D Determinanten

Im Vorkapitel hatten wir Determinanten von drei Vektoren im $\mathbb{R}^3$ kennengelernt und geometrisch gedeutet. Wir werden diesen Begriff nun ausdehnen zur Determinante eines Endomorphismus in einem endlich-dimensionalen linearen Raum. Diese Determinante werden wir benutzen für mehr theoretische Überlegungen bei linearen Gleichungssystemen und der Bestimmung der inversen Matrix, später bei der Eigenwerttheorie von Endomorphismen und außerhalb der linearen Algebra bei der Intergralrechnung in mehreren Veränderlichen.

Zunächst ein paar Vorüberlegungen: Messen wir im $\mathbb{R}^2$ Abstände auf die übliche Weise, sodaß also der Abstand des Punktes $x = (\xi_1, \xi_2)$ vom Nullpunkt gerade $|x|_2 = \sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2)}$ ist, so können wir auch auf naive Weise zu je zwei Punkten x, y den Inhalt $V(x, y)$ des von ihnen aufgespannten Parallelogramms mit den Ecken $0, x, y, x + y$ bestimmen. Man rechnet nach:

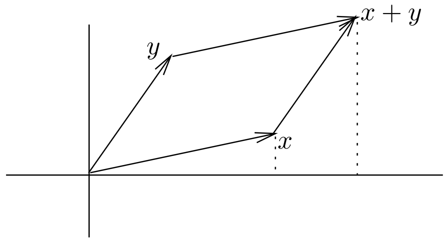


Abbildung 4

$$\begin{aligned} V(x,y) &= 2\left(\frac{1}{2}(\xi_1+\eta_1)(\xi_2+\eta_2) - \frac{1}{2}\xi_1\xi_2 - \frac{1}{2}\eta_1\eta_2 - \eta_1\xi_2\right) \\ &= \xi_1\xi_2 + \xi_1\eta_2 + \eta_1\xi_2 + \eta_1\eta_2 - \xi_1\xi_2 - \eta_1\eta_2 - 2\eta_1\xi_2 \\ &= \xi_1\eta_2 - \eta_1\xi_2. \end{aligned}$$

Eine ähnlich gebaute, aber kompliziertere Formel für das Volumen des von drei Vektoren aufgespannten Spates hatten wir im Vorkapitel bereitgestellt. Untersuchen wir die eben gewonnene Formel auf strukturelle Eigenschaften. Es gelten:

1. $V(x, y)$ ist linear in jeder Variablen, d.h. $V(u + v, y) = V(u, y) + V(v, y)$ und $V(\alpha x, y) = \alpha V(x, y)$. Analoges gilt in der zweiten Variablen. Daß hierbei negative Werte für V auftreten könne, sollte Sie nicht stören. Bei der Deutung des Integrals als Flächeninhalt ist sowas ja auch schon aufgetreten.

2. Sind x und y linear abhängig, so ist $V(x, y) = 0$. Geometrisch ist dies klar, da dann das Parallelogramm "zusammenklappt". Sie können es aber auch in der Formel nachrechnen.

3. Für die kanonischen Einheitsvektoren e_i ist $V(e_1, e_2) = 1$.

Diese drei Eigenschaften von $V(x, y)$ werden wir als Grundlage der Definition der "Determinante" nehmen.

Determinantenfunktionen

Definition und Satz D.1 (Determinantenfunktion) *Zu jedem Körper K und jeder natürlichen Zahl n existiert genau eine Abbildung*

$$\Delta : \underbrace{K^n \times K^n \times ... \times K^n}_{n\ mal} \to K : (x_1, ..., x_n) \mapsto \Delta(x_1, ..., x_n)$$

mit den folgenden Eigenschaften:

D1: Δ ist linear in jedem einzelnen Argument, man sagt "n-linear".

D2: Sind $(x_1, ..., x_n)$ linear abhängig, so ist $\Delta(x_1, ..., x_n) = 0$, man sagt "alternierend".

D3: Für die kanonischen Einheitsvektoren e_i ist $\Delta(e_1, e_2, ..., e_n) = 1$.

Eine Funktion Δ mit D1 und D2 heißt "Determinantenfunktion", sie heißt normiert, wenn zusätzlich noch D3 gilt.

Die Bedingung D1 bedeutet dabei, daß für alle $i = 1, ..., n$ gilt

$$\begin{aligned}\Delta(x_1, ..., x_{i-1}, \alpha x + \beta y, x_{i+1}, ..., x_n) = {} & \alpha\Delta(x_1, ..., x_{i-1}, x, x_{i+1}, ..., x_n) \\ & + \beta\Delta(x_1, ..., x_{i-1}, y, x_{i+1}, ..., x_n).\end{aligned}$$

Zum Beweis zeigen wir zunächst ein auch später für das Umgehen mit Determinanten nützliches Lemma:

Lemma D.2 *Für eine Abbildung $\Delta : (K^n)^n \to K$ mit den Eigenschaften D1 und D2 gelten*

(i) Addiert man zu einem Argument ein Vielfaches eines anderen Argumentes, so ändert sich der Wert der Determinantenfunktion nicht, d.h.

$$\forall_{i \neq j} \forall_{\lambda \in K}\ \Delta(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n) = \Delta(x_1, ..., x_{i-1}, x_i + \lambda x_j, x_{i+1}, ..., x_n).$$

(ii) Multipliziert man ein (nicht gleich alle!) Argument mit einem Faktor $\lambda \in K$, so multipliziert sich der Wert der Determinantenfunktion mit λ, d.h.

$$\forall_i \forall_{\lambda \in K}\ \Delta(x_1, ..., x_{i-1}, \lambda x_i, x_{i+1}, ..., x_n) = \lambda\Delta(x_1, ..., x_{i-1}, x_i, x_{i+1}, ..., x_n).$$

(iii) Vertauscht man zwei Argumente, so multipliziert sich der Wert der Determinantenfunktion mit -1, d.h.

$$\forall_{i \neq j}\ \Delta(..., x_i, ..., x_j, ...) = (-1)\Delta(..., x_j, ..., x_i, ...).$$

Beweis: Zu (i): Nach D1 ist

$$\Delta(..., x_j, ..., x_i + \lambda x_j, ...) = \Delta(..., x_j, ..., x_i, ...) + \Delta(..., x_j, ..., x_j, ...).$$

Im letzten Term sind zwei Argumente gleich, also die n Argumente linear abhängig, sodaß er nach D2 verschwindet.

Zu (ii): Dies ist ein Spezielfall von D1.

