E Eigenwerte und Normalformen

In Kapitel H haben wir die folgende Normalformen-Darstellung für Homomorphismen abgeleitet:

Rangdarstellung E.1 *Sind U, V endlichdimensionale Vektorräume und ist $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ mit $\mathrm{rg}\, f = r$, so existieren Basen B_U, B_V sodaß f bezüglich dieser Basen die Matrixdarstellung $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ hat.*

Speziell gilt diese Aussage natürlich für den Fall $U = V$, also für Endomorphismen $f \in \mathrm{Hom}(U, U)$. Dabei müssen wir jedoch im allgemeinen die Basen im Bild- und im Urbild-Exemplar von U verschieden wählen, um diese Darstellung zu erreichen.

Es stellt sich nun die Frage, welche Normalform-Darstellung noch möglich ist, wenn wir im Bild- und im Urbild-Exemplar von U dieselbe Basis verwenden wollen.

Diese scheinbar akademische Fragestellung führt zu Begriffen wie Eigenwert, Eigenvektor, ohne deren Beherrschung viele zentrale Fragen innerhalb der Mathematik und ihrer Anwendungen in Physik und Wirtschaft oder Technik nicht einmal richtig zu formulieren, geschweige denn zu lösen sind.

Vereinbarung E.2 *Im folgenden verstehen wir unter einer Matrixdarstellung eines Endomorphismus stets eine Darstellung, bei der in Bild und Urbild die selbe Basis gewählt ist.*

Verschiedene Matrixdarstellungen F, F' des selben Endomorphismus sind dann ähnlich, d.h. es existiert eine reguläre Matrix G, mit der

$$F' = G^{-1} F G.$$

Betrachten wir als ein Beispiel den durch die Diagonalmatrix

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

gegebene Homomorphismus $f : K^n \to K^n : x \mapsto Fx$. Die Diagonalelemente seien sämtlich $\neq 0$. Besäße f eine Normalform-Darstellung der obigen Art, also mit zweimal der selben Basis, so müßte F der Einheitsmatrix I ähnlich sein, d.h. $I = G^{-1}FG$. Dann wäre aber auch $F = GIG^{-1} = I$, was im allgemeinen falsch ist. Unter unserer Einschränkung können wir also nicht einmal für eine (nicht ganz spezielle) Diagonalmatrix eine Darstellung der eingangs betrachteten Art finden.

Das eben betrachtete f besitzt aber eine andere wichtige Eigenschaft:

Für die kanonischen Einheitsvektoren gilt

$$f(e_i) = Fe_i = \lambda_i e_i.$$

Zu f existieren also Vektoren die

1. von 0 verschieden sind und

2. durch f in ein Vielfaches von sich übergehen.

Da die Aussage 2. stets für den Nullvektor erfüllt ist, ist sie nur interessant, wenn auch 1. gilt.

Definition E.3 (Eigenwert, Eigenvektor) *Zu einem Endomorphismus f in einem K-Vektorraum U heißt ein Element $x \in U$ "Eigenvektor" zum "Eigenwert" $\lambda \in K$, wenn*

$$x \neq 0 \quad \text{und} \quad f(x) = \lambda x.$$

Die Eigenvektoren und Eigenwerte einer Matrix F sind über den durch $x \mapsto Fx$ gegebenen Endomorphismus des K^n erklärt.

Im Englischen heißen diese Begriffe "eigenvector" bzw. "eigenvalue".

Für $\alpha \neq 0$ ist natürlich mit x auch αx Eigenvektor zum selben Eigenwert.

1

Die Eigenwerte und Eigenvektoren von Endomorphismen $f \in \mathrm{Hom}(U, U)$ in einem n-dimensionalen Raum seien nun genauer studiert.

Ist λ Eigenwert zu f, so besitzt also die Gleichung $f(x) = \lambda x$ eine nichttriviale Lösung, was äquivalent formuliert bedeutet, daß der Endomorphismus $(f - \lambda\,\mathrm{id}_U)$ einen nichttrivialen Kern besitzt. Wegen des Dimensionssatzes über Kern und Bild von Homomorphismen ist dann notwendig $\mathrm{rg}(f - \lambda\,\mathrm{id}_U) < n$. Nach Satz D.7 ist dies äquivalent mit $\det(f - \lambda\,\mathrm{id}_U) = 0$.

Wir haben also

Satz E.4 *λ ist genau dann Eigenwert zu f, wenn $\det(f - \lambda\,\mathrm{id}_U) = 0$ und jedes $x \neq 0, x \in \ker(f - \lambda\,\mathrm{id}_U)$ ist Eigenvektor zu λ.*

Ist nun F eine Matrixdarstellung von f, so ist (siehe Kapitel H) dann $(F - \lambda I)$ eine Matrixdarstellung von $(f - \lambda\,\mathrm{id}_U)$ und nach Kapitel D ist

$$\det(f - \lambda\,\mathrm{id}_U) = \det(F - \lambda I).$$

Die Determinante der Matrix $(F - \lambda I)$ können wir aber nach den Entwicklungssätzen berechnen.

Lemma E.5 *Sind in einer $n \times n$-Matrix A die Elemente Polynome in einer Variablen λ und haben die Polynome in der j-ten Spalte einen Grad $\leq \gamma_j$, $(j = 1, ..., n)$, so ist die Determinante von A ein Polynom vom Grad $\leq \gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_n$ in λ.*

Beweis: Wir führen Induktion nach n. Im Falle $n = 1$ ist nichts zu zeigen. Sei also die Behauptung für $n = m - 1$ richtig. Wir zeigen, daß sie auch für $n = m$ gilt. Dazu entwickeln wir die Determinante von A nach der m-ten, d.h. letzten Spalte. Dann ist

$$\det A = \sum_{i=1}^{m} (-1)^{i+m} a_{im} \,\mathrm{det A}_{im},$$

wobei die A_{im} die durch Streichen der i-ten Zeile und der letzten Spalte entstehenden Untermatrizen sind. Nach Induktionsvoraussetzung ist deren Determinante ein Polynom vom Grad $\leq \gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_{m-1}$ und da a_{im} Polynome vom Grad $\leq \gamma_m$ sind, ist somit jeder Summand ein Polynom vom Grad $\leq \gamma_1 + \gamma_2 + ... + \gamma_m$ in λ. $\square$

Die Matrix $F - \lambda I$ hat mit $F = (\beta_{ij})$ die Form

$$F - \lambda I = \begin{pmatrix} \beta_{11} - \lambda & \beta_{12} & \dots & \beta_{1n} \\ \beta_{21} & \beta_{22} - \lambda & \dots & \beta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \beta_{n1} & \beta_{n2} & \dots & \beta_{nn} - \lambda \end{pmatrix},$$

sodaß sämtliche vorkommenden Polynome vom Grad ≤ 1 in λ sind.

