H Homomorphismen

Wir hatten gesehen, daß eine $n \times m$ Matrix A über $K^m \ni x \mapsto f(x) := Ax \in K^n$ eine Abbildung definiert, für die für alle $x, y \in K^m, \alpha \in K$ gilt:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$
$$f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x).$$

Diese Formeln greifen nur auf Operationen zurück, die in jedem Vektorraum erklärt sind.

Definition H.1 (Homomorphismus, lineare Abbildung) *U, V seien Vektorräume über demselben Körper K. Eine Abbildung $f : U \to V$ heißt "linear" oder ein "Homomorphismus", wenn für alle $x, y \in U$, alle $\alpha \in K$ gilt:*

H1: $f(x+y) = f(x) + f(y)$

H2: $f(\alpha \cdot x) = \alpha \cdot f(x)$.

Die Menge aller Homomorphismen von U nach V bezeichnen wir mit $\mathrm{Hom}(U, V)$. Stimmen die beiden Räume überein, ist also $U = V$, so reden wir von einem "Endomorphismus".

Bemerkung H.2 *Statt $\mathrm{Hom}(U, V)$ ist auch $\mathrm{L}(U, V)$ gebräuchlich - L von linear -, für $\mathrm{Hom}(U, U)$ schreiben wir kurz $\mathrm{Hom}(U)$, für $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ auch $U \xrightarrow{f} V$.*

Jede $n \times m$ Matrix A liefert also einen Homomorphismus $f_A : K^m \to K^n$ über $x \mapsto f_A(x) := Ax$. Für ihn ist $f_A(e_j) = Ae_j = a_{.j}$. Sie wissen ja,

die Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren,

und da wir die Matrix A kennen, wenn wir ihre Spalten kennen, bedeutet dies, daß der ganze Homomorphismus f_A bestimmt ist durch seine Bilder auf der Basis aus den kanonischen Einheitsvektoren. Dies werden wir gleich als allgemeine Eigenschaft von Homomorphismen erkennen. Zunächst noch zwei Rechenregeln:

Satz H.3 *Es sei $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Dann ist*

(i) $f(0) = 0$ *und*

(ii) für jede Linearkombination $x = \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j \in U$ ist $f(x) = \sum_{j=1}^m \alpha_j f(x_j)$.

Beweis: Zu i) Es sei $x \in U$ beliebig. Dann ist $f(0) = f(0 \cdot x) \overset{H2}{=} 0 \cdot f(x) = 0$.

Zu ii) Wir führen eine Induktion über die Anzahl m der Summanden.

$m = 1 : x = \alpha_1 x_1$ liefert mit H2: $f(x) = f(\alpha_1 x_1) = \alpha_1 f(x_1)$.

$m - 1 \Rightarrow m$: Es ist

$$x = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j x_j = \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j x_j + \alpha_m x_m.$$

Damit ist

$$f(x) = f\left((\sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j x_j) + \alpha_m x_m \right) \overset{H1}{=} f(\sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j x_j) + f(\alpha_m x_m)$$
$$\overset{H2,Ind}{=} \sum_{j=1}^{m-1} \alpha_j f(x_j) + \alpha_m f(x_m) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j f(x_j).$$

$\square$

1

Diese Rechenregel ist nun auch substantiell für Homomorphismen.

Satz H.4 *Sind U, V Vektorräume über demselben Körper, $(u_1, ..., u_m)$ eine Basis in U, und ist $(y_1, ..., y_m)$ eine beliebige Familie in V, so gibt es genau einen Homomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ mit*

$$f(u_j) = y_j \quad (j = 1, 2, ..., m).$$

Für ihn gilt

$$x = \sum_{j=1}^{m} \xi_j u_j \mapsto f(x) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j y_j.$$

Dies besagt:

Ein Homomorphismus ist durch seine Werte auf einer Basis eindeutig bestimmt. Diese können beliebig vorgegeben werden.

Beweis: Da $(u_1, ..., u_m)$ Basis von U ist, besitzt jedes $x \in U$ eine eindeutig bestimmte Darstellung als $x = \sum_{j=1}^{m} \xi_j u_j$. Damit ist durch

$$x \mapsto f(x) := \sum_{j=1}^{m} \xi_j y_j$$

eine Abbildung $f : U \to V$ definiert, für die trivialerweise $f(u_j) = y_j$ gilt, und die überdies, wie Sie leicht nachrechnen können, die Forderungen H1 und H2 erfüllt. Somit ist diese Abbildung f ein Homomorphismus. Ist nun $g \in \mathrm{Hom}(U, V)$ irgend ein Homomorphismus, mit $g(u_j) = y_j \quad (j = 1, 2, ..., m)$, so gilt mit Satz H.3

$$g(x) = g(\sum_{j=1}^{m} \xi_j u_j) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j g(u_j) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j y_j = f(x),$$

sodaß also $g = f$. Der Homomorphismus ist also eindeutig bestimmt. □

Bemerkung H.5 *Dies gilt auch für unendlich-dimensionale Räume.*

Betrachten wir nun zunächst einen Spezialfall: Es sei $U := K^m$, $V := K^n$, $(y_1, ..., y_m)$ eine beliebige Familie im K^n. Im K^m haben wir die Basis $(e_1, ..., e_m)$ aus den kanonischen Einheitsvektoren. Nach Satz H.4 gibt es also genau einen Homomorphismus $f : K^m \to K^n$, für den $f(e_j) = y_j \quad (j = 1, ..., m)$ gilt.

Da wir in den Räumen aus Spaltenvektoren arbeiten, können wir ihn auch noch anders darstellen: Für $x \in K^m$, bzw. $y_j \in K^n$ haben wir

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j, \; y_j = \begin{pmatrix} \eta_{1j} \\ \vdots \\ \eta_{nj} \end{pmatrix} \quad (j = 1, ..., m).$$

Damit ist $f(x) = f(\sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j f(e_j) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j y_j$.

Bilden wir nun die $n \times m$ Matrix

$$F = \begin{pmatrix} \eta_{11} & \cdots & \eta_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \eta_{n1} & \cdots & \eta_{nm} \end{pmatrix},$$

deren j-te Spalte also genau y_j ist $(j = 1, ..., m)$, so ist bekanntlich

$$\sum_{j=1}^{m} \xi_j y_j = F \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}.$$

Damit haben wir

Satz H.6 *(i) Jede $n \times m$ Matrix F definiert über $K^m \ni x \mapsto Fx \in K^n$ einen Homomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(K^m, K^n)$. Die Spalten von F sind die Bilder der kanonischen Einheitsvektoren unter f.*

(ii) Bilden wir zu $f \in \mathrm{Hom}(K^m, K^n)$ die $n \times m$ Matrix F, deren j-te Spalte gerade $y_j = f(e_j)$ ist $(j = 1, ..., m)$, so gilt für alle $x \in K^m : f(x) = Fx$.