Zu (iii): Mit dem eben gezeigten ist

$$\begin{aligned}\Delta(..., x_i, ..., x_j, ...) &= \Delta(..., x_i - x_j, ..., x_j, ...) \\ &= \Delta(..., x_i - x_j, ..., x_j + (x_i - x_j), ...) \\ &= \Delta(..., x_i - x_j, ..., x_i, ...) \\ &= \Delta(..., -x_j, ..., x_i, ...) \\ &= -\Delta(..., x_j, ..., x_i, ...).\end{aligned}$$

□

Zunächst zeigen wir die Eindeutigkeit der normierten Determinantenfunktion. Hierzu zeigen wir etwas allgemeiner

Satz D.3 *Sind Δ und Δ' zwei Determinantenfunktionen auf dem K^n und ist dabei Δ normiert, so existiert eine Konstante c, sodaß für alle $x_1, ..., x_n \in K^n$ gilt*

$$\Delta'(x_1, ..., x_n) = c\Delta(x_1, ..., x_n).$$

Da eine normierte Determinantenfunktion auf den kanonischen Einheitsvektoren den Wert 1 annimmt, folgt daraus sofort

Korollar D.4 *Es gibt höchstens eine normierte Determinantenfunktion auf dem K^n.*

Satz D.3 impliziert also die eingangs behauptete Eindeutigkeit der normierten Determinatenfunktion.

Beweis: (von Satz D.3) Wir setzen $c := \Delta'(e_1, ..., e_n)$ und zeigen daß mit dieser Konstanten die Gleichung

$$\Delta'(x_1, ..., x_n) = c\Delta(x_1, ..., x_n).$$

für beliebige Argumente gilt.

Trivialerweise gilt sie natürlich für die Einheitsvektoren.

Sei nun $(x_1, ..., x_n) \in (K^n)^n$ gegeben. Ist diese Familie linear abhängig, so ist

$$\Delta'(x_1, ..., x_n) = 0 = c \cdot 0 = c\Delta(x_1, ..., x_n)$$

und die Formel gilt.

Sei also $(x_1, ..., x_n) \in (K^n)^n$ linear unabhängig. Die Matrix X, die die x_i als Zeilen hat, ist dann invertierbar, ihre GAUSS-JORDAN-Form ist damit die Einheitsmatrix I_n, die gerade die Einheitsvektoren e_i als Zeilen hat. Die GAUSS-JORDAN-Form läßt sich aber aus X herstellen durch eine Folge von Operationen von folgendem Typ:

- Addiere zu einer Zeile ein Vielfaches einer anderen.
- Multipliziere eine Zeile mit einem Faktor λ.
- Vertausche zwei Zeilen.

Dies sind aber gerade die in Lemma D.2 beschriebenen Operationen, sodaß sich

- bei der ersten $\Delta(x_1, ..., x_n)$ und $\Delta'(x_1, ..., x_n)$ beide nicht ändern,
- bei den anderen beiden Operationen $\Delta(x_1, ..., x_n)$ und $\Delta'(x_1, ..., x_n)$ jeweils um denselben Faktor $\neq 0$ ändern.

Am Ende werden $\Delta(e_1, ..., e_n)$ bzw. $\Delta'(e_1, ..., e_n)$ erreicht, wofür die Gleichung gilt. Dann muß aber schon $\Delta'(x_1, ..., x_n) = c\Delta(x_1, ..., x_n)$ gewesen sein. □

Die Konstruktion einer Determinatenfunktion

Für $n = 1$ ist $(K^1)^1 = K$ und

$$\Delta_1 : (K^1)^1 \to K : x := (\xi) \mapsto \xi$$

ist die normierte Determinantenfunktion.

Für $n = 2$ sei $x_j = \begin{pmatrix} \xi_{1j} \\ \xi_{2j} \end{pmatrix}$, $j = 1, 2$ und

$$\Delta_2 : (K^2)^2 \to K : (x_1, x_2) := \begin{pmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} \\ \xi_{21} & \xi_{22} \end{pmatrix} \mapsto \xi_{11}\xi_{22} - \xi_{12}\xi_{21}$$

ist die normierte Determinantenfunktion.

Von hier aus konstruieren wir nun rekursiv normierte Determinantenfunktionen für alle $n \in \mathbb{N}$.

Zu $n > 1$ und $1 \leq i \leq n$ bezeichne P_i den Homomorphismus

$$P_i : K^n \to K^{n-1}, \quad x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{i-1} \\ \xi_i \\ \xi_{i+1} \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_{i-1} \\ \xi_{i+1} \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix},$$

der also die i-te Komponente löscht.

Ferner sei mit einem $1 \leq j \leq n$ und der Determinantenfunktion Δ_{n-1} auf dem K^{n-1} für $(x_1, ..., x_n) \in (K^n)^n$:

$$\Delta_{n-1}^{(ij)}(x_1, ..., x_n) := \Delta_{n-1}\left(P_i(x_1), ..., P_i(x_{j-1}), P_i(x_{j+1}), ..., P_i(x_n)\right).$$

Man streiche also zunächst in allen Vektoren die i-te Komponente, lasse dann den j-ten Vektor ganz weg und wende darauf die Determinatenfunktion Δ_{n-1} an.

Damit gilt:

Satz D.5 *Für jedes $n > 1$ gilt: Ist Δ_{n-1} die normierte Determinantenfunktion zu $n-1$, so ist für jedes $i : 1 \leq i \leq n$ die Funktion*

$$\Delta_n(x_1, ..., x_n) := \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} \xi_{ij} \Delta_{n-1}^{(ij)}(x_1, ..., x_n)$$

die normierte Determinantenfunktion zur Dimension n und damit unabhängig von dem gewählten Index i.

Beweis: Wir weisen die in Definition und Satz D.1 geforderten Eigenschaften nach.

D1: *Für jedes $k : 1 \leq k \leq n$ ist Δ_n linear im k-ten Argument:* Sei $x_k = \alpha x_k' + \beta x_k''$. Dann ist auch $P_i(x_k) = \alpha P_i(x_k') + \beta P_i(x_k'')$ und sofern $j \neq k$, d.h. $P_i(x_k)$ in $\Delta_{n-1}^{(ij)}(x_1, ..., x_n)$ tatsächlich benutzt wird, ist wegen D1 für Δ_{n-1} dann

$$\Delta_{n-1}^{(ij)}(..., x_k, ...) = \alpha \Delta_{n-1}^{(ij)}(..., x_k', ...) + \beta \Delta_{n-1}^{(ij)}(..., x_k'', ...).$$

Für $j = k$ ist $\Delta_{n-1}^{(ij)}$ unabhängig von x_k, dafür haben wir hier

$$\xi_{ik} = \alpha \xi_{ik}' + \beta \xi_{ik}''.$$

Folglich ist

$$\begin{aligned} \Delta_n(..., \alpha x_k' + \beta x_k'', ...) &= \sum_{j \neq k} (-1)^{i+j} \left(\alpha \Delta_{n-1}^{(ij)}(..., x_k', ...) + \beta \Delta_{n-1}^{(ij)}(..., x_k'', ...)\right) \\ &\quad + (-1)^{i+k} (\alpha \xi_{ik}' + \beta \xi_{ik}'') \Delta_{n-1}^{(ij)}(.......) \\ &= \alpha \Delta_n(..., x_k', ...) + \beta \Delta_n(..., x_k'', ...). \end{aligned}$$