Damit ergibt sich

Satz und Definition E.6 (charakteristisches Polynom) *Ist* $F = (\beta_{ij})$ *Matrixdarstellung für* $f \in \mathrm{Hom}(U, U)$, *so ist*

$$\chi_f(\lambda) := \det(f - \lambda\,\mathrm{id}_U) = \det(F - \lambda I) =: \chi_F(\lambda)$$

ein Polynom vom Grad n, *das "charakteristische Polynom" des Endomorphismus* f *bzw. der Matrix* F.

Sein Hauptkoeffizient ist $(-1)^n$, *der nächste ist die Summe der Diagonalelemente, genannt "Spur" von* $F : \mathrm{spur}(F) := \sum_{i=1}^{n} \beta_{ii}$, *der Absolutkoeffizient ist* $\det F$.

Ähnliche Matrizen haben dasselbe charakteristische Polynom.

Beweis: Die Gradaussage folgt aus Lemma E.5, die beiden oberen Koeffizienten erhält man per Koeffizientenvergleich aus der LAPLACE-Entwicklung (damit kann man auch die anderen berechnen), den Absolutkoeffizienten bekommt man durch Einsetzen von $\lambda = 0$.

Eine zu F ähnliche Matrix ist ebenfalls Matrixdarstellung zu f und hat damit das selbe charakteristische Polynom wie F. □

Den Satz E.4 können wir nun auch so formulieren:

Korollar E.7 λ *ist genau dann Eigenwert zu einem Endomorphismus* f, *wenn* λ *Nullstelle des charakteristischen Polynoms* $\chi_f(t)$ *ist.*

Das Polynom $t^2 + 1$ besitzt in $\mathbb{R}$ keine Nullstelle, wohl aber jedes Polynom dessen Grad eine ungerade Zahl ist. Dagegen besitzt in $\mathbb{C}$ jedes nichtkonstante Polynom eine Nullstelle und dies gilt allgemein in jedem algebraisch abgeschlossenen Körper (so sind die nämlich gerade definiert.)

Damit haben wir

Satz E.8 *Jeder Endomorphismus* f *in einem* n*-dimensionalen Vektorraum über* $\mathbb{C}$ *oder sonst einem algebraisch abgeschlossenen Körper besitzt mindestens einen Eigenwert* λ, *dito wenn der Körper* $\mathbb{R}$ *ist und* n *eine ungerade Zahl.*

Beweis: Das charakteristische Polynom hat eben in diesen Fällen mindestens eine Nullstelle. □

Untersuchen wir nun Eigenvektoren.

Lemma E.9 *Sind* $\lambda_1, ..., \lambda_m$ *verschiedene Eigenwerte zu* f, *und* $u_1...., u_m$ *zugehörige Eigenvektoren, so sind diese linear unabhängig.*

Beweis: mit Induktion.

Sei $m = 1$: Als Eigenvektor ist $u_1 \neq 0$ und damit die von ihm alleine gebildete Familie (u_1) unabhängig.

$m > 1$: Seien nun $(u_1...., u_{m-1})$ unabhängig. Wir untersuchen eine Linearkombination

$$\alpha_1 u_1 + ... + \alpha_{m-1} u_{m-1} + \alpha_m u_m = 0$$

mit $\alpha_i \in K$. Nach Multiplikation mit λ_m ist auch

$$\lambda_m \alpha_1 u_1 + ... + \lambda_m \alpha_{m-1} u_{m-1} + \lambda_m \alpha_m u_m = 0,$$

nach Anwenden von f auf die erste Gleichung ist auch

$$\alpha_1 f(u_1) + ...\alpha_{m-1} f(u_{m-1}) + \alpha_m f(u_m) = 0.$$

Da u_i Eigenvektor zum Eigenwert λ_i ist, d.h. $f(u_i) = \lambda_i u_i$, können wir die letzte Gleichung auch schreiben als

$$\lambda_1 \alpha_1 u_1 + ... + \lambda_{m-1} \alpha_{m-1} u_{m-1} + \lambda_m \alpha_m u_m = 0.$$

Subtrahieren wir beide Linearkombinationen voneinander, so folgt

$$(\lambda_m - \lambda_1)\alpha_1 u_1 + ... + (\lambda_m - \lambda_{m-1})\alpha_{m-1} u_{m-1} = 0$$

und da $(u_1 ...., u_{m-1})$ unabhängig sind und $\lambda_m - \lambda_i \neq 0$ für $i < m$, ist notwendig $\alpha_1 = ... = \alpha_{m-1} = 0$ und dann aber auch $\alpha_m = 0$, was die Behauptung zeigt. □

Als Folgerung erhalten wir

Satz E.10 *Besitzt ein Endomorphismus f eines n-dimensionalen Vektorraumes U genau n verschiedene Eigenwerte $\lambda_1, ..., \lambda_n$, so bilden die zugehörigen Eigenvektoren $(u_1 ...., u_n)$ eine Basis von U.*

Solche Endomorphismen gibt es, etwa der durch die Diagonalmatrix

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

dargestellte ist ein solcher.

Die Identität id_U (was sind deren Eigenwerte und Eigenvektoren?) zeigt aber, daß durchaus eine Basis aus Eigenvektoren existieren kann, ohne daß n verschiedene Eigenwerte vorhanden sind.

Gibt es zu einem Endomorphismus f eine Basis aus Eigenvektoren, so können wir f in spezieller Weise darstellen.