Homomorphismen zwischen Räumen aus Spaltenvektoren können wir also, indem wir ihre Werte auf der Basis aus den kanonischen Einheitsvektoren betrachten, stets durch Matrizen darstellen. Wir werden später sehen, daß Ähnliches auch für Homomorphismen zwischen beliebigen Räumen möglich ist.

Zunächst studieren wir jedoch allgemeine Eigenschaften von Homomorphismen, die natürlich dann auch für die durch Matrizen gegebenen Homomorphismen gelten.

Satz H.7 *Es seien U, V, W Vektorräume (über demselben Körper), $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$. Dann gelten*

(i) Durch $\mathrm{id}_U : U \to U, u \mapsto \mathrm{id}_U(u) := u$ ist ein Homomorphismus $\in \mathrm{Hom}(U, U)$ gegeben, die sogenannte Identität in U.

(ii) Durch $g \circ f : u \mapsto g(f(u))$ ist ein Homomorphismus $g \circ f \in \mathrm{Hom}(U, W)$ erklärt. (Reihenfolge beachten!)

(iii) Ist $g \circ f$ surjektiv, so ist g surjektiv.

(iv) Ist $g \circ f$ injektiv, so ist f injektiv.

Beweis: (i): Wir haben für id_U die Eigenschaften H1 und H2 nachzuweisen:

$$\mathrm{id}_U(u_1 + u_2) = u_1 + u_2 = \mathrm{id}_U(u_1) + \mathrm{id}_U(u_2). \quad \mathrm{id}_U(\alpha \cdot u) = \alpha \cdot u = \alpha \cdot \mathrm{id}_U(u).$$

(ii): Wir haben für $g \circ f$ die Eigenschaften H1 und H2 nachzuweisen, die für f und g jeweils einzeln gelten:

$$\begin{aligned}(g \circ f)(u_1 + u_2) = g(f(u_1 + u_2)) &\overset{H1,f}{=} g(f(u_1) + f(u_2)) \\ &\overset{H1,g}{=} g(f(u_1)) + g(f(u_2)) = (g \circ f)(u_1) + (g \circ f)(u_2).\end{aligned}$$

$$(g \circ f)(\alpha u) = g(f(\alpha u)) \overset{H2,f}{=} g(\alpha f(u)) \overset{H2,g}{=} \alpha g(f(u)) = \alpha (g \circ f)(u).$$

(iii): Ist $g \circ f$ surjektiv, so gibt es zu jedem $w \in W$ ein $u \in U$, mit $w = (g \circ f)(u) = g(f(u))$. Mit $v := f(u)$ ist also $w = g(v)$ und da $w \in W$ beliebig war, ist somit g surjektiv.

(iv): Ist $g \circ f$ injektiv, so gilt: Ist $(g \circ f)(u) = (g \circ f)(u')$, so ist $u = u'$. Ist nun für $u, u' \in U$ schon $f(u) = f(u')$, so ist trivialerweise $(g \circ f)(u) = (g \circ f)(u')$ also wegen unserer Voraussetzung dann $u = u'$ und damit f injektiv. □

Für das Weitere benötigen wir noch ein paar Begriffe:

Definition H.8 (Kern, Bild) *Ist $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ so heißt*
$\ker f := \{u \in U \mid f(u) = 0\}$ *der "Nullraum" oder "Kern" von f,*
$\mathrm{im}\, f := \{f(u) \in V \mid u \in U\}$ *das "Bild" von f.*

Satz und Definition H.9 (Rang, Defekt) $\ker f$ *und* $\operatorname{im} f$ *sind Unterräume von* U *bzw.* V*. Man nennt die Dimension des Bildes den "Rang" von* f *:* $\operatorname{rg} f := \dim \operatorname{im} f$*, und die Dimension des Kernes den "Defekt" von* f *:* $\operatorname{def} f := \dim \ker f$*.*

Beweis: (der Unterraum-Aussagen:) Wegen $f(0) = 0$ ist $0 \in \ker f$ und $0 \in \operatorname{im} f$.

Sind $x, y \in \ker f, \alpha, \beta \in K$, so ist $f(\alpha x + \beta y) = \alpha f(x) + \beta f(y) = \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$, also $\alpha x + \beta y \in \ker f$. Somit ist $\ker f$ ein Unterraum.

Sind $v, w \in \operatorname{im} f$, so gibt es $x, y \in U$, sodaß $v = f(x), w = f(y)$. Dann gilt für beliebige Koeffizienten $\alpha, \beta \in K : \alpha v + \beta w = \alpha f(x) + \beta f(y) = f(\alpha x + \beta y) \in \operatorname{im} f$. Somit ist auch $\operatorname{im} f$ ein Unterraum. □

2

Satz H.10 *Es sei* $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$*. Dann gelten*

(i) f *injektiv* $\Leftrightarrow \ker f = (0)$.

(ii) f *surjektiv* $\Leftrightarrow \operatorname{im} f = V$.

(iii) f *bijektiv* $\Leftrightarrow (\ker f = (0)$ *und* $\operatorname{im} f = V)$.

Sei $(x_1, ..., x_m)$ *eine Familie in* U*. Dann gelten*

(iv) $(f(x_1), ..., f(x_m))$ *unabhängig (in* V*)* $\Rightarrow (x_1, ..., x_m)$ *unabhängig (in* U*).*

(v) $(x_1, ..., x_m)$ *unabhängig und* f *injektiv* $\Rightarrow (f(x_1), ..., f(x_m))$ *unabhängig.*

(vi) $(x_1, ..., x_m)$ *erzeugend für* $U \Rightarrow (f(x_1), ..., f(x_m))$ *erzeugend für* $\operatorname{im} f$*.*

(vii) $(x_1, ..., x_m)$ *erzeugend für* U *und* f *surjektiv* $\Rightarrow (f(x_1), ..., f(x_m))$ *erzeugend für* V*.*

Ist $(x_1, ..., x_m)$ *eine Basis von* U*, so gilt*

(viii) f *bijektiv* $\Leftrightarrow (f(x_1), ..., f(x_m))$ *ist Basis von* V*.*

Beweis:

(i) f injektiv liefert insbesondere, daß $f(x) = 0$ nur für $x = 0$ gelten kann. Ist $\ker f = (0)$ und $f(x) = f(y)$, so ist $f(y - x) = 0$, also $y - x \in \ker f$ und damit $y - x = 0$, also $x = y$.

(ii) Dies folgt trivial aus der Definition.

(iii) folgt direkt aus (i) und (ii).