D2: *Sind $(x_1, ..., x_n)$ linear abhängig, so ist $\Delta_n(x_1, ..., x_n) = 0$:* Wir behandeln zunächst den Spezialfall: *Sind unter $(x_1, ..., x_n)$ zwei Vektoren gleich, so ist $\Delta_n(x_1, ..., x_n) = 0$:* Sei also $r < s$ und $x_r = x_s$. In den Summanden für

$j \neq r, s$ kommen dann schon in $\Delta_{n-1}^{(ij)}$ zwei gleiche Argumente vor, sodaß diese Terme verschwinden. Ferner ist wegen $x_r = x_s$ auch $\xi_{ir} = \xi_{is} =: \xi_i$. Also ist hier

$$\begin{aligned}\Delta_n(x_1, ..., x_n) &= (-1)^{i+r}\xi_i\Delta_{n-1}^{(ir)}(...) + (-1)^{i+s}\xi_i\Delta_{n-1}^{(is)}(...)\\ &= (-1)^{i+r}\xi_i\left(\Delta_{n-1}^{(ir)}(...) + (-1)^{s-r}\Delta_{n-1}^{(is)}(...)\right).\end{aligned}$$

Wir zeigen, daß der Klammerausdruck verschwindet. Setzen wir hier zur Vereinfachung der Notation $y_j := P_i(x_j)$ und $y := y_r = y_s$, so haben wir

$$\begin{aligned}\Delta_{n-1}^{(ir)}(x_1, ..., x_n) &= \Delta_{n-1}(y_1, ..., y_{r-1}, y_{r+1}, ..., y_{s-1}, y, y_{s+1}, ..., y_n),\\ \Delta_{n-1}^{(is)}(x_1, ..., x_n) &= \Delta_{n-1}(y_1, ..., y_{r-1}, y, y_{r+1}, ..., y_{s-1}, y_{s+1}, ..., y_n).\end{aligned}$$

Beide enthalten genau die selben Argumente, jedoch in anderer Reihenfolge. Vertauscht man in $\Delta_{n-1}^{(is)}$ sukzessive $(s-r-1)$ mal das y mit dem jeweils rechts davon stehendes Element, so erhält man $\Delta_{n-1}^{(ir)}$ und nach Lemma D.2 bedeutet jede Vertauschung einen Faktor -1. Damit ist aber

$$\Delta_{n-1}^{(ir)}(x_1, ..., x_n) = (-1)^{s-r-1}\Delta_{n-1}^{(is)}(x_1, ..., x_n),$$

somit die oben in der Klammer stehende Summe $= 0$.

Für den Spezialfall gilt also D2.

Sind nun allgemein $(x_1, ..., x_n)$ linear abhängig, so läßt sich ein x_r aus den übrigen kombinieren:

$$x_r = \sum_{s \neq r} \lambda_s x_s.$$

Dann ist nach D1:

$$\begin{aligned}\Delta_n(x_1, ..., x_n) &= \Delta_n(x_1, ..., x_{r-1}, \sum_{s\neq r}\lambda_s x_s,\ x_{r+1}, ..., x_n)\\ &= \sum_{s\neq r}\lambda_s\Delta_n(x_1, ..., x_{r-1}, x_s, x_{r+1}, ..., x_n)\end{aligned}$$

und nach dem Spezialfall haben hier alle vorkommenden Determinantenfunktionen den Wert 0.

D3: $\Delta_n(e_1, ..., e_n) = 1$: Hier ist $\xi_{ij} = \delta_{ij}$ (Kronecker-Symbol), also

$$\begin{aligned}\Delta_n(e_1, ..., e_n) &= \sum_{j=1}^{n}\delta_{ij}\Delta_{n-1}^{(ij)}(e_1, ..., e_n)\\ &= \Delta_{n-1}^{(ii)}(e_1, ..., e_n)\\ &= \Delta_{n-1}\left(P_i(e_1), ..., P_i(e_{i-1}), P_i(e_{i+1}), ..., P_i(e_n)\right)\\ &= \Delta_{n-1}(e_1', ..., e_{n-1}') = 1.\end{aligned}$$

□

1

Die Determinante eines Endomorphismus

Im folgendem bezeichne Δ die eindeutig bestimmte Determinantenfunktion auf dem K^n.

Ist $f : K^n \to K^n$ ein Homomorphismus, so können wir die Abbildung

$$\Delta \circ f : (K^n)^n \to K : (x_1, ..., x_n) \mapsto \Delta\left(f(x_1), ..., f(x_n)\right)$$

betrachten. Man prüft leicht nach, daß $\Delta \circ f$ n-linear und alternierend, also eine Determinantenfunktion ist. Nach Satz D.3 gilt dann mit $c := \Delta\left(f(e_1), ..., f(e_n)\right)$ die Darstellung

$$(\Delta \circ f)(x_1, ..., x_n) = c \cdot \Delta(x_1, ..., x_n).$$

Satz und Definition D.6 (Determinante eines Endomorphismus) *Die hier auftretende Konstante* $c = \Delta\left(f(e_1), ..., f(e_n)\right)$ *heißt die "Determinante des Endomorphismus* f*", notiert als* $\det f$.

Wir haben somit

$$(\Delta \circ f)(x_1, ..., x_n) = (\det f) \cdot \Delta(x_1, ..., x_n).$$

Wir beweisen nun einige Eigenschaften der Determinante

Satz D.7 *Für Endomorphismen* $f, g : K^n \to K^n$ *gilt:*

(i) *Ist* $\operatorname{rg} f < n$, *so ist* $\det f = 0$.

(ii) $\det \mathrm{id}_{K^n} = 1$.

(iii) $\det(g \circ f) = \det g \cdot \det f$.

(iv) *Es ist* $\det f \neq 0$ *genau dann, wenn* f *ein Isomorphismus ist. In diesem Falle gilt* $\det f^{-1} = (\det f)^{-1}$.

(v) *Für einen Isomorphismus* g *ist* $\det(g^{-1} f g) = \det f$.

Beweis:

(i) $\det f = (\Delta \circ f)(e_1, ..., e_n) = \Delta\left(f(e_1), ..., f(e_n)\right)$. Ist nun $\operatorname{rg} f < n$, so sind $(f(e_1), ..., f(e_n))$ linear abängig und somit dieser Ausdruck $= 0$.