Satz E.11 *Zu einem Endomorphismus f sei $(u_1 ...., u_n)$ eine Basis aus Eigenvektoren von f zu Eigenwerten $\lambda_1, ..., \lambda_n$. Dann besitzt f bezüglich dieser Basis die Darstellung als Diagonalmatrix*

$$F = \mathrm{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

Beweis: Nach Kapitel H sind die Elemente β_{ij} der j-tenSpalt von F gerade die bei der Darstellung

$$f(u_j) = \beta_{1j} u_1 + ... + \beta_{nj} u_n$$

auftretenden Koeffizienten. Da die u_j hier Eigenvektoren sind, ist aber (mit dem KRONECKER-Symbol δ_{ij})

$$f(u_j) = \lambda_j u_j, \quad \text{d.h.} \quad \beta_{ij} = \delta_{ij} \lambda_j.$$

□

Definition E.12 (diagonalisierbar) *Besitzt ein Endomorphismus eine Darstellung durch eine Diagonalmatrix, so heißt er "diagonalisierbar". Eine Matrix A heißt diagonalisierbar, wenn der durch $x \mapsto Ax$ gegebene Endomorphismus diagonalisierbar ist.*

Den Satz E.11 können wir umdrehen:

Satz E.13 *Jeder diagonalisierbare Endomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(U, U)$ besitzt eine Familie von Eigenvektoren $(u_1 ...., u_n)$, die eine Basis von U bilden.*

Beweis: Da f diagonalisierbar ist, existiert ein Isomorphismus $\varphi : U \to K^n$, sodaß $f' := \varphi f \varphi^{-1}$ bezüglich der kanonischen Einheitsvektoren e_i die Matrixdarstellung

$$F = \operatorname{diag}(\lambda_1, ..., \lambda_n) := \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

hat. Dann ist aber $f'(e_i) = Fe_i = \lambda_i e_i$ und mit $u_i := \varphi^{-1}(e_i)$ ist dann

$$\begin{aligned} f(u_i) &= (\varphi^{-1}\varphi f \varphi^{-1})(e_i) = (\varphi^{-1} f')(e_i) = \varphi^{-1}(f'(e_i)) \\ &= \varphi^{-1}(\lambda_i e_i) = \lambda_i \varphi^{-1}(e_i) = \lambda_i u_i. \end{aligned}$$

Also sind die u_i Eigenvektoren und als Bilder der kanonischen Basis unter dem Isomorphismus φ^{-1} eine Basis von U. □

Wir können dieses Ergebnis zusammenfassen als

Satz E.14 *Ein Endomorphismus f in U ist genau dann diagonalisierbar, d.h. durch eine Diagonalmatrix darstellbar, wenn es eine Basis aus Eigenvektoren zu f gibt.*

f ist sicher dann dagonalisierbar, wenn es zu ihm $n = \dim U$ viele verschiedene Eigenwerte gibt.

Um Missverständnissen vorzubeugen: Leider sind keineswegs alle Endomorphismen in endlich-dimensionalen Räumen diagonalisierbar.

Ehe wir untersuchen, welche häßlichen Endomorphismen denn sonst noch auftreten, ein paar Überlegungen zur Frage, wie man Eigenwerte und Eigenvektoren berechnet.

Ist λ Eigenwert, so ist nach Satz E.4 jedes $x \neq 0$ aus dem Kern von $(f - \lambda \operatorname{id}_U)$ zugehöriger Eigenvektor. Den Kern zu bestimmen heißt aber ein homogenes lineares Gleichungssystem zu lösen und wenn wir erst zu einer Matrixdarstellung $F - \lambda I$ übergegangen sind, sollte dies kein Problem sein. (GAUSS-JORDAN-Elimination!)

Demnach brauchen wir also "nur" noch die Eigenwerte zu bestimmen. Dafür legt Korollar E.7 folgenden Weg nahe:

Man bestimme das charakteristische Polynom und berechne dessen Nullstellen.

Für ganz kleine n oder für spezielle Fälle führt dies auch zum Ziel. Im allgemeinen ist aber schon die Bestimmung des charakteristischen Polynoms eine mühsame Sache und zur Berechnung seiner Nullstellen ist man auf numerische Methoden angewiesen. Dies ändert sich nicht prinzipiell, wenn man andere Methoden verfolgt.

Das Bestimmen der Eigenwerte eines Endomorphismus ist i.a. nur mit numerischen Näherungsmethoden möglich.

Die Aussage von Satz E.13 sei noch etwas allgemeiner betrachtet. Ist λ Eigenwert von f, so ist also nach Satz E.4 jeder Vektor $x \neq 0$ aus $\ker(f - \lambda \operatorname{id}_U)$ ein Eigenvektor von f zu λ. Nehmen wir nun noch den Nullvektor hinzu, so haben wir also einen Unterraum.

Satz und Definition E.15 (Eigenraum) *Ist λ Eigenwert zu f, so nennt man*

$$\operatorname{Eig}(f; \lambda) := \ker(f - \lambda \operatorname{id}_U)$$

den "Eigenraum" von f zu λ. Abgesehen von dem Nullvektor besteht $\operatorname{Eig}(f; \lambda)$ aus genau allen Eigenvektoren von f zum Eigenwert λ. Ist f aus dem Kontext bekannt, so schreibt man häufig auch

$$E_\lambda := \ker(f - \lambda \operatorname{id}_U)$$

für den Eigenraum.

Das oben gezeigte Lemma E.9 über die Unabhängigkeit von Eigenvektoren lautet mit diesem Begriff allgemeiner wie folgt:

Lemma E.16 *Sind $\lambda_1, ..., \lambda_m$ verschiedene Eigenwerte zu f, dazu E_{λ_i} die Eigenräume, so ist die Summe*

$$W := E_{\lambda_1} + ... + E_{\lambda_m}$$

direkt, d.h. ist

$$w_1 + ... + w_m = 0 \quad \textit{mit} \quad w_i \in E_{\lambda_i}, (i = 1, ..., m), \ \textit{so ist } w_1 = ... = w_m = 0.$$

Der **Beweis** ist fast wörtlich der von Lemma E.9 und sei deshalb als Übung gelassen.

Wählen wir also für jeden Eigenraum eine Basis, so bilden alle diese Teilbasen zusammen eine Basis von $W = \bigoplus_{i=1}^m E_{\lambda_i}$, dem von allen Eigenvektoren aufgespannten Unterraum. Damit kann man Satz E.13 auch so aussprechen:

Satz E.17 *Ein Endomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(U, U)$ ist genau dann diagonalisierbar, wenn*

$$U = \bigoplus_{i=1}^{m} E_{\lambda_i},$$

wobei die λ_i gerade die verschiedenen Eigenwerte von f durchlaufen.

Beweis: Ist f diagonalisierbar, so besitzt U eine Basis aus Eigenvektoren von f. Nimmt man hier die zum selben Eigenwert jeweils zusammen, so ergibt sich die behauptete Darstellung als direkte Summe.

Ist andererseits der ganze Raum direkte Summe von Eigenräumen, so erhält man nach obiger Bemerkung daraus eine Basis von U, die ganz aus Eigenvektoren besteht, wonach dann f diagonalisierbar ist. $\square$

2

Wir wissen, daß etwa über $\mathbb{C}$ jeder Endomorphismus f einen Eigenwert und folglich auch einen Eigenvektor besitzt. Ist f diagonalisierbar, so besitzt er sogar eine Basis aus Eigenvektoren. Betrachten wir nun einmal den durch

$$F = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 1 & & & & \\ & \lambda_1 & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & 0 & & & \lambda_1 & 1 \\ & & & & & \lambda_1 \end{pmatrix}$$

gegebenen Endomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{C}^n, \mathbb{C}^n)$.