(iv) Wir betrachten eine Linearkombination der x_j, die 0 ergibt: $0 = \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j$. Dann ist $0 = f(0) = f(\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_j f(x_j)$. Da die $f(x_j)$ unabhängig sind, müssen notwendig alle Koeffizienten $\alpha_j = 0$ sein. Wir haben also gezeigt: Aus $\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j = 0$ folgt $\alpha_1 = ... = \alpha_m = 0$, d.h. die $(x_1, ..., x_m)$ sind unabhängig.

(v) Sei $0 = \sum_{j=1}^m \alpha_j f(x_j)$. Dann ist auch $0 = f(\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j)$, d.h. $\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j \in \ker f = (0)$. Also ist $\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j = 0$ und, da die x_j unabhängig sind, sind also alle $\alpha_j = 0$. Somit sind also mit dem selben Schluß wie eben nun die $f(x_j)$ unabhängig.

(vi) Sei $y \in \operatorname{im} f$. Dann gibt es ein $x \in U$, mit dem $y = f(x)$. Da $(x_1, ..., x_m)$ erzeugend für U ist, kann man x darstellen als $x = \sum_{j=1}^m \alpha_j x_j$. Dann ist $y = f(x) = f(\sum_{j=1}^m \alpha_j x_j) = \sum_{j=1}^m \alpha_j f(x_j)$, d.h. $(f(x_1), ..., f(x_m))$ erzeugt $\operatorname{im} f$.

(vii) Dies ist wegen (ii) und (vi) trivial.

(viii) Als Basis ist $(x_1, ..., x_m)$ unabhängig und erzeugend.

$\Rightarrow$: Ist f bijektiv, so injektiv und surjektiv. Also ist $(f(x_1), ..., f(x_m))$ nach (v) unabhängig und nach (vii) erzeugend für V, also Basis von V.

$\Leftarrow$: Ist $(f(x_1), ..., f(x_m))$ Basis von V, so gibt es nach Satz H.4 einen Homomorphismus $g \in \mathrm{Hom}(V, U)$, der $g : f(x_j) \mapsto x_j \quad (j = 1, 2, ..., m)$ bewirkt. Für ihn ist dann $g \circ f = \mathrm{id}_U$; denn es gilt dann für alle j

$$x_j \overset{f}{\mapsto} f(x_j) \overset{g}{\mapsto} g(f(x_j)) = x_j$$

und da $(x_1, ..., x_m)$ eine Basis ist und trivialerweise auch für alle j ja $\mathrm{id}_U(x_j) = x_j$ gilt, muß $g \circ f = \mathrm{id}_U$ sein.

Ferner ist $f \circ g = \mathrm{id}_V$; denn es ist wieder für alle j

$$f(x_j) \overset{g}{\mapsto} g(f(x_j)) = x_j \overset{f}{\mapsto} f(x_j)$$

und da $(f(x_1), ..., f(x_m))$ eine Basis und ebenfalls stets $\mathrm{id}_V(f(x_j)) = f(x_j)$ ist, folgt $f \circ g = \mathrm{id}_V$.

Da id_U und id_V jeweils injektiv und surjektiv sind, müssen also nach Satz H.7 beide Abbildungen f und g jeweils injektiv und surjektiv, d.h. bijektiv sein. □

Der zuletzt betrachtete Sachverhalt wird uns häufig begegnen. Wir geben ihm deshalb einen eigenen Begriff:

Definition H.11 (Isomorphismus) *Gibt es zu $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ ein $g \in \mathrm{Hom}(V, U)$, sodaß*

$$g \circ f = \mathrm{id}_U, \ f \circ g = \mathrm{id}_V,$$

so heißt f (und g) ein "Isomorphismus".

Gibt es einen Isomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ zwischen den Räumen U und V, so heißen diese Räume "isomorph".

Einige wichtige Eigenschaften von Isomorphismen seien nochmals notiert:

Satz H.12 *Für $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ sind äquivalent:*

(i) f ist Isomorphismus.

(ii) f ist bijektiv.

(iii) $\ker f = (0)$ und $\mathrm{im}\, f = V$.

(iv) f bildet jede Basis von U in eine Basis von V ab.

(v) f bildet eine Basis von U in eine Basis von V ab.

Beweis: (i) $\Rightarrow$ (ii): Das war der letze Schritt im Beweis von Satz H.10,(viii).
(ii) $\Leftrightarrow$ (iii): Satz H.10,(iii).
(ii) $\Rightarrow$ (iv): Satz H.10,(viii).
(iv) $\Rightarrow$ (v): Trivial.
(v) $\Rightarrow$ (i): Siehe Beweis von Satz H.10,(viii). □

Der Beweis von Satz H.10,(viii) hat zudem miterbracht, daß der in der Definition eines Isomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ auftretende Homomorphismus $g \in \mathrm{Hom}(V, U)$ selbst ein Isomorphismus ist. Er wird mit $g = f^{-1}$. bezeichnet.

Satz H.13 *(i) Zwei endlich-dimensionale Vektorräume (über demselben Körper) sind genau dann isomorph, wenn sie dieselbe Dimension haben.*

(ii) Jeder $m-$dimensionale K-Vektorraum U ist isomorph zum K^m.

Bemerkung H.14 *Die Aussage von (i) gilt auch für nicht endlich-dimensionale Räume, wenn wir dafür den Dimensionsbegriff sorgfältiger definieren, als wir es getan haben.*

Beweis: (i): Sind U und V isomorph, so gibt es also einen Isomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ und der bildet eine beliebig gewählte Basis $(x_1, ..., x_m)$ von U ab in $(f(x_1), ..., f(x_m))$, wobei dies nach Satz H.12 wieder eine Basis, nun von V ist. Damit gibt es in U und V Basen von gleicher Länge, d.h. die Dimensionen sind gleich.

Haben beide Räume dieselbe Dimension, so können wir (gleichlange!) Basen $(u_1, ..., u_m)$ in U und $(v_1, ..., v_m)$ in V wählen und nach Satz H.4 den Homomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ konstruieren, der für alle j gerade $f(u_j) = v_j$ liefert. Nach Satz H.12 ist f ein Isomorphismus.

(ii): Da der K^m die Dimension m hat, folgt dies direkt aus (i). □

Isomorphe Räume haben die Eigenschaft, daß wir sie, soferne wir nur auf ihre lineare Struktur schauen, nicht unterscheiden können. Solange wir also nur solche Eigenschaften betrachten, können wir stets zu einem isomorphen Raum übergehen, und da sind im allgemeinen, wenn es um das konkrete Rechnen geht, die Räume K^m besonders geeignet. Wir werden dies noch ausnützen.