(ii) $\det \mathrm{id}_{K^n} = (\Delta \circ \mathrm{id}_{K^n})(e_1, ..., e_n) = \Delta(e_1, ..., e_n) = 1$.

(iii) Nach Satz und Definition D.6 ist

$$\begin{aligned}
\det(g \circ f) &= \Delta\left(g(f(e_1)), ..., g(f(e_n))\right) \\
&= (\Delta \circ g)\left(f(e_1), ..., f(e_n)\right) \\
&= \det g \cdot \Delta\left(f(e_1), ..., f(e_n)\right) \\
&= \det g \cdot \det f \cdot \Delta\left(e_1, ..., e_n\right) \\
&= \det g \cdot \det f.
\end{aligned}$$

(iv) Ist $\det f \neq 0$, so ist wegen (i) dann $\operatorname{rg} f = n$, d.h. f ein Isomorphismus.

Ist umgekehrt f ein Isomorphismus, so existiert f^{-1} und $f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_{K^n}$. Dann ist

$$1 = \det \mathrm{id}_{K^n} = \det f \circ f^{-1} = \det f \cdot \det f^{-1},$$

woraus die Behauptung folgt.

(v) Wegen (iii) und (iv) ist

$$\det(g^{-1}fg) = \det(g^{-1})\det f \det g = (\det g)^{-1}\det f \det g = \det f.$$

□

Die eben bewiesene Eigenschaft (v) erlaubt es, die Definition der Determinante noch zu erweitern:

Lemma D.8 *Sind U ein n-dimensionaler Vektorraum über K und $f \in \mathrm{Hom}(U, U)$, ferner φ, ψ Isomorphismen $K^n \to U$, so gilt für die Endomorphismen*

$$f_1 := \varphi^{-1}f\varphi, \quad f_2 := \psi^{-1}f\psi \in \mathrm{Hom}(K^n, K^n)$$

$$\det f_1 = \det f_2.$$

Beweis: Es ist $\varphi = \psi\psi^{-1}\varphi$ und somit

$$f_1 = \varphi^{-1}f\varphi = (\psi\psi^{-1}\varphi)^{-1}f(\psi\psi^{-1}\varphi) = \varphi^{-1}\psi\psi^{-1}f\psi\psi^{-1}\varphi = (\psi^{-1}\varphi)^{-1}f_2(\psi^{-1}\varphi).$$

Damit folgt die Behauptung aus (v) des vorigen Satzes. □

Definition D.9 (Determinante eines Endomorphismus) *Sind U ein Vektorraum über K von der Dimension n und $f \in \mathrm{Hom}(U, U)$, ferner φ ein Isomorphismus $K^n \to U$, so heißt*

$$\det f := \det(\varphi^{-1}f\varphi)$$

die "Determinante von f".

Man beachte, daß hier zweimal der selbe Isomorphismus zu verwenden ist!

Auch hierfür gelten die in Satz D.7 gemachten Aussagen:

Satz D.10 *Ersetzt man in Satz D.7 überall den K^n durch einen beliebigen n-dimensionalen Vektorraum, so bleibt er weiterhin gültig.*

Der **Beweis** sei zur Übung gelassen.

2

Die Determinante einer Matrix

In manchen, vor allem älteren Lehrbüchern werden Sie den Begriff der "Determinante eines Endomorphismus" nicht finden, sondern nur den Begriff "Determinante einer Matrix". Diesen Begriff können wir ohne Mühe aus dem allgemeineren gewinnen. Darüber hinaus ist es für das praktische Rechnen mit Determinanten nützlich die Determinante einer Matrix handhaben zu können.

Definition D.11 (Determinante einer Matrix) *Eine $n \times n$- Matrix A über K definiert eindeutig einen Homomorphismus*

$$f_A := K^n \to K^n : x \mapsto Ax.$$

Seine Determinante definieren wir als die "Determinante der Matrix A"

$$\det A := \det f_A.$$

Aus Satz D.7 erhalten wir sofort

Satz D.12 *Für $n \times n$ Matrizen A, B und die $n \times n$ Einheitsmatrix I gelten*

(i) *Es ist* $\det I = 1$.

(ii) *Es ist* $\det AB = \det A \cdot \det B$.

(iii) *Es ist* $\det A = 0$ *genau dann, wenn* $\operatorname{rg} A < n$.

(iv) *Es ist* $\det A \neq 0$ *genau dann, wenn* $\operatorname{rg} A = n$, *d.h. wenn A invertierbar ist.*

(v) *Ist A invertierbar, so ist* $\det A^{-1} = (\det A)^{-1}$.

(vi) *Ist B invertierbar, so ist* $\det(B^{-1}AB) = \det A$, *d.h. ähnliche Matrizen haben die gleiche Determinante*

Der **Beweis** ist mit Satz D.7 praktisch schon geführt und sei deshalb nicht mehr explizit notiert.

Mit der eindeutig bestimmten Determinantenfunktion $\Delta : (K^n)^n \to K$ hatten wir die Determinante eines Endomorphismus $f : K^n \to K^n$ erklärt als

$$\det f := \Delta\left(f(e_1), ..., f(e_n)\right).$$

Zusammen mit Definition D.9 bekommen wir damit

Satz D.13 *Sind $(a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n})$ die Spalten einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$, so gilt*

$$\det A = \Delta(a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n}).$$

Beweis:

$$\det A = \det f_A = \Delta\left(f_A(e_1), ..., f_A(e_n)\right) = \Delta\left(Ae_1, ..., Ae_n\right) = \Delta(a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n}),$$

Sie erinnern sich:

Die Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren!

□

Damit liefert uns Satz D.3 eine Rekursionsformel für die Berechnung der Determinante einer $n \times n$-Matrix.

Satz D.14 (Entwicklungssatz von Laplace, Entwicklung nach einer Zeile) *Für eine $n \times n$-Matrix $A = (\alpha_{\nu\mu})$ und Indices $i, j : 1 \leq i, j \leq n$ bezeichne A_{ij} diejenige $(n-1) \times (n-1)$-Matrix, die aus A durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte hervorgeht. Damit gilt für jedes $i = 1, ..., n$:*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

Zum **Beweis** braucht man sich wegen Satz D.13 nur zu vergewissern, daß diese Formel genau die aus Satz D.5, lediglich in einer anderen Schreibweise ist. Tun Sie das ! □

Nach Satz D.13 ist $\det A = \Delta(a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n})$ die normierte Determinantenfunktion der Spalten von A. Ebensogut ist natürlich $\det A$ als eine Funktion $\Delta'(a_{1\cdot}, ..., a_{n\cdot})$ der Zeilen $a_{i\cdot}$ von A zu lesen. Nach Satz D.14 haben wir für jedes i die Entwicklung

$$\Delta'(a_{1\cdot}, ..., a_{n\cdot}) := \det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}$$

und dies ist trivialerweise linear in der i-ten Zeile von A. Da i völlig beliebig war, folgt so

(1) $\Delta'(a_{1\cdot}, ..., a_{n\cdot}) := \det A$ ist linear in jeder Zeile von A.