Das charakteristische Polynom lautet $\chi_f(\lambda) = (\lambda_1 - \lambda)^n$, sodaß λ_1 der einzige Eigenwert von f ist. Offenbar ist e_1 dazugehöriger Eigenvektor. Schauen wir den zugehörigen Eigenraum

$$E_{\lambda_1} = \ker(f - \lambda_1 \,\mathrm{id}_{\mathbb{C}^n}) = \ker(F - \lambda_1 I) = \ker \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & 0 & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

an. Die Matrix $F - \lambda_1 I$ hat noch den Rang $(n-1)$, somit einen eindimensionalen Kern und damit ist also $E_{\lambda_1} = \mathrm{span}(e_1)$, d.h. alle Eigenvektoren sind Vielfache von e_1.

Für $n > 1$ ist also dieses f nicht diagonalisierbar.

Untersuchen wir das Verhalten von f auf den kanonischen Einheitsvektoren genauer.
Es ist

$$f(e_1) = \lambda_1 e_1, \text{ d.h. } (f - \lambda_1 \,\mathrm{id})e_1 = 0.$$

Es ist

$$f(e_2) = \lambda_1 e_2 + e_1, \text{ d.h. } (f - \lambda_1 \,\mathrm{id})e_2 = e_1 \neq 0, \text{ aber}$$
$$(f - \lambda_1 \,\mathrm{id})^2 e_2 = (f - \lambda_1 \,\mathrm{id})e_1 = 0.$$

So kann man weiterschließen und erhält für alle $2 \leq m \leq n$

$$(f - \lambda_1 \,\mathrm{id})e_m = e_{m-1} \text{ und}$$

$$(f - \lambda_1 \,\mathrm{id})^{m-1} e_m \neq 0,\ (f - \lambda_1 \,\mathrm{id})^m e_m = 0.$$

Dies führt zu

Definition E.18 (Hauptvektoren) *Ist λ Eigenwert zu $f \in \mathrm{Hom}(U, U)$ so heißt jeder Vektor $x \in U$ mit*

$$(f - \lambda \,\mathrm{id})^{m-1} x \neq 0,\ (f - \lambda \,\mathrm{id})^m x = 0.$$

ein "Hauptvektor m-ter Stufe", (m = 1,2,...).

Für $m = 1$ lautet die Bedingung

$$(f - \lambda \,\mathrm{id})^0 x \neq 0,\ (f - \lambda \,\mathrm{id})x = 0,$$

was wegen $(f - \lambda \,\mathrm{id})^0 = \mathrm{id}$ gerade bedeutet, daß x ein Eigenvektor ist.

Hauptvektoren 1-ter Stufe sind Eigenvektoren.

Im folgenden setzen wir zur Vereinfachung der Notation

$$f_\lambda := (f - \lambda \,\mathrm{id}).$$

Lemma E.19 *Ist x_m ein Hauptvektor m-ter Stufe zum Eigenwert λ von f und definieren wir für $j = 1, 2, ..., m$ die Vektoren*

$$x_j := f_\lambda^{m-j}(x_m),$$

so gelten

(i) x_j *ist Hauptvektor j-ter Stufe.*

(ii) $f(x_j) = \begin{cases} \lambda x_j + x_{j-1} & \text{wenn} \quad j > 1, \\ \lambda x_j & \text{wenn} \quad j = 1. \end{cases}$

(iii) $(x_1, ..., x_m)$, *d.h. diese von dem Hauptvektor x_m erzeugte "Kette" von Hauptvektoren ist linear unabhängig.*

Beweis:

(i)

$$f_\lambda^{j-i}(x_j) = f_\lambda^{j-i} \circ f_\lambda^{m-j}(x_m) = f_\lambda^{m-i}(x_m) \quad \begin{cases} \neq 0 & \text{wenn} \quad i = 1, \\ = 0 & \text{wenn} \quad i = 0. \end{cases}$$

Also ist x_j Hauptvektor der Stufe j.

(ii)

$$f_\lambda(x_j) = f_\lambda \circ f_\lambda^{m-j}(x_m) = f_\lambda^{m-(j-1)}(x_m) = \begin{cases} x_{j-1} & \text{wenn} \quad j > 1, \\ 0 & \text{wenn} \quad j = 1. \end{cases}$$

(iii) Sei

$$0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_\lambda^{m-i}(x_m).$$

Dann ist für jedes $k : 1 \leq k \leq m$

$$\begin{aligned} 0 = f_\lambda^k(0) &= \sum_{i=1}^{n} \alpha_i f_\lambda^k \circ f_\lambda^{m-i}(x_m) \\ &= \sum_{i=1}^{k} \alpha_i f_\lambda^{k-i} \circ f_\ell^m(x_m) + \sum_{i=k+1}^{m} \alpha_i f_\lambda^{m-(i-k)}(x_m) \\ &= \sum_{i=k+1}^{m} \alpha_i x_{i-k} \end{aligned}$$

Setzt man nun der Reihe nach $k = m-1, m-2, \ldots$, so ergibt sich $\alpha_m = \alpha_{m-1} = \ldots = \alpha_1 = 0$, was die Unabhängigkeit zeigt. □

Solche Ketten von Hauptvektoren spielen eine wichtige Rolle:

Satz E.20 *Es sei $(x_1, \ldots, x_m)$ eine solche Kette von Hauptvektoren zum Eigenwert λ von f, und $H := \operatorname{span}(x_1, \ldots, x_m)$. Dann gelten*

(i) $f(H) \subset H$, d.h. $\forall_{x \in H}\ f(x) \in H$. - Man sagt, "$H$ ist f-invariant".

(ii) Die Hauptvektorenkette $(x_1, \ldots, x_m)$ ist Basis von H.

