungskette zurück und ersetzen die Funktionale durch die entsprechenden Unterdeterminanten, so haben wir folgenden Entwicklungssatz für Determinanten, der die LAPLACE-Entwicklung verallgemeinert

Satz A.32 *Für jede $m \times m$-Matrix mit Spalten $x_1, \ldots, x_m$ ist für jedes feste $n < m$*

$$\begin{aligned}\det(x_1, \ldots, x_m) &= \\ &= \sum_{\substack{i_1,\ldots,i_n \\ i_{n+1},\ldots,i_m}} (-1)^{i_1+\ldots+i_n+\frac{n(n+1)}{2}} \cdot \Delta_{i_1,\ldots,i_n}(x_1, \ldots, x_n) \cdot \Delta_{i_{n+1},\ldots,i_m}(x_{n+1}, \ldots, x_m),\end{aligned}$$

wobei über alle wachsend angeordneten Tupel $(i_1, \ldots, i_n)$ und $(i_{n+1}, \ldots, i_m)$ zu summieren ist, die zusammen genau $\{1, \ldots, m\}$ ergeben.

Für $n = 1$ ist dies die übliche LAPLACE*-Entwicklung.*

Überlegen Sie selbst, wie die Formel zu modifizieren ist, wenn man die Spalten auf andere Weise in Pakete zu n bzw. $m - n$ Spalten einteilen will.

Wir haben noch die Vorzeichenformel abzuleiten, d.h. zu bestimmen, mit wieviel Vertauschungen von jeweils zwei Elementen sich die Liste

$$(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}, e_{i_{n+1}}, \ldots, e_{i_m})$$

in die natürlich angeordnete Liste

$$(e_1, \ldots, e_n, e_{n+1}, \ldots, e_m)$$

transformieren läßt. Dazu genügt es, dieselbe Frage für die Indexlisten

$$(i_1, \ldots, i_n, i_{n+1}, \ldots, i_m)$$

und

$$(1, \ldots, n, n+1, \ldots, m)$$

zu behandeln. Hierfür betrachten wir folgende Situation: Gegeben seien $r \leq s \leq m$ und eine Anordnung der Zahlen $\{1, \ldots, m\}$ als Liste

$$(a_1, \ldots, a_{r-1}, a_r, b_{r+1}, \ldots, b_s, c_{s+1} \ldots, c_m).$$

Vertauscht man dann a_r sukzessive $s - r$ mal mit seinem jeweiligen rechten Nachbarn, so ergibt sich die Anordnung

$$(a_1, \ldots, a_{r-1}, b_{r+1}, \ldots, b_s, a_r, c_{s+1} \ldots, c_m).$$

Hierbei hat sich links auf den Positionen 1 bis $r - 1$ und rechts auf den Positionen $s + 1$ bis m nichts geändert, die $b_{r+1}, \ldots, b_s$ sind als Block um eine Position nach links gewandert.

Nutzen wir dies für unsere Indexlisten. Es ist $i_1 < \ldots < i_n$, somit notwendig $i_n \geq n$, sodaß wir $r := n, s := i_n$ wählen können. Ferner ist $i_{n+1} < \ldots < i_m$. Der Index i_n ist der größte der ersten Gruppe, alle größeren liegen also in der zweiten Gruppe. Solche gibt es aber genau $m - i_n$ viele. Also sind alle i_k mit Nummern $k > i_n$ selbst größer als i_n, und weil dann mit diesen und i_n selbst alle Werte von $\{i_n, i_n + 1, \ldots, m\}$ belegt sind, sind also alle übrigen Indizes $i_j < i_n$.

Wenn wir also den Index i_n von Position n auf Position $s = i_n$ schaffen, entsteht eine Anordnung, für die die Gruppen mit den Nummern 1 bis $n - 1$ und mit den Nummern n bis m je monoton wachsend geordnet sind. Wir haben also die Ausgangssituation wieder, allerdings für $n - 1$ statt für n.