Sind die Zeilen von A linear abhängig, so ist $\operatorname{rg} A < n$ und damit $\det A = 0$. Also

(2) Es ist $\Delta'(a_{1\cdot}, ..., a_{n\cdot}) = 0$, sofern die Zeilen von A linear abhängig sind.

Trägt man in die Zeilen die kanonischen Einheitsvektoren ein, so entsteht die Einheitsmatrix I, d.h.

(3) Es ist $\Delta'(e_1, ..., e_n) = 1$

Damit haben wir also auch Δ' als die normierte Determinantenfunktion nachgewiesen und können damit Satz D.13 erweitern zu

Satz D.15 *Es ist*

$$\det A = \Delta(a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n}) = \Delta(a_{1\cdot}, ..., a_{n\cdot}),$$

die Determinante von A ist sowohl die normierte Determinantenfunktion der Spalten von A, als auch die normierte Determinantenfunktion der Zeilen von A.

Wir haben damit den zentralen Teil im Beweis von

Satz D.16 *Für eine $n \times n$-Matrix $A = (a_{\nu\mu})$ gelten*

(i) Ist A^T die transponierte Marix zu A, so ist $\det A^T = \det A$.

(ii) Statt nach einer Zeile können wir auch nach einer Spalte entwickeln, es ist also für $1 \leq j \leq n$

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det A_{ij}.$$

(iii) $\det A$ ist linear in jeder Spalte und in jeder Zeile von A.

(iv) Hat A zwei gleiche Spalten oder zwei gleiche Zeilen, so ist $\det A = 0$.

(v) Addiert man zu einer Spalte ein Vielfaches einer anderen Spalte, so ändert sich der Wert der Determinante nicht. Analog für Zeilen.

(vi) Vertauscht man zwei Spalten oder zwei Zeilen, so multipliziert sich die Determiante mit -1.

(vii) Die Determinante einer Dreiecksmatrix ist gleich dem Produkt der Diagonalelemente.

Beweis: Die Spalten $(a^T_{\cdot i})$ von A^T sind ja die transponierten Zeilen $(a_{i\cdot})^T$ von A, womit die Behauptung (i) direkt aus dem vorigen Satz folgt. Damit gilt insbesondere jede bezüglich der Spalten über die Determinate gemachte Aussage auch bezüglich der Zeilen und umgekehrt.

(ii) folgt damit unmittelbar aus Satz D.14, (iii) bis (vi) unmittelbar aus Definition und Satz D.1 zusammen mit Lemma D.2.

(vii) Ist A etwa eine obere Dreiecksmatrix, so ist $a_{ij} = 0$ für $i > j$. Entwickeln nach der ersten Spalte liefert

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} \det A_{i1} = a_{11} \det A_{i1}.$$

Da A_{11} selber wieder eine obere Dreiecksmatrix ist (wir haben ja die erste Zeile und die erste Spalte von A gestrichen), ist also induktiv schon

$$\det A_{11} = a_{22} \cdot a_{33} \cdot ... \cdot a_{nn}$$

und somit

$$\det A = a_{11} \cdot \det A_{11} = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}.$$

□

Dieser letzte Satz liefert auch sofort ein Verfahren, um die Determinante einer $n \times n$-Matrix $A = (a_{ij})$ explizit zu berechnen, und zwar gehen wir ähnlich vor wie bei der GAUSS-JORDAN-Elimination und versuchen die gegebene Matrix auf eine obere Dreiecksform zu bringen, ohne dabei den Wert der Determinante zu ändern.

1-ter Schritt: Ist die erste Spalte von A der Nullvektor, so sind die Spalten linear abhängig und somit $\det A = 0$.

Sei also die erste Spalte nicht der Nullvektor. Indem wir notfalls die erste Zeile gegen eine geeignete austauschen – und dabei den Wert der Determinante mit (-1) multiplizieren ! –, können wir dann $a_{11} \neq 0$ annehmen und dann von der 2-ten, 3-ten,..., n-ten Zeile solche Vielfache der ersten Zeile abziehen, daß in der ersten Spalte, abgesehen von dem Diagonalelement a_{11} sämtliche Elemente $= 0$ werden.

Hierbei ändert die Determinante ihren Wert nicht! (Aber achten Sie auf das Vorzeichen !!)

Die so erhaltene Matrix hat dann also die Form

$$A' = \left(\begin{array}{c|c} a'_{11} & x.....x \\ \hline 0 & \\ \vdots & A'_{11} \\ 0 & \end{array}\right),$$

wobei $a'_{11} \neq 0$ und die mit x bezeichneten irgendwelche nicht näher interessierenden Elemente sind. Ferner haben wir nach der Herleitung

$$\det A = (-1)^{\sigma} \det A'$$

wobei $\sigma \in \{0, 1\}$ und genau dann $\sigma = 1$ wenn wir zu Beginn zwei Zeilen vertauscht haben.

Wenden wir nun hierauf den Entwicklungssatz von LAPLACE an, so folgt sofort

$$\det A' = a'_{11} \det A'_{11}$$

und für die Matrix A'_{11} können wir argumentieren wie eben.

Wir bekommen also als

2-ter Schritt: Ist die erste Spalte von A'_{11} der Nullvektor, so ist $\det A'_{11} = 0$ und damit auch $\det A = 0$. Ist dies nicht der Fall, so können wir durch Zeilenvertauschen wieder erreichen, daß das Elemnet von A'_{11}, das links oben steht, also a'_{22}, nicht Null ist – evtl. bekommen wir hier wieder einen Faktor (-1) – und dann können wir A'_{11} durch Zeilenoperationen wieder so umformen, daß in der ersten Spalte von A'_{11} jetzt unter der Diagonalen nur noch Nullen stehen. Wir haben somit A umgeformt zu

$$A'' = \left(\begin{array}{cc|c} a'_{11} & x & \\ 0 & a'_{22} & x \\ \hline 0 & 0 & \\ \vdots & \vdots & A''_{22} \\ 0 & 0 & \end{array}\right).$$

Dabei ist wieder

$$\det A = (-1)^{\sigma} a'_{11} a'_{22} \det A''_{22},$$

wobei σ wieder angibt, wie oft wir bisher Zeilen vertauscht haben. Durch Iteration dieser Schlußweise erhalten wir folgendes

Rezept D.17 (zur Berechnung einer Determinante) *Man führe an der gegebenen Matrix A die* Gauss-Jordan*-Elimination in der folgenden vereinfachten Form durch:*

- *Die Pivot-Zeilen werden nicht normiert,*
- *Nullen brauchen nur unterhalb der Diagonalen erzeugt zu werden.*

Ist dann C die damit erhaltene Dreiecksmatrix, so ist

$$\det A = (-1)^\sigma \det C,$$

wobei σ angibt, wie oft bei dieser Elimination insgesamt Zeilen vertauscht worden sind. Die Determinante von C berechnet sich dabei einfach als Produkt der Diagonal-Elemente von C.