(iii) Bezüglich dieser Basis hat die Einschränkung $f_{|H}$ von f auf H die Matrixdarstellung

$$F_H = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & 0 & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

Beweis: (i) und (ii) folgen direkt aus Lemma E.19, für (iii) ist lediglich Lemma E.19,(ii) richtig zu interpretieren. □

Bezeichnung E.21 (JORDAN-Kasten) *Man nennt eine Matrix der speziellen in (iii) dargestellten Form einen "JORDAN-Kasten" zum Eigenwert λ.*

In Satz E.17 hatten wir gezeigt, daß jeder diagonalisierbare Endomorphismus eine Darstellung des Raumes als direkte Summe von Eigenräumen besitzt. Im zweiten Teil dieser Vorlesung werden wir folgende Verallgemeinerung dieses Sachverhaltes beweisen:

Satz E.22 *Ist f ein Endomorphismus in einem endlichdimensionalen komplexen Vektorraum U, so gibt es eine Darstellung von U als direkte Summe*

$$U = H_1 \oplus H_2 \oplus ... \oplus H_k,$$

wobei die H_j f-invariante Unterräume sind, die je eine Kette von Hauptvektoren von f als Basis besitzen. Hat $f_{|H_j}$ den JORDAN*-Kasten C_j als Matrixdarstellung, so besitzt f selbst die Matrixdarstellung*

$$F = \begin{pmatrix} C_1 & & & 0 \\ & \ddots & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & C_k \end{pmatrix},$$

bei der also längs der Diagonale die entsprechenden JORDAN*-Kästen aufgereiht sind. Man nennt dies auch die "*JORDAN*sche Normalform".*

$\boxed{3}$

Wir nutzen diese Ergebnisse über Eigenwerte, um erste Aussagen über die Lösung von

Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

zu bekommen.

$$y : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, t \mapsto y(t) := (\eta_1(t), ..., \eta_n(t))^T$$

bezeichne die stetig differenzierbaren Funktionen auf $\mathbb{R}$ mit Werten in $\mathbb{C}^n$. Dazu sei

$$y' : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, t \mapsto y'(t) := (\eta_1'(t), ..., \eta_n'(t))^T$$

die Ableitung. Sie ist noch stetig auf $\mathbb{R}$. $A := (\alpha_{ij})_{nn} \in \mathbb{C}^{n\times n}$ sei eine fest gewählte Matrix (mit komplexen Zahlen als Elementen).

Bezeichnung E.23

(i) Wir nennen eine Abbildung

$$D : y \mapsto D(y) := y' - Ay, \text{ d.h. } (D(y))(t) := y'(t) - Ay(t),$$

einen linearen Differential-Operator erster Ordnung mit konstanten Koeffizienten.

(ii) Für eine stetige Funktion

$$b : \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, t \mapsto b(t) := (\beta_1(t), ..., \beta_n(t))^T$$

heißt

$$D(y) = b, \text{ d.h. } y' = Ay + b$$

ein lineares Differentialgleichungssystem erster Ordnung (mit konstanten Koeffizienten).

Ist $b(t) \equiv 0$, so reden wir von einem homogenen System, andernfalls von einem inhomogenen.

Mit den Funktionenräumen

$$U := \{u \mid \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, u \text{ stetig differenzierbar } \} \text{ und}$$
$$V := \{v \mid \mathbb{R} \to \mathbb{C}^n, v \text{ stetig } \}$$

ist offenbar $D \in \mathrm{Hom}(U, V)$, was die Benennung "linearer Differentialoperator" rechtfertigt.
Wir werden später sehen, daß sich auch Differentialgleichungs-Probleme, die höhere Ableitungen enthalten, über solche Differentialoperatoren erster Ordnung darstellen lassen. (Siehe auch Beispielteil.)
Zur Lösung des unter Bezeichnung E.23.(ii) notierten Differentialgleichungssystems können wir nun die allgemeine Theorie aus Kapitel H heranziehen. Satz H.22 liefert dann für unsere Situation

Lemma E.24 *Ist y_* eine Lösung des inhomogenen Systems*

$$Dy := y' - Ay = b,$$

so ist

$$L(D; b) := \{y_* + y_h \mid y_h \in \ker D\}$$

die Gesamtheit aller Lösungen. Dabei besteht $\ker D$ *aus allen Lösungen der homogenen Gleichung*

$$Dy := y' - Ay = 0.$$

Diese Lösungsmenge $L(D; b)$ sei nun etwas untersucht.
Zunächst betrachten wir die homogene Gleichung.

Lemma E.25 *Ist y Lösung von $Dy = 0$, d.h. ist $y' = Ay$ und hat für eine Stelle $t_0 \in \mathbb{R}$ die Funktion y eine Nullstelle, d.h. ist $y(t_0) = 0$, so ist $y(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$.*

Beweis: Für jedes $t \in \mathbb{R}$ ist $y'(t) = Ay(t)$, sodaß also für $i = 1, ..., n$ gilt

$$\eta_i'(t) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \eta_j(t).$$

Durch Integration folgt

$$\eta_i(t) = \eta_i(t_0) + \int_{t_0}^{t} \eta_i'(\tau) d\tau = 0 + \int_{t_0}^{t} \sum_{j=1}^{n} \alpha_{ij} \eta_j(\tau) d\tau.$$

Mit

$$\eta(\tau) := \max\nolimits_{i=1}^{n} \left\{ \max_{|\tau - t_0| \leq |t - t_0|} \mid \eta_i(\tau)| \right\}$$

und

$$a := \max_{i,j} |\alpha_{ij}|$$

ist damit

$$0 \leq \eta(t) \leq \left| \int_{t_0}^{t} n \cdot a \cdot \eta(\tau) \, d\tau \right| = \eta(t) \cdot n \cdot a \cdot |t - t_0|.$$

Ist t so nahe bei t_0, daß $n \cdot a \cdot |t - t_0| < 1$, so folgt aus der letzten Ungleichung notwendig $\eta(t) = 0$, sodaß also auch $\eta(\tau) = 0$ für $|\tau - t_0| < |t - t_0|$. Diesen Schluß kann man iterieren und erhält daraus, daß notwendig $y(t) = 0$ für alle $t \in \mathbb{R}$ ist. $\square$

Wir erhalten damit als

Folgerung E.26

(i) Für jedes $y_0 \in \mathbb{C}^n$ *hat das "Anfangswertproblem"*

$$Dy = b,\ y(0) = y_0,$$

höchstens eine Lösung.

(ii) Die Abbildung

$$\varphi : \ker D \longrightarrow \mathbb{C}^n,\ y \longmapsto y(0),$$

ist injektiv und damit

$$\dim \ker D \leq n.$$

Tatsächlich gibt es bei (i) stets eine Lösung. Ferner werden wir unten sehen, daß in (ii) die Abbildung φ bijektiv ist und damit dann $\dim \ker D = n$.