Damit brauchen wir also insgesamt

$$\sum_{k=1}^{n}(i_k - k) = \sum_{k=1}^{n} i_k \ - \frac{n(n+1)}{2}$$

viele Transpositionen. Damit ergibt sich als Vorzeichen

$$\epsilon = (-1)^{i_1+\ldots+i_n-\frac{n(n+1)}{2}} = (-1)^{i_1+\ldots+i_n+\frac{n(n+1)}{2}}.$$

Eine weitere Anwendung von Satz A.31 ist

Satz A.33 *Der Rang einer $m \times k$-Matrix ist gleich der Reihenzahl der größten nichtverschwindenden Unterdeterminante.*

Beweis: Es seien $x_1, \ldots, x_n$ irgendwelche Spalten der Matrix. Dann ist

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_n \le m} \Delta_{i_1,\ldots,i_n}(x_1, \ldots, x_n)(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}).$$

Sind $(x_1, \ldots, x_n)$ unabhängig, so ist $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \neq 0$ und damit wenigstens eine der n-reihigen Determinanten $\Delta_{i_1,\ldots,i_n}(x_1, \ldots, x_n) \neq 0$.

Sind $(x_1, \ldots, x_n)$ linear abhängig, so ist $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = 0$. Da es sich um eine Basis-Darstellung handelt, müssen dann alle Koeffizienten verschwinden, d.h. alle

$$\Delta_{i_1,\ldots,i_n}(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

sein. □

Es sei noch eine weitere Anwendung erwähnt, die für die (projektive) Geometrie wichtig ist.

Satz A.34 *Es sei V ein Vektorraum, $U \subset V$ ein Unterraum und $x_1, \ldots, x_n$ sowie $y_1, \ldots, y_n$ seien Basen von U. Dann gibt es eine Konstante $\gamma \in K, \neq 0$ sodaß*

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \gamma \cdot (y_1 \wedge \ldots \wedge y_n).$$

Beweis: (i): Enthalten die beiden Basen die selben Elemente nur in verschiedenenr Reihenfolge, so stimmen die beiden Produkte bis auf das Vorzeichen überein.

(ii): Jedes x_i läßt sich als Linearkombination der y_j schreiben. Setzen wir diese ein und rechnen distributiv aus, so erhalten wir eine Darstellung vom Typ

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \sum_{i_1,\ldots,i_n=1}^{n} \alpha_{i_1,\ldots,i_n} \cdot (y_{i_1} \wedge \ldots \wedge y_{i_n})$$

mit gewissen Koeffizienten $\alpha_{i_1,\ldots,i_n} \in K$.

Für die auftretenden y-Produkte gilt:

- entweder sind zwei Indizes gleich, dann ist das Produkt $= 0$;
- oder alle sind verschieden. Dann handelt es sich nach (i) bis auf das Vorzeichen um das Produkt $y_1 \wedge \ldots \wedge y_n$.

Also folgt

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \gamma \cdot (y_1 \wedge \ldots \wedge y_n)$$

und da beide Prodkte $\neq 0$ sind, muß auch $\gamma \neq 0$ sein. □

Gehen wir nun hierbei aus von $V = K^m$ mit der kanonischen Basis $e_1, \ldots, e_m$ so haben wir ja

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \sum_{1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m} \Delta_{i_1,\ldots,i_n}(x_1, \ldots, x_n)(e_{i_1} \wedge \ldots \wedge e_{i_n}). \qquad (*)$$

Der eben bewiesene Satz besagt: Sind $x_1, \ldots, x_n$ und $y_1, \ldots, y_n$ Basen desselben Unterraumes, so gibt es eine Konstante $\gamma \neq 0$, sodaß

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_n = \gamma \cdot (y_1 \wedge \ldots \wedge y_n).$$

Das heißt aber hier, daß für alle Indextupel $1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m$ gilt

$$\Delta_{i_1,\ldots,i_n}(x_1, \ldots, x_n) = \gamma \cdot \Delta_{i_1,\ldots,i_n}(y_1, \ldots, y_n).$$

Definition und Satz A.35 (PLÜCKER-Koordinaten) *Das $\binom{m}{n}$-Tupel*

$$(\Delta_{i_1,\ldots,i_n}(x_1, \ldots, x_n) \mid 1 \leq i_1 < \ldots < i_n \leq m)$$

zu einer Basis $x_1, \ldots, x_n$ eines Unterraums $U \subset K^m$ nennt man die homogenen oder PLÜCKER*-Koordinaten von U. Sie sind durch U bis auf einen Zahlenfaktor $\gamma \neq 0$ eindeutig bestimmt.* PLÜCKER*-Koordinaten zu verschiedenen Unterräumen sind linear unabhängig.*

Dazu zwei Beispiele:

$U = \text{span}(x_1)$: Die PLÜCKER-Koordinaten sind $(\Delta_i(x_1) \mid 1 \leq i \leq m)$, also bestehend aus allen 1-reihigen Unterdeterminanten der einen Spalte x_1. Dies liefert x_1 selbst.