Ist $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ ein Isomorphismus, so ist $\dim U = \dim V$, ferner ist dann $\operatorname{def} f = \dim \ker f = \dim(0) = 0$ und $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{im} f = \dim V$. Somit gilt die Formel

$$\operatorname{def} f + \operatorname{rg} f = \dim U.$$

Diese Formel gilt nun sogar allgemein für Homomorphismen.

Satz H.15 *Für jeden Homomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ ist*

$$\operatorname{def} f + \operatorname{rg} f = \dim U.$$

Beweis: Wir wählen eine Basis $(u_1, ..., u_s)$ von $\ker f \subset U$ – dann ist $s = \operatorname{def} f$ – und ergänzen sie zu einer Basis $(u_1, ..., u_s, u_{s+1}, ..., u_m)$ von ganz U. Dann ist nach Satz H.10 die Familie $(f(u_1), ..., f(u_m))$ erzeugend für $\operatorname{im} f$. Nach Konstruktion ist aber $f(u_1) = ... = f(u_s) = 0$, sodaß schon $(f(u_{s+1}), ..., f(u_m))$ erzeugend für $\operatorname{im} f$ ist. Sei nun $\sum_{j=s+1}^m \alpha_j f(u_j) = 0$. Dann ist also $0 = f\left(\sum_{j=s+1}^m \alpha_j u_j\right)$, d.h. es ist $\sum_{j=s+1}^m \alpha_j u_j \in \ker f$. Da $(u_1, ..., u_s)$ eine Basis von $\ker f$ war, ist mit gewissen Koeffizienten β_j also $\sum_{j=s+1}^m \alpha_j u_j = \sum_{j=1}^s \beta_j u_j$. Nun sind aber $(u_1, ..., u_m)$ als Basis unabhängig, sodaß notwendig alle Koeffizienten α_j und β_j verschwinden müssen. Insbesondere ist also notwendig $\alpha_{s+1} = ... = \alpha_m = 0$. Folglich sind also die $(f(u_{s+1}), ..., f(u_m))$ auch unabhängig und somit eine Basis für $\operatorname{im} f$.

Also ist $\operatorname{rg} f = \dim \operatorname{im} f = m - s$ oder $\dim U = m = s + \operatorname{rg} f = \operatorname{def} f + \operatorname{rg} f$, was behauptet war. □

Damit haben wir eine neue Charakterisierung von Isomorphismen gewonnen:

Satz H.16 *Es seien U, V Räume derselben Dimension,* $\dim U = \dim V = m$, *und* $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$. *Dann sind äquivalent:*

(i) f ist Isomorphismus.

(ii) f ist injektiv.

(iii) f ist surjektiv.

Beweis: Aus (i) folgen trivialerweise (ii) und (iii). Zum Beweis, daß *bei gleichen Dimensionen* von U und V schon jeweils eine der Eigenschaften injektiv oder surjektiv die andere impliziert, benutzen wir die eben gezeigte Dimensionsformel:

$$\dim\ker f + \dim\operatorname{im} f = \dim U = \dim V.$$

Ist f injektiv, so ist $\ker f = (0)$, also $\dim\ker f = 0$, folglich $\dim\operatorname{im} f = \dim V$ und damit f surjektiv.

Ist f surjektiv, so ist $\operatorname{im} f = V$, also $\dim\operatorname{im} f = \dim V = \dim U$ und somit $\dim\ker f = 0$, also $\ker f = (0)$ und folglich f injektiv. □

Wenden wir nun diese Überlegungen auf Homomorphismen $f \in \operatorname{Hom}(K^m, K^n)$, etc. an, die also nach Satz H.6 durch Matrizen

$$F \in K^{n\times m} : \; x \mapsto Fx$$

gegeben werden. Zunächst übertragen wir die Begriffe Kern, Bild,... auf Matrizen.

Definition H.17 *Es sei $F \in K^{n\times m}$, d.h. eine $n \times m$-Matrix. Dann ist*

$$\begin{aligned} \ker F &:= \{x \in K^m \mid Fx = 0\} \text{ der Kern von } F, \\ \operatorname{im} F &:= \{Fx \in K^n \mid x \in K^m\} \text{ das Bild von } F, \\ \operatorname{def} F &:= \dim\ker F \text{ der Defekt von } F \text{ und} \\ \operatorname{rg} F &:= \dim\operatorname{im} F \text{ der Rang von } F. \end{aligned}$$

Diese Definitionen stimmen mit den früher für Homomorphismen gegebenen Definitionen überein, wenn wir zu dem durch $x \mapsto Fx$ gegebenen Homomorphismus $f \in \operatorname{Hom}(K^m, K^n)$ übergehen. Über den (hoffentlich inzwischen wohlbekannten) Satz :

die Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren,

erhalten wir folgende Charakterisierung des Ranges einer Matrix:

Definition und Satz H.18 *Besitzt die Matrix $F \in K^{n\times m}$ ein System aus r unabhängigen Spalten, aber keines aus $r + 1$, so ist $r = \operatorname{rg} F$. Man sagt dafür kurz:*

der Rang $\operatorname{rg} F$ einer Matrix ist die Maximalzahl unabhängiger Spalten

und nennt den Rang deshalb auch den "Spaltenrang".

Beweis: Nach Satz H.10 ist $(Fe_1, ..., Fe_m)$ erzeugend für $\operatorname{im} F$ und somit darin ein maximales unabhängiges System schon eine Basis für $\operatorname{im} F$. □

Die Dimensionsformel (Satz H.15) wird zu

Satz H.19 *Für $F \in K^{n\times m}$ ist*

$$\operatorname{def} F + \operatorname{rg} F = m \; (= \text{ Zahl der Spalten von } F.)$$

Insbesondere ist damit

$$\begin{aligned} \operatorname{def} F = \dim\ker F &= m - \operatorname{rg} F \\ &= (\text{Anzahl aller Spalten}) - (\text{Maximalzahl unabhängiger Spalten}). \end{aligned}$$

Ferner erhalten wir

Satz H.20 *(i) Ist $F \in K^{n\times m}$, $G \in K^{\ell\times n}$, $H := GF \in K^{\ell\times m}$, und sind f, g, h die ihnen über $f(x) := Fx$, etc. zugeordneten Homomorphismen $f \in \mathrm{Hom}(K^m, K^n)$, $g \in \mathrm{Hom}(K^n, K^\ell)$, $h \in \mathrm{Hom}(K^m, K^\ell)$, so ist $h = g \circ f$.*

(ii) Ist $F \in K^{n\times n}$, also eine quadratische Matrix, f der zugehörige Homomorphismus $\in \mathrm{Hom}(K^n, K^n)$, so sind äquivalent:

(a) f ist Isomorphismus.

(b) F ist invertierbar.

(c) $\mathrm{rg}\, F = n$.

(d) Die Spalten von F erzeugen den K^n.