Anwendungen der Determinante

Definition D.18 (algebraisches Komplement) *Ist $A = (a_{\nu\mu})$ eine $n \times n$-Matrix, A_{ij} die daraus durch Streichen der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entstehende Matrix, so heißt*

$$D_{ij}(A) := (-1)^{i+j} \det A_{ij}$$

das "algebraische Komplement" des Matrixelementes a_{ij}.

Die Entwicklung der Determinante nach der i-ten Zeile liefert sofort

Lemma D.19 *Ist $A = (a_{\nu\mu})$ eine $n \times n$-Matrix, $x = (\xi_1, ..., \xi_n)^T$ ein Vektor und $A_{j,x}$ die Matrix, die entsteht, wenn man die j-te Spalte durch x ersetzt, so gilt*

$$\det A_{j,x} = \sum_{i=1}^{n} \xi_i D_{ij}(A).$$

Analoges gilt für die Zeilen.

Zum **Beweis** braucht man lediglich nach Satz D.16 die Determinante $\det A_{j,x}$ nach der j-ten Spalte zu entwickeln und einzusetzen. □

Speziell können wir natürlich für x irgendeine, sagen wir die k-te Spalte $a_{\cdot k}$ von A selbst wählen. Dann folgt

Lemma D.20 *Ist $A = (a_{\nu\mu})$ eine $n \times n$-Matrix, $a_{\cdot k}$ die k-te Spalte von A, so ist für $1 \leq j \leq n$*

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} D_{ij}(A) = \delta_{jk} \det A.$$

Multipliziert man also die Elemente der k-ten Spalte von A mit den algebraischen Komplementen der j-ten Spalte von A und summiert, so erhält man
im Falle $j = k$ die Determinante von A,
im Falle $j \neq k$ den Wert 0.
Analoges gilt für Zeilen.

Beweis: Nach dem vorigen Lemma ist $\sum_{i=1}^{n} a_{ik} D_{ij}(A) = \det A_{j,a_{\cdot k}}$ und man erhält $A_{j,a_{\cdot k}}$ indem man in A die j-te Spalte durch die k-te Spalte ersetzt. Für $j = k$ tut man also garnichts, d.h. erhält wieder A selbst, für $j \neq k$ bekommt man eine Matrix mit zwei gleichen Spalten, deren Determinante verschwindet. □

Wir erhalten so beispielsweise eine geschlossenen Darstellung für die Inverse einer (invertierbaren) Matrix.

Satz D.21 *Ist A eine invertierbare Matrix und bezeichnen $D_{\nu\mu}$ die algebraischen Komplemente der Elemente von A, so gilt*

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A}\left(D_{\nu\mu}\right)^T,$$

d.h. ersetzt man jedes Matrixelement durch sein algebraisches Komplement (mit Vorzeichen!!), transponiert die erhaltene Matrix und dividiert sie durch $\det A$, *so erhält man* A^{-1}.

Beweis: Es ist $\det A \neq 0$ genau dann, wenn A invertierbar ist. (Warum?) Die notierte Formel ist also sinnvoll. Setzen wir nun

$$D := \left(d_{\nu\mu}\right) := \left(D_{\nu\mu}\right)^T, \quad C := \left(c_{ij}\right) := DA,$$

so ist

$$c_{ij} = \sum_{\nu=1}^{n} d_{i\nu}a_{\nu j} = \sum_{\nu=1}^{n} D_{\nu i}a_{\nu j} = \delta_{ij}\det A.$$

Folglich ist $C = DA = (\det A)I$. □

Diese Darstellung der inversen Matrix können wir auch benutzen, um im Falle eindeutig lösbarer linearer Gleichungssysteme $Ax = b$ die Lösung geschlossen darzustellen.

Satz D.22 (CRAMERsche Regel) *Ist A eine invertierbare $n \times n$ Matrix, ferner $x = (\xi_1, ..., \xi_n)^T$, $b = (\beta_1, ..., \beta_n)^T$, so existiert genau eine Lösung von $Ax = b$. Für diese Lösung gilt*

$$\xi_j = \frac{\det A_{j,b}}{\det A},$$

d.h. man erhält die j-te Komponente der Lösung x als Quotient von zwei Determinanten, wobei im Nenner die Determinante von A selbst steht, im Zähler die Determinate der Matrix, die entsteht, wenn man die j-te Spalte von A durch die "rechte Seite" b ersetzt.

Beweis: Es ist mit der oben gegebenen Darstellung der inversen Matrix

$$x = A^{-1}b = \frac{1}{\det A}\left(D_{\nu\mu}\right)^T b.$$

Dieser Lösungsvektor hat als j-te Komponente

$$\xi_j = \frac{1}{\det A}\sum_{i=1}^{n} D_{ij}b_i = \frac{1}{\det A}\det A_{j,b}.$$

□

Warnung Die oben gegebene Darstellung für A^{-1} und die CRAMERsche Regel sind zwar für theoretische Überlegungen oft sehr nützlich. Für die explizite (numerische) Berechnung der Inversen bzw. der Lösung eines linearen Gleichungssystems sind sie aber – ganz abgesehen von numerischen Problemen (Rundungsfehler) – viel zu aufwendig. Hierzu ist die GAUSS-Elimination das geeignete Verfahren.

3

Determinanten und Permutationen

Für die Determinanten von 2×2 oder 3×3 Matrizen kennen wir einfache Darstellungen als Summen bzw. Differenzen von Produkten von Matrixelementen. Auf LEIBNITZ geht eine solche Darstellung für $n \times n$ Matrizen zurück. Hierzu brauchen wir etwas über Permutationen.

Bezeichnung D.23 *Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ bezeichnet S_n die Menge aller bijektiven Abbildungen*

$$\pi : \{1, ..., n\} \to \{1, ..., n\}.$$

Man nennt dies die "Permutationen" von $\{1, ..., n\}$.

Die identische Abbildung gehört natürlich zu S_n, fernen mit π auch die Umkehrabbildung π^{-1}, sowie mit σ und π auch die Hintereinanderausführung $\sigma \circ \pi$. Damit bilden die Permutationen eine Gruppe, die sog. "symmetrische Gruppe" S_n.