$U = \text{span}(x_1, x_2)$: Wir haben die zweireihigen Unterdeterminanten der Matrix (x_1, x_2) zu betrachten. Tun wir dies explizit für $m := 3$: Dann haben wir

$$(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \\ \xi_{31} & \xi_{32} \end{pmatrix}$$

und

$$\Delta_{12}(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix}, \quad \Delta_{13}(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{31} & \xi_{32} \end{pmatrix},$$

$$\Delta_{23}(x_1, x_2) = \det \begin{pmatrix} \xi_{21} & \xi_{22} \\ \xi_{31} & \xi_{32} \end{pmatrix}.$$

Bis auf das Vorzeichen der mittleren Determinante sind dies genau die drei Komponenten des Vektorproduktes der beiden Vektoren x_1 und x_2.

Diese PLÜCKER-Koordinaten sind natürlich nichts anderes als Basisdarstellungen der Elemente von $x_1 \wedge \ldots \wedge x_n$ in $E_n(V)$. Über $(*)$ kann man dann auch die Multiplikation $\wedge$ in $E(V)$ über ein "Produkt" der PLÜCKER-Koordinaten darstellen. Dies kann man insbesondere im Zusammenhang mit folgendem Satz nutzen:

Satz A.36 *Zwei Unterräume X und Y von V haben genau dann einen nichttrivialen Unterraum gemeinsam, d.h. $X \cap Y \neq (0)$, wenn das äußere Produkt ihrer* PLÜCKER*-Koordinaten oder äquivalent von Basen von X und Y verschwindet.*

Beweis: Nach der Dimensionsformel gilt $\dim X + \dim Y = \dim(X \cap Y) + \dim(X + Y)$, wonach $\dim(X \cap Y) > 0$ genau wenn $\dim(X + Y) < \dim X + \dim Y$. Sind nun $x_1, \dots, x_n$ und $y_1, \dots, y_k$ jeweils Basen von X bzw. Y, so ist $\dim(X + Y) < \dim X + \dim Y = n + k$ genau, wenn $x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_k$ linear abhängig und genau dann ist

$$x_1 \wedge \ldots \wedge x_n \wedge y_1 \wedge \ldots \wedge y_k = (x_1 \wedge \ldots \wedge x_n) \wedge (y_1 \wedge \ldots \wedge y_k) = 0.$$

□

5

BA Beispiele zu Algebren

1

BA1: Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ bilden mit den üblichen Operationen eine $\mathbb{R}$-Algebra. Das Konjugieren ist ein Algebra-Homomorphismus $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

BA2: Die Polynomalgebra $\mathbb{R}[t]$ ist eine $\mathbb{R}$-Algebra. Ist A' eine weitere $\mathbb{R}$-Algebra, etwa $A' = \mathbb{C}$, oder $A' = \mathbb{R}^{n\times n}$ und $a \in A'$ ein beliebig gewähltes Element, so ist

$$\varphi : \mathbb{R}[t] \to A' : p(t) = \sum_{i=0}^{n} \alpha_i t^i \mapsto \varphi(a) := p(a) := \sum_{i=0}^{n} \alpha_i a^i$$

ein $\mathbb{R}$-Algebra-Homomorphismus, der "Einsetz-Homomorphismus".

Studieren sie dies für verschiedenen Algebren A' im Detail. (Siehe auch BA9).

Weiter bis

2

2

BA3: Die freie K-Algebra über der leeren Menge $\emptyset$ ist der Körper K selbst. Zeigen Sie dies einmal über unsere Konstruktion der freien Algebra – die leere Folge ϵ wird hier wichtig – und studieren Sie dann diese Aussage an der universellen Eigenschaft.