Beweis: (i) Sind y_1, y_2 Lösungen von $Dy = b$, die beide $y_1(0) = y_2(0) = y_0$ erfüllen, so gilt für $y := y_1 - y_2$:

$$\begin{aligned} Dy &= D(y_1 - y_2) = Dy_1 - Dy_2 = b - b = 0, \\ y(0) &= y_1(0) - y_2(0) = y_0 - y_0 = 0 \end{aligned}$$

und mit Lemma E.25 folgt, daß $y_1(t) = y_2(t)$ für alle $t \in \mathbb{R}$ gilt.
(ii) Stimmen zwei Lösungen von $Dy = 0$ an der Stelle $t_0 = 0$ überein, so sind sie nach (i) identisch. Dies besagt aber gerade, daß die Abbildung φ injektiv ist. □

Die Eigenwerttheorie erlaubt uns nun den Beweis von

Satz E.27 *Die Abbildung*

$$\varphi : \ker D \longrightarrow \mathbb{C}^n,\ y \longmapsto y(0),$$

ist auch surjektiv und damit bijektiv, d.h. zu jedem $y_0 \in \mathbb{C}^n$ *gibt es genau eine Lösung der homogenen Anfangswertaufgabe*

$$Dy = y' - Ay = 0,\ y(0) = y_0.$$

Mit Folgerung E.26 ist dies äquivalent dazu, daß $Dy = 0$ genau n unabhängige Lösungen besitzt. Den **Beweis** von Satz E.27 führen wir in mehreren Schritten.

Reduktion E.28 *Es genügt die Aussage für den Fall zu beweisen, daß die Matrix* A *in* JORDAN*-scher Normalform vorliegt.*

Beweis: Ist $y' = Ay$ und G eine konstante invertierbare Matrix, so ist für die Funktion $z := G^{-1}y$, also $z(t) = G^{-1}y(t)$ dann $z' = G^{-1}y'$ und damit

$$z' = G^{-1}y' = G^{-1}AGG^{-1}y = G^{-1}AGz,$$

folglich z Lösung von $z' = (G^{-1}AG)z$, wobei natürlich noch $z(0) = G^{-1}y(0)$. Es genügt also die Behauptung für das transformierte System zu beweisen und dabei kann man durch Wahl von G die Matrix $G^{-1}AG$ als JORDAN-sche Normalform erreichen. □

Als nächstes betrachten wir folgenden

Spezialfall E.29 *Die Matrix A habe* JORDAN*sche Normalform mit genau einem* JORDAN-*Kasten*

$$A = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & \\ & \lambda & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & 0 & & & \lambda & 1 \\ & & & & & \lambda \end{pmatrix} = \lambda I + E,$$

wobei

$$I = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ & 1 & & & & \\ & & \ddots & & & \\ & & & \ddots & & \\ & & & & 1 & \\ & & & & & 1 \end{pmatrix}, \quad E = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & \\ & 0 & 1 & & 0 & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & 0 & & & 0 & 1 \\ & & & & & 0 \end{pmatrix}.$$

Dann sind die Spalten der Matrix

$$C(t) := e^{\lambda t} \cdot \begin{pmatrix} 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \frac{t^3}{3!} & \cdots \\ 0 & 1 & t & \frac{t^2}{2!} & \cdots \\ 0 & 0 & 1 & t & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}_{(m,n)}$$

eine Basis von $\ker D$, *d.h. der Lösungen von* $z' = Az$.

Beweis: Es ist zu betrachten

$$z'(t) = Az(t) = (\lambda I + E)z(t).$$

Mit einem noch zu bestimmenden Vektor

$$c(t) := (\gamma_1(t), ..., \gamma_n(t))^T$$

setzen wir an:

$$z(t) := e^{\lambda t} \cdot c(t).$$

Dies ergibt die für alle t zu erfüllende Gleichung

$$\begin{aligned} z'(t) &= e^{\lambda t}(\lambda c(t) + c'(t)) \\ &\overset{!}{=} (\lambda I + E)e^{\lambda t}c(t) \\ &= e^{\lambda t}(\lambda c(t) + Ec(t)), \end{aligned}$$

die offenbar zu

$$c'(t) = Ec(t)$$

äquivalent ist.
In Komponenten lautet dies

$$\gamma_i'(t) = \begin{cases} \gamma_{i+1}(t) & i < n \\ 0 & i = n \end{cases}$$

und die Spalten der oben notierten Matrix C sind offenbar Lösungen dieser Gleichung. Da C invertierbar ist, sind sie unabhängig und mit Folgerung E.26 also eine Basis. □

Nun kommen wir zum **allgemeinen Fall**.
Die Matrix A sei in JORDANscher Normalform gegeben, also als

$$A = \begin{pmatrix} J_1 & & \\ & \ddots & \\ & & J_k \end{pmatrix}$$

mit JORDAN-Kästen $J_1, ..., J_k$. Zu jedem JORDAN-Kasten J_i bilde man entsprechend dem Spezialfall die zugehörige Matrix $C_i(t)$ und ordne alle diese Matrizen wie folgt zu einer neuen Matrix

$$C(t) = \begin{pmatrix} C_1(t) & & \\ & \ddots & \\ & & C_k(t) \end{pmatrix}.$$

Dann – so rechnet man leicht nach – sind die Spalten vonn C unabhängig und Lösungen von $z = Az$, womit unser Satz gezeigt ist.

4

BE Beispiele zu Eigenwerten

1

Zunächst ein Beispiel dafür, daß Eigenwerte une Eigenvektoren auch "in der Natur" vorkommen.
Drei gleichschwere Kugeln K_1, K_2, K_3 mit der Masse 1 seien wie auf dem Bild durch Federn verbunden aufgehängt. Die Federkonstanten - sie geben an, wie stark die Feder ist - seien c_1, c_2, c_3. Wie schwingt dieses System, wenn man es einmal anstößt und wir annehmen, daß keine Dämpfung eintritt? Um es einfacher zu halten, betrachten wir nur genau senkrecht verlaufende Schwingungen.