(e) Die Spalten von F sind Basis des K^n.

Beweis: (i): Für jedes x ist

$$h(x) = Hx = GFx = Gf(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x).$$

(ii): Man prüft leicht nach, daß die Identität im K^n durch die $n \times n$ Einheitsmatrix I_n beschrieben wird. Damit folgen:

(a) $\Leftrightarrow$ (b): Ist f ein Isomorphismus, so existiert ein $g \in \mathrm{Hom}(K^n, K^n)$ mit $g \circ f = f \circ g = \mathrm{id}_{K^n}$. Sei G die zugehörige Matrix, dann ist nach (i): $FG = GF = I_n$ und somit F invertierbar.

Ist andrerseits F invertierbar, so setzte $G := F^{-1}, g : x \mapsto Gx \in \mathrm{Hom}(K^n, K^n)$. Dafür rechnet man leicht nach, daß $g \circ f = f \circ g = \mathrm{id}_{K^n}$, also f ein Isomorphismus.

(a) $\Rightarrow$ (c),(d),(e): Ist f Isomorphismus, so ist nach Satz H.12 $(f(e_1), ..., f(e_n))$ Basis. Dies sind aber genau die Spalten von F. Dies gibt (e). Als Basis sind sie unabhängig und erzeugend, was (c) und (d) liefert.

Derselbe Zusammenhang zwischen den Spalten von F und den Werten von f auf der kanonischen Basis $(e_1, ..., e_n)$ liefert

bei (e): f bildet eine Basis in eine Basis ab und ist somit Isomorphismus,

bei (d): f ist surjektiv, somit Isomorphismus (Satz H.16 und gleiche Dimensionen!),

bei (c): $\mathrm{rg}\, f = n \Rightarrow \mathrm{def}\, f = 0$ (nach Satz H.15) $\Rightarrow f$ injektiv (nach Satz H.10) $\Rightarrow f$ Isomorphismus (nach Satz H.16), womit in allen Fällen (a) folgt. □

Im Kapitel über Matrizen hatten wir die GAUSS-JORDAN-Elimination behandelt und dabei insbesondere die Invertierbarkeit von Matrizen untersucht. Wir hatten gesehen:

Geht eine $n \times n$ Matrix A durch GAUSS-JORDAN*-Elimination über in die Matrix $CA = \hat{A}$ und ist dies die $n \times n$ Einheitsmatrix I_n, so ist A invertierbar und C die Inverse.*

Ungeklärt war die Frage nach der Invertierbarkeit von A, wenn $\hat{A} \neq I_n$ ist. Dies können wir nun beantworten.

Nach Satz M.7 gilt: Sind A und C invertierbare Matrizen, so ist auch CA invertierbar. GAUSS-JORDAN-Elimination überführt A in $\hat{A} = CA$, wobei C invertierbar ist. Ist also $\hat{A}$ nicht invertierbar, so kann A selbst auch nicht invertierbar sein. Nun betrachten wir die GAUSS-JORDAN-Form $\hat{A}$ einer $n \times n$ Matrix A. (Siehe Definition M.10).

Fall 1: $\hat{A}$ enthält n Pivotspalten: Dann ist notwendig $\hat{A} = I_n$ und wir wisen, daß in diesem Fall A invertierbar ist.

Fall 2: $\hat{A}$ enthält $r < n$ Pivotspalten: Dann enthalten die Zeilen von $\hat{A}$ mit Nummern $r + 1, ..., n$ nur Nullen, d.h. die Spalten von $\hat{A}$ erzeugen nicht den ganzen K^n. Nach Satz H.20 ist dann $\hat{A}$ nicht invertierbar, also auch A selbst nicht.

Wir fassen dies zusammen zum

Satz H.21 *Es sei A eine $n \times n$ Matrix, $(\hat{A}|C)$ die* GAUSS-JORDAN-*Transformierte der Matrix $(A|I_n)$. Dann gilt folgende Alternative:*
Entweder ist $\hat{A} = I_n$: Dann ist A invertierbar und $C = A^{-1}$.
Oder es ist $\hat{A} \neq I_n$: Dann ist A nicht invertierbar.

$\boxed{3}$

GAUSS-JORDAN-Elimination hatten wir auch im Zusammenhang mit linearen Gleichungssystemen behandelt. Dies greifen wir nun auf der Ebene der Homomorphismen wieder auf.

Satz H.22 *Es seien U, V Vektorräume (über demselben Körper), $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Wir bezeichnen zu $v \in V$ mit*

$$L(f; v) := \{u \in U \mid f(u) = v\},$$

also die Menge aller Lösungen der Gleichung $L(u) = v$.
Dafür gelten

(i) $(L(f; v) \neq \emptyset) \Leftrightarrow (v \in \mathrm{im}\, f)$

(ii) Ist $v \in \mathrm{im}\, f$ und $u_0 \in L(f; v)$, so ist

$$L(f, v) = u_0 + \ker f, \text{ d.h. } L(f, v) = \{u \in U \mid u = u_0 + u' \text{ mit } u' \in \ker f\}.$$

Bemerkung H.23 *Man nennt für $v \neq 0$ die Gleichung $f(u) = v$ eine "inhomogene" Gleichung und $f(u) = 0$ die zugehörige "homogene" Gleichung. Die Lösungen der homogenen Gleichung bilden definitionsgemäß genau den Kern von f, also den Unterraum $\ker f \subset U$. Mit diesen Bezeichnungen sagt unser Satz:*

(i) $f(u) = v$ besitzt (mindestens) eine Lösung genau, wenn $v \in \mathrm{im}\, f$.

(ii) Ist $f(u) = v$ lösbar und u_0 irgendeine Lösung der inhomogenen Gleichung, so erhält man alle Lösungen von $f(u) = v$, indem man zu allen Lösungen der homogenen Gleichung jeweils diese spezielle Lösung u_0 addiert.

Beweis: (i) ist nach der Definition von $\mathrm{im}\, f$ klar.
(ii): Ist $u_0 \in L(f, v)$ und $u' \in \ker f$, so ist $f(u_0 + u') = f(u_0) + f(u') = v + 0 = v$, sodaß also $u_0 + \ker f \subset L(f, v)$.
Sind umgekehrt u und u_0 beide in $L(f, v)$, so ist $0 = v - v = f(u) - f(u_0) = f(u - u_0)$, d.h. $u - u_0 \in \ker f$. Damit ist $u = u_0 + (u - u_0) \in u_0 + \ker f$, also $L(f, v) \subset u_0 + \ker f$. □

Der Kern $\ker f$ ist nach Satz H.15 ein Unterraum von U mit der Dimension $s := \mathrm{def}\, f = \dim U - \mathrm{rg}\, f$. Wir sagen dafür (etwas unpräzise) auch:

Die Gleichung $f(u) = v$ besitzt $s = \mathrm{def}\, f = \dim U - \mathrm{rg}\, f$ unabhängige Lösungen.