BA4: Nach BA3 ist somit $\mathbb{R}$ eine freie $\mathbb{R}$-Algebra, $\mathbb{C}$ eine freie $\mathbb{C}$-Algebra, ferner nach BA1 $\mathbb{C}$ eine $\mathbb{R}$-Algebra. $\mathbb{C}$ ist aber als $\mathbb{R}$-Algebra *nicht* frei, da es keinen $\mathbb{R}$-Algebra-Homomorphismus $\varphi : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ gibt. Um letzteres zu sehen, nehmen Sie an, es wäre φ einer und dann bestimmen Sie mal den Wert von $\varphi(i)^2$, wobei i die imaginäre Einheit ist.

BA5: Es sei $f \in K[t]$ ein fest gewähltes Polynom. Dann besteht das von f erzeugte Ideal (f) aus allen durch f teilbaren Polynomen. Wählen Sie nun speziell $f(t) := t^{m+1}$, konstruieren Sie sich dieses Ideal (t^{m+1}) und vergleichen Sie mit BQ3.

Wie sieht die Algebra $K[t]/(t^{m+1})$ aus? als Vektorraum? wie multipliziert man darin? Überlegen Sie das Gleiche für ein beliebiges Polynom f.

BA6: Ein Element a einer Algebra heißt "Einheit", wenn es ein $b \in A$ gibt, sodaß $ab = 1$. Zeigen Sie: Ist $U \subset A$ ein Ideal und enthält U eine Einheit, so ist $U = A$. Wie sehen die Einheiten in der Polynom-Algebra $K[t]$ aus, wie allgemein in einer freien Algebra $A(B)$? (Lösung: Genau die Körperelemente ohne die 0.)

BA7: Führen Sie die Konstuktion von BA5 durch für die freie Algebra $\mathbb{R}[t]$ und das Polynom $f(t) := t^2 + 1$. Es bezeichne π den kanonischen Epimorphismus $\mathbb{R}[t] \to C := \mathbb{R}[t]/(t^2 + 1)$. Bezeichnen Sie $\pi(1) = 1$, $\pi(t) = i$. Zeigen Sie

- Es ist $i^2 = -1$;
- jedes $u \in C$ hat eine eindeutige Darstellung als $u = \alpha_0 1 + \alpha_1 i$.
- Setzen wir $\overline{u} := \alpha_0 1 - \alpha_1 i$, so ist $u\overline{u} = \overline{u}u = (\alpha_0^2 + \alpha_1^2)1$, sodaß jedes $u \neq 0$ eine Einheit ist.

– Die Algebra C ist kommutativ.

Diese Algebra ist also ein Körper (Axiome prüfen!) – Sollten Sie den etwa schon kennen?

BA8: Reelle Quaternionen: Bilden Sie die freie Algebra $A(X, Y, Z)$ zu drei Elementen X, Y, Z und darin das Ideal $U := (X^2 + \epsilon, Y^2 + \epsilon, Z^2 + \epsilon, XYZ + \epsilon)$, wobei ϵ das Einselement der Algebra bezeichne. Man nennt $H := A(X, Y, Z)/U$ die Algebra der "Quaternionen" über $\mathbb{R}$. Es sei wieder $\pi : A(X, Y, Z) \to H$ der kanonische Epimorphismus. Wir bezeichnen speziell

$$\pi(\epsilon) = 1, \pi(X) = x, \pi(Y) = y, \pi(Z) = z.$$

– Zeigen Sie dafür die Multiplikationstabelle

$\cdot$	1	x	y	z
1	1	x	y	z
x	x	-1	z	$-y$
y	y	$-z$	-1	$-x$
z	z	y	$-x$	-1

und schließen Sie daraus

– jedes $u \in H$ hat eine eindeutige Darstellung als

$$u = \alpha_0 1 + \alpha_1 x + \alpha_2 y + \alpha_3 z \quad (\alpha_i \in \mathbb{R}).$$

– Setzen wir

$$\overline{u} = \alpha_0 1 - \alpha_1 x - \alpha_2 y - \alpha_3 z,$$

so ist $u\overline{u} = \overline{u}u = (\alpha_0^2 + \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2)1$, d.h. jedes $u \neq 0$ ist Einheit. Damit ist H eine *nichtkommutative* vierdimensionale reelle Divisionsalgebra.

Diese sog. Hamiltonschen Quaternionen treten etwa bei der Beschreibung der Bewegungen starrer Körper auf.
Weiter bis

3

3

Kommutative Algebren zeichnen sich durch die zusätzliche Eigenschaft aus, daß bei der Multiplikation die Reihenfolge der Faktoren unerheblich ist. Dies vererbt sich unter Homomorphismen.