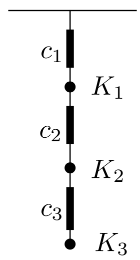

Abbildung 5

Ist $y_i(t)$ die Auslenkung aus der Ruhelage der i-ten Kugel zur Zeit t, dann erhält man folgendes System von Differentialgleichungen für die y_i :

$$\begin{aligned}
-y_1'' &= c_1 y_1 - c_2(y_2 - y_1)\\
-y_2'' &= c_2(y_2 - y_1) - c_3(y_3 - y_2)\\
-y_3'' &= c_3(y_3 - y_2)
\end{aligned}$$

Da ungedämpfte Schwingungen schön Sinus-artig verlaufen, machen wir folgenden Ansatz:

$$y_1(t) := \xi_1 \sin \omega t,\ y_2(t) := \xi_2 \sin \omega t,\ y_3(t) := \xi_3 \sin \omega t.$$

Wegen

$$(\sin \omega t)'' = -\omega^2 \sin \omega t$$

wird unser System von Differentialgleichungen damit überführt in das System

$$\begin{aligned}
\xi_1 \omega^2 \sin \omega t &= ((c_1 + c_2)\xi_1 - c_2 \xi_2) \sin \omega t\\
\xi_2 \omega^2 \sin \omega t &= (-c_2 \xi_1 + (c_2 + c_3)\xi_2 - c_3 \xi_3) \sin \omega t\\
\xi_3 \omega^2 \sin \omega t &= (-c_3)\xi_2 + c_3 \xi_3) \sin \omega t,
\end{aligned}$$

und hierin sind ξ_1, ξ_2, ξ_3 (nicht alle $= 0$) und ω zu bestimmen. Damit ist also zu lösen die Eigenwertaufgabe

$$\begin{pmatrix} c_1 + c_2 & -c_2 & 0 \\ -c_2 & c_2 + c_3 & -c_3 \\ 0 & -c_3 & c_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \qquad (\lambda = \omega^2.)$$

Jeder Eigenwert $\lambda = \omega^2$ liefert eine "Eigenfrequenz" des Systems und der zugehörige Eigenvektor x liefert die Amplituden der auftretenden Schwingungen. Jede entsprechend der Art, wie wir das System anstoßen, auftretende Schwingung des Gesamtsystems ergibt sich durch Überlagerung dieser Eigenschwingungen, d.h. ist

als Linearkombination dieser aus dem Eigenwertproblem gewonnenen Lösungen darstellbar.
Durch die Federn wird hier auf die Kugeln eine Kraft ausgeübt, die umso größer ist, je größer die Auslenkung aus der Ruhelage ist, und dadurch die Auslenkung selbst korrigiert. Diese Situation, daß die Änderung einer Größe abhängig von der Größe selbst ist, finden Sie in allen Bereichen quantitativen Beschreibens und meist resultiert daraus ein Eigenwertproblem. Weiter Beispiele wären etwa Wirschaftswachstum, Alterspyramide, Vermehrung von Bakterien, etc.
Weiter bis

2

BE1: Untersuchen wir den durch die Matrix

$$F = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix}$$

gegebenen Homomorphismus $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$.
Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi_f(\lambda) = \det(F - \lambda I) = \det \begin{pmatrix} -1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 2-\lambda & 2 \\ -3 & -6 & -6-\lambda \end{pmatrix}.$$

Subtrahieren wir die letzte Spalte von der zweiten so folgt

$$\chi_f(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -(1+\lambda) & 0 & 2 \\ 2 & -\lambda & 2 \\ -3 & \lambda & -6-\lambda \end{pmatrix}.$$

Entwickeln nach der zweiten Spalte liefert

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) &= -\lambda(-(1+\lambda)2 - 4) - \lambda((1+\lambda)(6+\lambda) + 6) \\ &= -\lambda(\lambda^2 + 5\lambda + 6) = -\lambda(\lambda+2)(\lambda+3). \end{aligned}$$

Demnach hat F die drei verschiedenen Eigenwerte $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = -3$. Nach Satz E.10 bilden die zugehörigen Eigenvektoren (u_1, u_2, u_3) eine Basis des $\mathbb{R}^3$. Also ist f diagonalisierbar.
Zur Bestimmung der Eigenvektoren betrachten wir das System $(F - \lambda I)x = 0$, für $\lambda = \lambda_1$ oder $\lambda = \lambda_2$ oder $\lambda = \lambda_3$, d.h. die Systeme:

$$\lambda_1 = 0: \quad \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ -3 & -6 & -6 \end{pmatrix} x = 0 \quad \text{mit einer Lösung } x = u_1 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -2: \quad \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ -3 & -6 & -4 \end{pmatrix} x = 0 \quad \text{mit einer Lösung } x = u_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_3 = -3: \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 5 & 2 \\ -3 & -6 & -3 \end{pmatrix} x = 0 \quad \text{mit einer Lösung } x = u_3 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Es bezeichne G die mit diesen Eigenvektoren als Spalten gebildete Matrix:

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Da diese eine Basis bilden, ist G invertierbar. Wenn Sie nun den Beweis von Satz E.13 aufmerksasm lesen, sollten Sie merken, daß gilt:

$$G^{-1}FG = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 \end{pmatrix} =: F'.$$

Sie können dies "zu Fuß" nachrechnen, oder so schließen:
Nach Konstruktion von G ist $u_i = Ge_i$ $(i = 1, 2, 3)$. Damit ist

$$G^{-1}FGe_i = G^{-1}Fu_i = G^{-1}\lambda_i u_i = \lambda_i G^{-1}u_i = \lambda_i G^{-1}Ge_i = \lambda_i e_i = F'e_i.$$

BE2: In Satz E.8 können wir nicht auf die Voraussetzung verzichten, daß der Körper algebraisch abgeschlossen ist:
Über $\mathbb{R}$ besitzt die Matrix $F = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ keine Eigenwerte; denn es ist das charakteristische Polynom $\chi_{f(\lambda)} = \det(F - \lambda I) = \lambda^2 + 1 \neq 0$ für alle $\lambda \in \mathbb{R}$. Über den komplexen Zahlen $\mathbb{C}$ hat dagegen $\chi_{f(\lambda)}$ die beiden Nullstellen $\pm i$ und somit eine Basis aus Eigenvektoren. Wie sieht sie aus?
Weiter bis

3

3

Die bisher betrachteten diagonalisierbaren Matrizen besaßen eine Basis aus Eigenvektoren. Wir haben aber gesehen, daß es vorkommen kann, daß nur ein Eigenwert und dazu auch nur genau ein Eigenvektor existiert. Eine solche Matrix läßt sich dann auf die Form

$$F' = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & & & & 0 \\ & \lambda & 1 & & & \\ & & \ddots & \ddots & & \\ & & & \ddots & 1 & \\ & & & & \lambda & 1 \\ 0 & & & & & \lambda \end{pmatrix}$$

bringen, also auf die Gestalt eines einzigen JORDAN-Kastens. Diese JORDANsche Normalform sei für ein – noch recht simples – Beispiel bestimmt.