Satz H.24 (Lösungen linearer Gleichungen) *Es seien U, V endlich-dimensionale lineare Räume, $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Dann gelten*

(i) $f(u) = v$ ist lösbar, genau wenn $v \in \mathrm{im}\, f$. Ist $f(u) = v$ lösbar, so gibt es $\dim U - \mathrm{rg}\, f$ viele unabhängige Lösungen.

Insbesondere haben wir die folgenden Spezialfälle:

(ii) $f(u) = v$ ist für jedes $v \in V$ lösbar, genau wenn $\mathrm{rg}\, f = \dim V$.

(iii) $f(u) = v$ besitzt (wenn überhaupt) stets nur eine Lösung, genau wenn $\mathrm{rg}\, f = \dim U$.

(iv) $f(u) = v$ *ist für jedes* $v \in V$ *eindeutig lösbar, genau wenn* $\operatorname{rg} f = \dim U = \dim V$*, also genau wenn* f *ein Isomorphismus ist.*

Beweis: (i) ist die Aussage von Satz H.22.

(ii) $f(u) = v$ ist genau dann für jedes $v \in V$ lösbar, wenn $\operatorname{im} f = V$, also $\operatorname{rg} f = \dim V$.

(iii) Sei $f(u) = v$ lösbar. Dann ist die Lösung eindeutig, genau wenn $\ker f = (0)$, d.h. $\dim U - \operatorname{rg} f = 0$.

(iv) ist eine Zusammenfassung von (ii) und (iii) und Satz H.12. □

Dies gilt natürlich insbesondere für die durch $n \times m$ Matrizen $F \in K^{n\times m}$ gegebenen Homomorphismen $f \in \operatorname{Hom}(K^m, K^n) : f(x) = Fx$. Hier ist $\dim U = m =$ die Spaltenzahl, $\dim V = n =$ die Zeilenzahl und $\operatorname{rg} f = \operatorname{rg} F =$ der Spaltenrang von F. Wir formulieren Satz H.24 für diesen Fall nochmal neu als

Satz H.25 *Es sei* $F \in K^{n\times m}$ *eine* $n \times m$ *Matrix. Dann gelten*

(i) Das Gleichungssystem $Fx = y$ *ist lösbar* $\Leftrightarrow y \in \operatorname{im} F \Leftrightarrow \operatorname{rg} F = \operatorname{rg}(F|y)$.
Dabei ist $(F|y)$ *die um die Spalte* y *verlängerte Matrix. (Vergleiche Kapitel M).*
Ist $Fx = y$ *lösbar, so gibt es* $\operatorname{def} F = m - \operatorname{rg} F =$ *(Spaltenzahl - Maximalzahl unabhängiger Spalten) viele unabhängige Lösungen.*

Wir haben wieder folgende Spezialfälle:

(ii) $Fx = y$ *ist für jedes* $y \in K^n$ *lösbar* $\Leftrightarrow \operatorname{rg} F = n \Leftrightarrow$ *Die Spalten von* F *erzeugen den* K^n.

(iii) $Fx = y$ *ist, wenn überhaupt, dann jeweils eindeutig lösbar* $\Leftrightarrow \operatorname{rg} F = m \Leftrightarrow$ *Die Spalten von* F *sind unabhängig.*

(iv) $Fx = y$ *ist für jedes* $y \in K^n$ *eindeutig lösbar* $\Leftrightarrow n = m = \operatorname{rg} F \Leftrightarrow F$ *invertierbar.*

Beweis: Wir haben nur wenig zusätzlich zu zeigen.

Zu (i): Die Spalten von F erzeugen $\operatorname{im} F$. Somit folgt

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{im} F &\Leftrightarrow y \in \operatorname{span}(Fe_1, ..., Fe_m) \\ &\Leftrightarrow \dim \operatorname{span}(Fe_1, ..., Fe_m) = \dim \operatorname{span}(Fe_1, ..., Fe_m, y), \end{aligned}$$

d.h. $\operatorname{rg} F = \operatorname{rg}(F|y)$.

Für die Defektformel siehe Satz H.19.

Zu (ii): Es ist $\operatorname{rg} F = \dim K^n = n \Leftrightarrow \operatorname{span}(Fe_1, ..., Fe_m) = K^n$.

Zu (iii): Es ist $\operatorname{rg} F = m \Leftrightarrow F$ besitzt m unabhängige Spalten (und das sind ja alle Spalten von F!).

Zu (iv): Siehe Satz H.20 □

Im Kapitel über Matrizen hatten wir gesehen, daß GAUSS-JORDAN-Elimination die Lösungsmenge nicht verändert. Nehmen wir also an, wir hätten das System $Fx = y$ auf $\hat{A}x = b$ transformiert, wobei $\hat{A}$ in GAUSS-JORDAN-Form (siehe Definition M.10.) Dann bedeuten die Aussagen von Satz H.25:

Satz H.26 *(i)* $\hat{A}x = b$ *ist lösbar* $\Leftrightarrow$ *die zu den "Nullzeilen" von* $\hat{A}$ *gehörenden Komponenten von* b *sind selbst* $= 0$.
Ist das System lösbar, so hat es soviel unabhängige Losungen, wie $\hat{A}$ *an "Nicht-Pivot-Spalten" enthält.*

(ii) $\hat{A}x = b$ *ist für jedes* b *lösbar* $\Leftrightarrow \hat{A}$ *enthält keine Nullzeile.*

(iii) $\hat{A}x = b$ *ist wenn überhaupt, dann jeweils eindeutig lösbar* $\Leftrightarrow \hat{A}$ *enthält nur Pivot-Spalten*

(iv) $\hat{A}x = b$ ist für jedes b eindeutig lösbar $\Leftrightarrow$ $\hat{A} = I_n = (n \times n)$-Einheitsmatrix.

4

Es bleibt noch die Frage zu untersuchen, wie man Gleichungen behandelt, die durch Homomorphoismen zwischen beliebigen Räumen gegeben sind. Hier werden sich Zusammenhänge mit der im Vorkapitel behandelten Frage ergeben, wie sich die Komponenten eines Vektors im $\mathbb{R}^2$ ändern, wenn wir die Basis drehen. Unser Haupthilfsmittel werden die am Anfang dieses Kapitels gemachten Aussagen über die Isomorphoie von Vektorräumen sein.