Sie besitzt offenbar genau

$$n! := n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot 2 \cdot 1 \quad \text{(gelesen "n Fakultät")}$$

viele Elemente. Denn den Wert für $\pi(1)$ kann man offenbar frei unter allen n Elementen von $\{1, ..., n\}$ wählen. Hat man dies getan, so stehen für $\pi(2)$ noch die restlichen $(n-1)$ vielen Werte zur Verfügung u.s.w.

Besonders einfache Permutationen sind die sog. "Transpositionen" τ_{ij}, die genau die beiden verschiedenen Elemente i, j mit $1 \leq i < j \leq n$ vertauschen und alle anderen Elemente fest lassen. Es ist also

$$\tau_{ij}(k) = \begin{cases} j & k = i \\ i & k = j \\ k & k \neq i, j \end{cases}, \quad (1 \leq k \leq n).$$

Offenbar ist für jede Transposition τ stets $\tau^2 = \mathrm{id}$, also $\tau = \tau^{-1}$.

Aus Transpositionen läßt sich jede Permutation aufbauen.

Lemma D.24 *Jede Permutation $\pi \in S_n$ ist als Produkt von höchstens $(n-1)$ Transpositionen darstellbar.*

Beweis: Für $n \leq 2$ ist dies offenbar richtig. Für größere n setze $m := \pi(n)$.

Ist $m = n$, so werden durch π im eigentlichen Sinne nur die Elemente von $\{1, ..., n-1\}$ permutiert, was nach Induktion also mit höchstens $(n-1) - 1 = n - 2 < n - 1$ Transpositionen bewirkt werden kann.

Ist $m < n$, so betrachte man mit der Transposition τ_{mn} die Permutation

$$\pi' := \tau_{mn} \circ \pi.$$

Für sie ist

$$\pi'(n) = \tau_{mn}(\pi(n)) = \tau_{mn}(m) = n.$$

Wie eben geschlossen kann man also π' durch höchstens $n-2$ Transpositionen darstellen, somit $= \tau_{mn} \circ \pi'$ durch höchstens $n-1$ viele. □

Im Zusammenhang mit Determinanten sind für uns die sog. Permutationsmatrizen interessant.

Bezeichnung D.25 *Es seien $e_1, ..., e_n$ die kanonischen Einheitsvektoren im K^n und $\pi \in S_n$ eine Permutation. Dann heißt die $n \times n$ Matrix*

$$P_\pi := \left(e_{\pi(1)}, ..., e_{\pi(n)}\right),$$

deren k-te Spalte also gerade der $\pi(k)$-te Einheitsvektor ist, die "Permutationsmatrix" zu Permutation π.

Ferner nennt man

$$\mathrm{sig}(\pi) := \det(P_\pi)$$

das Vorzeichen der Permutation π.

Die Rechtfertigung für diese Bezeichnung ergibt sich aus folgendem

Lemma D.26

(i) Für je zwei Permutationen $\sigma, \pi \in S_n$ ist

$$P_{\sigma\circ\pi} = P_\sigma P_\pi,$$

und damit auch

$$\mathrm{sig}(\sigma\circ\pi) = \mathrm{sig}(\sigma)\cdot\mathrm{sig}(\pi).$$

(ii) Das Vorzeichen einer Transposition ist -1.

Beweis:

(i) Die Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren. Damit kann man also die jeweils j-te Spalte darstellen als

$$\begin{aligned}(P_\sigma P_\pi)_{\cdot j} &= (P_\sigma P_\pi)e_j = P_\sigma(P_\pi e_j)\\ &= P_\sigma e_{\pi(j)} = e_{(\sigma\circ\pi)(j)} = (P_{\sigma\circ\pi})_{\cdot j}\,.\end{aligned}$$

(ii) Die Permutationsmatrix zu einer Transposition erhält man aus der Einheitsmatrix durch Vertauschen von zwei Spalten. □

Damit kommen wir zur angekündigten Darstellung der Determinante. Nutzen wir systematisch die n-Linearität der Determinante, so erhalten wir für die Determinante einer $n\times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ die Darstellung

$$\begin{aligned}\det A &= \det(a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot n})\\ &= \det\left(\sum_{i_1=1}^n a_{i_1 1}e_{i_1}, \sum_{i_2=1}^n a_{i_2 2}e_{i_2}, ..., \sum_{i_n=1}^n a_{i_n n}e_{i_n}\right)\\ &= \sum_{1\le i_1,...,i_n\le n} a_{i_1 1}\cdot a_{i_2 2}\cdot ...\cdot a_{i_n n}\cdot\det\left(e_{i_1}, ..., e_{i_n}\right).\end{aligned}$$

Dabei ist über alle Indextupel $(i_1, ..., i_n)$ mit Eintragungen aus $\{1, ..., n\}$ zu summieren. Kommen in einem solche Tupel gleiche Indizes vor, so verschwindet die zugehörige Determinante (gleiche Spalten!), d.h. dann ist

$$\det\left(e_{i_1}, ..., e_{i_n}\right) = 0,$$

sodaß also nur über die Tupel zu summieren ist, für die die Abbildung

$$\pi : 1 \mapsto i_1,\ 2 \mapsto i_2,\ ...,\ n \mapsto i_n$$

eine Permutation ist. Rechts stehen dann die Determinanten der zugehörigen Permutationsmatrizen, d.h. das Vorzeichen der jeweiligen Permutation.

Damit haben wir die Formel von Leibniz

Satz D.27 *Für eine $n\times n$ Matrix $A = (a_{ij})$ über einem beliebigen Körper gilt*

$$\det A = \sum_{\pi\in S_n}\mathrm{sig}(\pi)\cdot a_{\pi(1),1}\cdot ...\cdot a_{\pi(n),n}.$$

BD Beispiele zu Determinanten

$\rangle$ 1

Wir hatten die bisherigen Überlegungen damit motiviert, daß im $\mathbb{R}^2$ der Flächeninhalt $V(x, y)$ des von zwei Vektoren aufgespannten Parallelogramms die Eigenschaften hat, die wir dann von einer normierten Determinantenfunktion gefordert haben. Da wir inzwischen wissen, daß es genau eine solche gibt, haben wir also

Für $x = (\xi_1, \xi_2),\ y = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$ ***ist***

$$\Delta_2(x, y) = \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1.$$

Die einzige normierte Determinantenfunktion im $\mathbb{R}^3$ kennen wir auch schon, sie ist nämlich das Spat-Produkt. Weisen Sie dies mal selber nach und zwar auf folgendem Weg: Wählen Sie drei Spalten-Vektoren

$$x = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)^T,\ y = (\eta_1, \eta_2, \eta_3)^T,\ z = (\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3)^T$$

und entwickeln Sie die Determinante $\Delta_3(x, y, z)$ nach der ersten Zeile. Das gibt dann eine Formel der Art

$$\Delta_3(x, y, z) = \xi_1\Delta_2\left(\begin{pmatrix}\eta_2\\ \eta_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\zeta_2\\ \zeta_3\end{pmatrix}\right) - \ldots$$

Dann setzen sie hier die obige Formel für Δ_2 ein und sollten die folgende Formel erhalten:

$$\Delta_3(x, y, z) = \xi_1\eta_2\zeta_3 + \xi_2\eta_3\zeta_1 + \xi_3\eta_1\zeta_2 - \xi_1\eta_3\zeta_2 - \xi_2\eta_1\zeta_3 - \xi_3\eta_2\zeta_1.$$

Verifizieren Sie an diesem Beispiel auch, daß immer dasselbe herauskommt, egal nach welcher Zeile oder Spalte Sie entwickeln. Machen Sie sich nochmal den Zusammenhang mit dem im Vorkapitel eingeführten geometrischen Spat-Produkt klar.