BE3: Es sei

$$F = \begin{pmatrix} 17 & 0 & -25 \\ 0 & 3 & 0 \\ 9 & 0 & -13 \end{pmatrix}$$

Das charakteristische Polynom lautet

$$\begin{aligned} \chi_f(\lambda) = \det(F - \lambda I) &= \det \begin{pmatrix} 17-\lambda & 0 & -25 \\ 0 & 3-\lambda & 0 \\ 9 & 0 & -13-\lambda \end{pmatrix} \\ &= (3-\lambda)[-(17-\lambda)(13+\lambda) + 9 \cdot 25] = (3-\lambda)(\lambda-2)^2. \end{aligned}$$

Wir haben also zwei verschiedene Eigenwerte $\lambda_1 = 3, \lambda_2 = 2$.
$(F - 3I)x = 0$ besitzt genau eine unabhängige Lösung, nämlich $u_1 = (0, 1, 0)^T$.
Für

$$(F - 2I)x = \begin{pmatrix} 15 & 0 & -25 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -15 \end{pmatrix} x = 0$$

existiert wegen $\mathrm{rg}(F-2I)=2$ auch nur genau eine unabhängige Lösung, nämlich $u_2=(5,0,3)^T$. Da aber $u_2 \in \mathrm{im}(F-2I)$ ist, hat auch das inhomogene System

$$(F-2I)x = u_2, \text{ d.h. } \begin{pmatrix} 15 & 0 & -25 \\ 0 & 1 & 0 \\ 9 & 0 & -15 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

eine Lösung, nämlich $u_3=(\frac{1}{3},0,0)^T$. Dann ist

$$(F-2I)u_3 = u_2 \neq 0, \text{ aber } (F-2I)^2 u_3 = (F-2I)u_2 = 0,$$

d.h. u_3 ist ein Hauptvektor zweiter Stufe zum Eigenwert 2 von F. Die Vektoren (u_1,u_2,u_3) bilden eine Basis von $\mathbb{R}^3$, in der u_2,u_3 eine Kette bilden. Nach Satz E.20 hat der von F gegebene Homomorphismus $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 : x \mapsto Fx$ bezüglich dieser Basis somit die Matrixdarstellung

$$F' = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

in JORDANscher Normalform.
Bilden Sie wie in BE1 die Matrix G mit den Spalten (u_1,u_2,u_3), dann können Sie nachrechnen oder analog oben schließen, daß $F'=G^{-1}FG$ ist.
Überlegen Sie mal, warum es keinen Sinn hat, für den Eigenwert 3 eine Hauptvektor zu suchen? Woran kann man das sehen?
Der Vektor $u_3' := (0,0,\frac{1}{5})$ wäre auch ein Hauptvektor gewesen, der mit u_2 eine Kette bildet. Es gibt also zu dem Eigenvektor u_2 verschiedene (unabhängige) Hauptvektoren, die man in die gesuchte Basis aufnehmen kann.
Führen Sie die gleichen Überlegungen nochmal aus, nachdem Sie in F das mittlere Element von 3 in 2 geändert haben.
Weiter bis

4

4

Als Beispiel betrachten wir die "gewöhnliche Differentialgleichung 2-ter Ordnung"

$$u''(t) = (\delta - q^2)u(t) + 2qu'(t) \qquad \text{mit } \delta, q \in \mathbb{R}.$$

Wir setzen $\eta_1 := u,\ \eta_2 := u'$ sodaß also $\eta_1' = u' = \eta_2,\ \eta_2' = u''$. Somit haben wir also die Gleichungen

$$\begin{aligned} \eta_1' &= \eta_2, \\ \eta_2' &= (\delta - q^2)\eta_1 + 2q\eta_2, \end{aligned}$$

was wir mit $y := \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix}$ und $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ (\delta - q^2) & 2q \end{pmatrix}$ schreiben können als

$$y' = Ay.$$

Damit ist die behandelte Form eines Systems 1-ter Ordnung erreicht.
Zur Lösung ist nun die JORDAN-Form der Matrix A zu bestimmen. Das charakteristische Polynom lautet

$$\chi_A(\lambda) = \det \begin{pmatrix} -\lambda & 1 \\ (\delta - q^2) & 2q - \lambda \end{pmatrix} = \lambda^2 - 2q\lambda + q^2 - \delta = (\lambda - q)^2 - \delta.$$

1.Fall: $\delta \neq 0$: Hier gibt es zwei verschiedene Eigenwerte λ_1, λ_2, somit dazu zwei unabhängige Eigenvektoren c_1, c_2 und – rechnen Sie das mal selber nach – die Funktionen

$$\begin{aligned} y_1(t) &:= e^{\lambda_1 t} \cdot c_1 \\ y_2(t) &:= e^{\lambda_2 t} \cdot c_2 \end{aligned}$$

bilden eine Basis des Lösungsraumes von $y' = Ay$.
2.Fall: $\delta = 0$: Hier ist also

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - q)^2$$

mit nur einem einzigen Eigenwert, nämlich q. Es ist

$$A - qI = \begin{pmatrix} -q & 1 \\ -q^2 & 2q - q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q & 1 \\ -q^2 & q \end{pmatrix}$$

eine Matrix vom Rang 1. Damit ist hier auch ihr Kern eindimensional. Es gibt also genau einen eindimensionalen Eigenraum, sodaß notwendig ein Hauptvektor existiert.
Wir erhalten
einen Eigenvektor $g_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}$ als Lösung von $\begin{pmatrix} -q & 1 \\ -q^2 & q \end{pmatrix} x = 0$, und
einen Hauptvektor $g_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ als Lösung von $\begin{pmatrix} -q & 1 \\ -q^2 & q \end{pmatrix} x = g_1$, und mit

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix}, G^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -q & 1 \end{pmatrix}$$

ist

$$J := G^{-1}AG = \begin{pmatrix} q & 1 \\ 0 & q \end{pmatrix}$$

die Jordanform.
Zum Differentialgleichungssystem $z' = Jz$ haben wir dann als Lösungen die Spalten von

$$C(t) := e^{qt} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Für unsere ursprüngliche Gleichung

$$y' = Ay$$

erhalten wir daraus wegen $y = Gz$ als Lösungen die Spalten von

$$Y(t) := e^{qt} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ q & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = e^{qt} \begin{pmatrix} 1 & t \\ q & qt + 1 \end{pmatrix},$$

also

$$y_1(t) = e^{qt} \begin{pmatrix} 1 \\ q \end{pmatrix}, \; y_2(t) = e^{qt} \begin{pmatrix} t \\ qt + 1 \end{pmatrix}.$$

Prüfen Sie selbst nach, daß dies Lösungen sind und übersetzen Sie sie in Lösungen der ursprünglichen Gleichung 2-ter Ordnung.