Definition und Satz H.27 (Kanonischer Isomorphismus) *Es sei U ein m-dimensionaler Vektorraum, $B := (u_1, ..., u_m)$ eine Basis von U. Dann gibt es genau einen Isomorphismus $\varphi_B : U \to K^m$ mit $\varphi_B(u_j) = e_j$, $(j = 1, ..., m)$. φ_B heißt der "kanonische Isomorphismus" bezüglich der Basis B. Für ihn gilt:*

Ist $u = \sum_{j=1}^m \xi_j u_j$, so ist $\varphi_B(u) = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$.

Beweis: Siehe Satz H.4 und Satz H.12. □

Nun betrachten wir folgende Situation: U, V seien zwei m- bzw. n-dimensionale Räume, darin $B_U := (u_1, ..., u_m)$ bzw. $B_V := (v_1, ..., v_n)$ beliebig aber fest gewählte Basen. Dann haben wir die beiden kanonischen Isomorphismen

$$\varphi_{B_U} : U \to K^m, \ \varphi_{B_V} : V \to K^n.$$

Zu einem Homomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ können wir bilden

$$f' \in \mathrm{Hom}(K^m, K^n) : \ f' := \varphi_{B_V} \circ f \circ \varphi_{B_U}^{-1}.$$

$$\begin{array}{ccccc} & U & \xrightarrow{f} & V & \\ \varphi_{B_U}^{-1} & \uparrow & & \downarrow & \varphi_{B_V} \\ & K^m & \xrightarrow{f'} & K^n & \end{array}$$

Dieser Homomorphismus f' wird durch eine Matrix F beschrieben, deren Spalten gerade die Bilder der kanonischen Einheitsvektoren e_j unter der Abbildung durch f' sind.

Was ist $f'(e_j)$? Wir zerlegen $f' : K^m \to K^n$ in die Teilabbildungen

$$K^m \xrightarrow{\varphi_{B_U}^{-1}} U \xrightarrow{f} V \xrightarrow{\varphi_{B_V}} K^n.$$

Was geschieht mit e_j? Wegen $\varphi_{B_U}(u_j) = e_j$ (das ist die Definition von φ!), ist $\varphi_{B_U}^{-1}(e_j) = u_j$. Damit haben wir

$$e_j \overset{\varphi_{B_U}^{-1}}{\longmapsto} u_j \overset{f}{\longmapsto} f(u_j) = \sum_{i=1}^n \eta_{ij} v_i \overset{\varphi_{B_V}}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \eta_{1j} \\ \vdots \\ \eta_{nj} \end{pmatrix} = f'(e_j),$$

wobei die η_{ij} die Koeffizienten von $f(u_j)$ bei der Darstellung durch die in V gegebene Basis $B_V = (v_1, ..., v_n)$ sind.

Definition H.28 (Matrix-Darstellung) *Es seien U, V Vektorräume mit Basen $B_U = (u_1, ..., u_m)$, $B_V = (v_1, ..., v_n)$ und $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Durch den eben beschriebenen Prozess wird f eine $n \times m$ Matzrix F zugeordnet, deren j-te Spalte die Koeffizienten η_{ij} aus $f(u_j) = \sum_{i=1}^n \eta_{ij} v_i$ enthält. Diese Matrix F heißt "Matrix-Darstellung" von f bezüglich der Basen B_U und B_V.*

Warnung!! *Ohne Angabe der Basen hat es keinen Sinn von einer Matrix-Darstellung eines Homomorphismus zu reden.*

Satz H.29 *Sind U, V, W Räume mit Basen $B_U = (u_1, ..., u_m)$, $B_V = (v_1, ..., v_n)$, $B_W = (w_1, ..., w_\ell)$, ferner $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $g \in \mathrm{Hom}(V, W)$, $h := g \circ f \in \mathrm{Hom}(U, W)$, und sind weiter F die Matrixdarstellung von f bezüglich B_U, B_V, G die Matrixdarstellung von g bezüglich B_V, B_W und H die Matrixdarstellung von h bezüglich B_U, B_W, dann ist $H = GF$.*

Beweis: Es ist $F \in K^{n \times m}$, $G \in K^{\ell \times n}$, somit das Matrixprodukt GF definiert. Ferner haben wir mit den kanonischen Isomorphismen bezüglich der gegebenen Basen:

$$f' = \varphi_{B_V} \circ f \circ \varphi_{B_U}^{-1}, g' = \varphi_{B_W} \circ g \circ \varphi_{B_V}^{-1} \text{ und } h' = \varphi_{B_W} \circ h \circ \varphi_{B_U}^{-1},$$

wobei gilt

$$f'(x) = Fx,\ g'(y) = Gy,\ h'(x) = Hx.$$

Ferner gilt für

$$\tilde{h} := g' \circ f' : \tilde{h}(x) = GFx.$$

Nun ist aber

$$\tilde{h} = g' \circ f' = \varphi_{B_W} \circ g \circ \varphi_{B_V}^{-1} \circ \varphi_{B_V} \circ f \circ \varphi_{B_U}^{-1} = \varphi_{B_W} \circ g \circ f \circ \varphi_{B_U}^{-1} = h'.$$

Somit ist für alle $x \in U$:

$$GFx = \tilde{h}(x) = h'(x) = Hx, \text{ d.h. } Gf = H.$$

□

In der Situation von Satz H.29 ergibt sich also die Matrixdarstellung der Komposition $g \circ f$ von f und g durch das entsprechende Produkt der Matrixdarstellungen. Hierzu ist notwendig, daß bei den Darstellungen für f und g *dieselbe* Basis von V benutzt wird. Da die den Übergang vermittelnden Homomorphismen φ sogar Isomorphismen sind, erhalten wir noch mehr:

Satz H.30 *Es seien $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$, ferner B_U und B_V Basen in U, V und $F \in K^{n \times m}$ die Matrixdarstellung von f bezgl. B_U, B_V. Dann gelten:*

(i) $\ker F \subset K^m$ *und* $\ker f \subset U$ *sind isomorphe Unterräume.*

(ii) $\mathrm{im}\, F \subset K^n$ *und* $\mathrm{im}\, f \subset V$ *sind isomorphe Unterräume.*

(iii) *F ist invertierbar, genau wenn f ein Isomorphismus ist.*

Beweis: (i) Es ist

$$x \in \ker F \ \Leftrightarrow\ Fx = 0 \ \Leftrightarrow\ f'(x) = \varphi_{B_V} \circ f \circ \varphi_{B_U}^{-1} = 0.$$

Nun ist φ_{B_V} Isomorphismus, also injektiv, d.h.

$$\varphi_{B_V}(f \circ \varphi_{B_U}^{-1})(x) = 0 \ \Leftrightarrow\ (f \circ \varphi_{B_U}^{-1})(x).$$

Somit haben wir

$$x \in \ker F \ \Leftrightarrow\ \varphi_{B_U}^{-1}(x) \in \ker f$$

und da φ_{B_U} und damit auch $\varphi_{B_U}^{-1}$ ein Isomorphismus ist, folgt die Behauptung.