BA9: Ist A eine kommutative Algebra, B eine beliebige Algebra und $\varphi : A \to B$ ein Algebra-Homomorphismus, so ist das Bild $\varphi(A) \subset B$ eine ***kommutative*** Unteralgebra von B. Denn für $b_1, b_2 \in \varphi(A)$ gibt es ja $a_1, a_2 \in A$, sodaß $b_i = \varphi(a_i)$ und dann ist

$$b_1 b_2 = \varphi(a_1)\varphi(a_2) = \varphi(a_1 a_2) = \varphi(a_2 a_1) = \varphi(a_2)\varphi(a_1) = b_2 b_1.$$

Somit sind insbesondere alle Quotienten von kommutativen Algebren stets selbst kommutativ. Beispiele haben wir schon oben gesehen. Ein weiteres ist

BA10: Es sei $A := K[t], A' = K^{n \times n}, b \in A'$ fest gewählt und $\varphi : A \to A' : p(t) \mapsto p(b)$ der Einsetzhomomorphismus. $\varphi(A)$ besteht dann aus allen Linearkombinationen von Potenzen der Matrix b und dies ist eine kommutative Unteralgebra aller Matrizen.

BA11: Benutzen Sie BA10, um sich klar zu machen, daß eine Unteralgebra einer Algebra A im allgemeinen *kein Ideal* ist. Denn eine Unteralgebra ist ein Unterraum, der auch alle Produkte aus zwei seiner Elemente enthält. Beim Ideal braucht dagegen nur einer der Faktoren aus dem Ideal zu sein.

Weiter bis

4〉

〉4

BA12: Zunächst einige Beispiele für n-lineare Abbildungen.

1. Ist A eine Algebra, so ist die Multiplikation in $A, (a,b) \mapsto a \cdot b$ eine bilineare Abbildung. Analoges gilt für Produkte von $3, 4, \ldots$ Faktoren.

2. Es seien K ein Körper und dazu $\mathbb{P}_m[t]$ die Polynome vom Grad $\leq m$ über K. Dann ist die gewöhnliche Polynommultiplikation eine bilineare Abbildung $\mathbb{P}_m[t] \times \mathbb{P}_m[t] \to \mathbb{P}_{2m}[t]$. Betrachten wir hierbei, wie sich – falls $2m \geq 17$ – der 17-te Koeffizient des Produktpolynoms aus den Koeffizienten der beiden Faktoren ergibt, so finden wir eine bilineare Abbildung $K^{m+1} \times K^{m+1} \to K$. Es ist etwa

$$(a_0 + a_1 t)(b_0 + b_1 t) = a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)t + a_1 b_1 t^2$$

   und beispielsweise der mittlere Koeffizient $a_0 b_1 + a_1 b_0$ ist bilinear in (a_0, a_1) und (b_0, b_1).

3. Bei der gewöhnlichen Matrixmultiplikation $AB = C$ ist jedes Element der Produktmatrix C bilinear in den Elementen von A und von B.

BA13: Für jede $n \times n$- Matrix $A = (\alpha_{ij})$ ist $x^T A y = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \eta_j$ eine bilineare Abbildung $K^n \times K^n \to K$, läßt sich also als lineare Abbildung $K^n \otimes K^n \to K$ beschreiben. Dafür kann man etwa so vorgehen:

Sei $T := K^{n \times n}$, die Menge der $n \times n$ - Matrizen, $\otimes : K^n \times K^n \to T$ definiert durch $(x, y) \mapsto x \otimes y := x \cdot y^T$, d.h. also Spalte $\times$ Zeile $=$ $(n, 1)$-Matrix $\times$ $(1, n)$-Matrix. Nun zeigen Sie mal, daß diese Abbildung $\otimes$ bilinear ist, und daß $T, \otimes$ ein Tensorprodukt ist. Dann ist $x \otimes y = x \cdot y^T$ die Matrix mit den Einträgen $(\xi_i \eta_j)$, und somit ist $x^T A y = \sum_{i,j=1}^n \alpha_{ij} \xi_i \eta_j$ ein lineares Funktional auf T betrachtet im Punkt $x \otimes y$.

Gleichzeitig sieht man hieran wieder, daß T, d.h. $K^n \otimes K^n$ weit mehr Elemente als die von der Gestalt $x \otimes y$ besitzt.