Weiter bis

2 $\rangle$

$\rangle$ 2

Ist $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ ein Homomorphismus und sind $x, y \in \mathbb{R}^2$ gegeben, so können wir die zwei Parallelogramme aufgespannt von x, y und von $f(x), f(y)$ betrachten. Ihre Flächeninhalte sind

$$V(x, y) = \Delta_2(x, y) \ \text{ und}$$
$$V(f(x), f(y)) = \Delta_2(f(x), f(y)).$$

Da aber

$$\Delta_2(f(x), f(y)) = \det f \cdot \Delta_2(x, y)$$

ist, haben wir also

$$V(f(x), f(y)) = \det f \cdot V(x, y).$$

Dies können wir geometrisch so deuten:

Durch den Homomorphismus f wird das von x, y aufgespannte Parallelogramm zu dem von $f(x), f(y)$ aufgespannten verzerrt. (Warum ist das so?) Dabei wird sich i.a. der Flächeninhalt ändern. Die gerade abgeleitete Formel besagt, daß diese Änderung des Inhaltes unabhängig von dem konkreten Parallelogramm ist, sondern nur von dem Homomorphismus f abhängt und immer einen konstanten Faktor, nämlich $\det f$ beträgt.

Die Determinante eines Homomorphismus ist der Faktor, um den sich der Inhalt eines Parallelogramms bei der Abbildung durch den Homomorphismus ändert.

Insbesondere ist also $\det f$ der Inhalt des von $f(e_1), f(e_2)$ aufgespannten Parallelogramms

Wiederholen Sie dieselben Überlegungen für den $\mathbb{R}^3$.

Gehen Sie einmal mit dieser Interpretation der Determinante die Aussagen von Satz D.7 im einzelnen durch und überlegen Sie jeweils dabei, was die einzelnen Aussagen geometrisch bedeuten.

Im Zusammenhang mit der Integralrechnung für Funktionen in mehreren Variablen werden Sie diese geometrische Interpretation der Determinante brauchen!

Für Endomorphismen in irgendwelchen n-dimensionalen K-Vektorräumen geht natürlich diese anschauliche Interpretation der Determinante verloren. Wenn Sie aber Satz D.7 in dem eben erwähnten Sinne studiert haben, sollte es Ihnen nicht schwer fallen, nun den “abstrakten” Satz D.10 zu beweisen. Tun Sie es!

Weiter bis

3

3

Gleich zu Anfang steht schon wieder so ein Satz D.12 der nicht bewiesen ist. Kratzen Sie nochmal zusammen, was Sie noch über Matrixdarstellung von Homomorphismen wissen, schauen Sie notfalls nochmal nach – wir werden das noch öfter brauchen – und dann gehen Sie an die Arbeit und beweisen Satz D.12 aus Satz D.7. Wenn Sie erst mal gemerkt haben, wie das geht, werden Sie auch verstehen, warum ich den Satz nicht bewiesen habe.

Und nun noch zur Frage, wie die Formeln für die Determinanten “kleiner” Matrizen aussehen.

Einfachster Weg: Sie schauen nach, was weiter unten steht. Lerneffekt : minimal!

Etwas mühsamer aber sinnvoller ist folgendes:

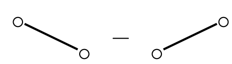
Nehmen Sie Satz D.14 oder Satz D.16 und rechnen damit die Determinanten für $1 \times 1,\ 2 \times 2,\ 3 \times 3$ Matrizen $A = (a_{ij})$ aus. Im Falle $n = 1$ tritt hier die Frage nach Determinante einer 0×0 Matrix auf. Geben Sie diesem pathologischen Ding den Wert 1.

Eine weitere Möglichkeit ist: Überlegen Sie nochmal, was Sie bisher über Determinanten und Determinantenfunktionen gehört bzw. gelesen haben. Die gesuchten Formeln stehen mit etwas anderen Symbolen schon im bisherigen Text.

Schließlich: Hier sind die Formeln und dazu Merkregeln.

$$\det\,(a_{11}) = a_{11} \qquad \det(\circ) = \circ$$

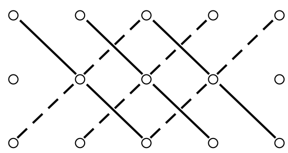
$$\det\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \qquad \det\begin{pmatrix} \circ & \circ \\ \circ & \circ \end{pmatrix} =$$



$$\det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$- a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Die letzte Formel kann man sich so merken:

Man schreibe die ersten beiden Spalten nochmal rechts neben die Matrix und bilde dann die drei Produkte von links oben nach rechts unten (—) und subtrahiere von deren Summe die drei Produkte von links unten nach rechts oben (- - -). (Kam das schon mal vor?)



Warnung: *Für größere Matrizen geht das nicht mehr so einfach. Das analoge Schema wird schon für 4×4 Matrizen falsch, es liefert nicht mehr die Determinante. Allgemein sind die im letzen Abschnitt des Kapitels D dargestellten Formeln von* LEIBNIZ *zu benutzen.*

Wenn Sie auch mit Recht sagen werden, daß man das Ausrechnen von Determinanten dem Computer überlassen sollte, so sollten Sie doch wissen, wie man es macht und es auch durchführen können, weil Sie sonst immer wieder bei mathematischen Ableitungen hängen bleiben werden. Und da hilft eben nur Üben, nämlich GAUSS-Elimination und den Entwicklungssatz von LAPLACE. Für die hier einzusetzenden Vorzeichen gibt es wieder eine simple Merkregel:

Das Element links oben, also mit den Indizes $i = j = 1$ bekommt $+$ und dann geht es wie beim Schachbrett abwechseln mit $+\ -$ weiter

$$\begin{pmatrix} + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ + & - & + & - & \dots \\ - & + & - & + & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

Wenn Sie also für eine Stelle das Vorzeichen suchen, brauchen Sie gar nichts über die Indizes zu rechnen, sondern einfach nach Schachbrettmuster auszuzählen.