Zeigen Sie in diesem Kontext etwa

1. Der Rang der Matrix $x \otimes y$ ist ≤ 1 und $= 1$ genau, wenn $x \neq 0$ und $y \neq 0$.

2. Der Rang von $\sum_{i=1}^r x_i \otimes y_i$ ist $\leq r$.

3. Hat eine Matrix C den Rang r, so gibt es eine Darstellung als $C = \sum_{i=1}^r x_i \otimes y_i$.

Versuchen Sie nach obigem Muster Darstellungen für die in BA12 genannten bilinearen Abbildungen über die zugehörigen Tensorräume zu finden.

Weiter bis

5〉

〉5

BA14: Wir haben eine Verallgemenierung des LAPLACEschen Entwicklungssatzes hergeleitet. Am Beispiel einer 4×4 - Matrix lautet dies etwa

$$\begin{aligned}\det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 & \delta_1\\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 & \delta_2\\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 & \delta_3\\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 & \delta_4\end{pmatrix} &= \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_2 & \beta_2\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\gamma_3 & \delta_3\\ \gamma_4 & \delta_4\end{pmatrix} - \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_3 & \beta_3\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\gamma_2 & \delta_2\\ \gamma_4 & \delta_4\end{pmatrix}\\ &+ \det\begin{pmatrix}\alpha_1 & \beta_1\\ \alpha_4 & \beta_4\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\gamma_2 & \delta_2\\ \gamma_3 & \delta_3\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_3 & \beta_3\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\gamma_1 & \delta_1\\ \gamma_4 & \delta_4\end{pmatrix}\\ &- \det\begin{pmatrix}\alpha_2 & \beta_2\\ \alpha_4 & \beta_4\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\gamma_1 & \delta_1\\ \gamma_3 & \delta_3\end{pmatrix} + \det\begin{pmatrix}\alpha_3 & \beta_3\\ \alpha_4 & \beta_4\end{pmatrix}\det\begin{pmatrix}\gamma_1 & \delta_1\\ \gamma_2 & \delta_2\end{pmatrix}\end{aligned}$$

Dies gilt natürlich allgemeiner; wir können für eine $m \times m$ - Matrix die Determinante darstellen als Summe von Produkten von aus den ersten n Spalten gebildeten Determinanten und den dazu komplementären aus den letzten $m-n$ Spalten, wobei noch das Vorzeichen richtig zu wählen ist.

Da eine Determinante höchstens das Vorzeichen ändert, wenn man Spalten vertauscht, kann man also analoge Formeln erhalten, wenn man sich irgendwelche n Spalten wählt und daraus bzw. aus den übrigen Spalten gebildete Determinanten betrachtet. Analog kann man alles mit Zeilen machen.

Führen Sie dies etwa an der oben notierten 4×4 - Matrix aus.

BA15: Zum Abschluß seien noch ein paar Hinweise auf die Bedeutung des äußeren Produktes für die Geometrie gegeben.

Wir nehmen den $\mathbb{R}^3$ mit den kanonischen Einheitsvektoren e_0, e_1, e_2 als Modell für den geometrischen Euklidischen Raum mit kartesischem Koordinatensystem. Jeder Punkt $x \neq 0$ erzeugt eine Gerade durch 0, je zwei unabhängige x, y eine Ebene durch 0, je drei unabhängige x, y, z den ganzen Raum. Nun betrachten wir die äußere Algebra $E(\mathbb{R}^3)$. Hierin ist $E_1(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}^3$ mit Basis e_0, e_1, e_2. Ferner ist $\dim E_2(\mathbb{R}^3) = \binom{3}{2} = 3$ und in diesem Raum sind etwa $\epsilon_0 := e_1 \wedge e_2$, $\epsilon_1 := e_2 \wedge e_0$ und $\epsilon_2 := e_0 \wedge e_1$ eine Basis. Nach Satz A.34 beschreiben die ϵ_i zweidimensionale Unterräume, also Ebenen durch den Nullpunkt und zwar sind dies gerade die Koordinatenebenen.

Dies gilt nun sinngemäß für alle Elemente von $E_2(\mathbb{R}^3)$:

Ist nämlich $Y := \eta_0\epsilon_0 + \eta_1\epsilon_1 + \eta_2\epsilon_2 \in E_2(\mathbb{R}^3)$ und etwa $\eta_0 \neq 0$, so gilt mit $x_1 := \eta_1 e_0 - \eta_0 e_1, x_2 := \eta_2 e_0 - \eta_0 e_2$ dann

$$\begin{aligned}x_1 \wedge x_2 &= (\eta_1 e_0 - \eta_0 e_1) \wedge (\eta_2 e_0 - \eta_0 e_2)\\ &= \eta_1\eta_2(e_0 \wedge e_0) - \eta_1\eta_0(e_0 \wedge e_2) - \eta_0\eta_2(e_1 \wedge e_0) + \eta_0\eta_0(e_1 \wedge e_2)\\ &= \eta_0(\eta_0(e_1 \wedge e_2) + \eta_1(e_2 \wedge e_0) + \eta_2(e_0 \wedge e_1) = \eta_0 Y.\end{aligned}$$

Somit beschreibt jedes Element ($\neq 0$) von $E_2(\mathbb{R}^3)$ eine Ebene durch den Nullpunkt. Um sie als Punktmenge zu charakterisieren rechnen wir zunächst nach, daß mit dem KRONECKER-Symbol

$$\epsilon_i \wedge e_j = \delta_{ij}(e_0 \wedge e_1 \wedge e_2)$$

gilt.

Nach Satz A.36 liegt der Punkt $x = \sum_{j=0}^{2} \xi_j e_j$ in der Ebene $Y = \sum_{i=0}^{2} \eta_i \epsilon_i$, genau wenn $Y \wedge x = 0$, d.h. wenn

$$\begin{aligned} Y \wedge x &= (\sum_{i=0}^{2} \eta_i \epsilon_i) \wedge (\sum_{j=0}^{2} \xi_j e_j) \\ &= \sum_{ij} \eta_j \xi_i (\epsilon_i \wedge e_j) \\ &= (\sum_{ij} \eta_j \xi_i \delta_{ij})(e_0 \wedge e_1 \wedge e_2) \\ &= (\sum_{i} \eta_i \xi_i)(e_0 \wedge e_1 \wedge e_2). \end{aligned}$$

Somit ist $Y \wedge x = 0$ genau wenn $\sum_i \eta_i \xi_i = 0$.

Wir haben also:

Ordnen wir der Ebene $Y := \sum \eta_i \epsilon_i$ den Punkt $y := \sum \eta_i e_i$ zu, so liegt x in Y genau, wenn die Vektoren x und y orthogonal sind, sodaß sich y als der Normalenvektor der Ebene η erweist. Finden Sie hier irgendwo das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$ wieder?

Versuchen Sie sich einmal damit auch in der geometrischen Anschauung klar zu machen, was die Addition in $E_2(\mathbb{R}^3)$, die also eine Addition von Ebenen ist, bedeutet. Die obigen Überlegungen zeigen auch, daß die Abbildung

$$\varphi : \mathbb{R}^3 \to E_2(\mathbb{R}^3) : x = \sum \xi_j e_j \mapsto \varphi(x) := \sum \xi_j \epsilon_j$$

jedem Vektor x die dazu orthogonale Nullpunktsebene $\varphi(x)$ zuordnet. Schalten wir noch eine Abbildung $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ mit einer symmmetrischen Matrix $A = (\alpha_{ij})$ davor, so erhalten wir $\psi(x) := \varphi(Ax)$ wobei wieder jedem Punktvektor eine Ebene durch den Nullpunkt zugeordnet wird. Sei nun

$$\mathcal{Q} := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid \psi(x) \wedge x = 0\},$$

also die Menge der Punkte, die auf der ihnen jeweils zugeordneten Ebene liegen. Nun ist $\psi(x) = \sum_i (\sum_j \alpha_{ij} \xi_j) \epsilon_i$ und damit

$$\begin{aligned} \psi(x) \wedge x &= (\sum_i (\sum_j \alpha_{ij} \xi_j) \epsilon_i) \wedge (\sum_k \xi_k e_k) = (\sum_{ij} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j)(e_0 \wedge e_1 \wedge e_2) \\ &= 0 \Leftrightarrow \sum_{ij} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j = 0. \end{aligned}$$

Wie hängt dies mit den am Ende von Kapitel U behandelten Kurven und Flächen zweiter Ordnung zusammen?