(ii) Es gilt

$$\begin{aligned} y \in \operatorname{im} F &\Leftrightarrow \exists_{x \in K^m} Fx = y \\ &\Leftrightarrow \exists_{x \in K^m} y = Fx = f'(x) = \varphi_{B_V} \circ f \circ \varphi_{B_U}^{-1}(x) \\ &\Leftrightarrow \varphi_{B_V}^{-1}(y) \in \operatorname{im} f. \end{aligned}$$

(iii) Es ist

$$\begin{aligned} f \text{ Isomorphismus } &\Leftrightarrow (\ker f = 0 \text{ und } \operatorname{im} f = V) \\ &\overset{(i),(ii)}{\Longleftrightarrow} (\ker F = 0 \text{ und } \operatorname{im} F = K^n) \\ &\Leftrightarrow F \text{ invertierbar.} \end{aligned}$$

□

Damit können wir also das Rechnen mit allgemeinen Homomorphismen zwischen endlich-dimensionalen Räumen zurückspielen auf das Rechnen mit Matrizen. An zwei Beispielen sei dies demonstriert:

Problem H.31 *Es seien U, V endlich-dimensionale Räume, $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$.*

Man entscheide, ob f ein Isomorphismus ist.

Lösung Wähle irgendwelche Basen $B_U = (u_1, ..., u_m)$ in U und $B_V = (v_1, ..., v_n)$ in V. Ist $m \neq n$ so können die Räume nicht isomorph sein, also auch nicht f ein Isomorphismus sein. Ist $m = n$, so stelle man f bezüglich dieser Basen durch eine Matrix F dar, d.h. man berechne $f(u_j)$ für alle j und entwickle diese nach der Basis B_V, d.h. bestimme die Darstellung

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^{n} \eta_{ij} v_i.$$

Diese η_{ij} sind die Elemente von F. Dann ist f genau dann ein Isomorphismus, wenn F invertierbar ist. Dies prüft man mit GAUSS-JORDAN-Elimination, womit man gegebenenfalls auch die Inverse F^{-1} berechnen kann.

Aus F^{-1} erhält man dann auch f^{-1} (etwas lax notiert) als

$$f^{-1} = \varphi_{B_U} F^{-1} \varphi_{B_V}^{-1}.$$

□

Problem H.32 *Es seien U, V endlich-dimensionale Räume, $f \in \operatorname{Hom}(U, V)$ und $v \in V$.*

Man untersuche die lineare Gleichung $f(u) = v$.

Lösung Wähle irgendwelche Basen $B_U = (u_1, ..., u_m)$ in U und $B_V = (v_1, ..., v_n)$ in V und stelle f bezüglich dieser Basen durch eine Matrix F dar. Setze $y := \varphi_{B_V}(v)$ und betrachte das lineare Gleichungssystem $Fx = y$. Dann ist

$$Fx = y \iff f\left(\varphi_{B_U}^{-1}(x)\right) = v,$$

d.h. alle Ausagen über $Fx = y$ gelten mit dieser Übertragung für $f(u) = v$. □

Diese Überlegungen geben uns auch den Zugang zur sog. ***Basistransformation***, d.h. der Frage, wie sich die Koeffizienten eines Vektors beim Wechsel der Basis ändern.

Problem H.33 *Es seien $B = (u_1, ..., u_m)$ und $B' = (u'_1, ..., u'_m)$ zwei Basen in U. Dann besitzt jeder Vektor $u \in U$ eindeutig bestimmte Darstellungen*

$$u = \sum_{j=1}^{m} \xi_j u_j = \sum_{i=1}^{m} \eta_i u'_i.$$

Deren Koeffizientenvektoren seien $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}$, $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}$.

Wie erhält man y aus x?

Mit den kanonischen Isomorphismen $\varphi_B : u_j \longmapsto e_j$, bzw. $\varphi_{B'} : u'_j \longmapsto e_j$, jeweils für $(j = 1, ..., m)$ können wir den Übergang von x zu y so beschreiben:

$$x \overset{\varphi_B^{-1}}{\longmapsto} u \overset{\mathrm{id}_U}{\longmapsto} u \overset{\varphi_{B'}}{\longmapsto} y.$$

Ist nun G eine Matrixdarstellung von id_U bezgl. B, B', so ist offenbar $Gx = y$. Dabei ist $G = (\gamma_{ij})$, wobei

$$\mathrm{id}_U(u_j) = u_j = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ij} u'_i.$$

Also haben wir

Satz H.34 *Das Problem H.33 wird gelöst durch $y := Gx$, wobei G Matrixdarstellung von id_U bezgl. der Basen B und B' ist. Damit ist insbesondere $G = (\gamma_{ij})$ mit*

$$u_j = \sum_{i=1}^{m} \gamma_{ij} u'_i.$$

G drückt also die "alte" Basis B durch die "neue" Basis B' aus.

Ändern wir die Basen, so ändern sich auch die Matrixdarstellungen von Homomorphismen.

Problem H.35 *Es seien U, V Vektorräume mi je zwei Basen B_U, B'_U bzw. B_V, B'_V und $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$. Dazu sei F die Matrixdarstellung von f bzgl B_U, B_V und F' die Matrixdarstellung von f bzgl B'_U, B'_V.*

Wie erhält man F' aus F?

Satz H.36 *Das Problem H.35 wird gelöst durch*

$$F' = G_V F G_U^{-1},$$

wobei G_U Matrixdarstellung von id_U bezügl. B_U, B'_U ist, G_V Matrixdarstellung von id_V bezügl. B_V, B'_V.

Beweis: Mit den kanonischen Isomorphismen φ_{B_U}, etc. ist für alle $x \in K^m$:

$$F'x = \varphi_{B'_V} \circ f \circ \varphi_{B'_U}^{-1}(x) = \varphi_{B'_V} \circ \mathrm{id}_V \circ f \circ \mathrm{id}_U \circ \varphi_{B'_U}^{-1}(x).$$

Damit haben wir

$$\begin{tikzcd}
U \arrow[r, "\mathrm{id}_U"] \arrow[d, "\varphi_{B'_U}"'] & U \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_{B_U}"'] & V \arrow[r, "\mathrm{id}_V"] \arrow[d, "\varphi_{B_V}"] & V \arrow[d, "\varphi_{B'_V}"] \\
K^m & K^m \arrow[l] \arrow[r] & K^n \arrow[r] & K^n \\
x' = G_U x \arrow[rrr, bend right, "F'"'] & x \arrow[l, "G_U"'] \arrow[r, "F"] & Fx \arrow[r, "G_V"] & y' = F'x'
\end{tikzcd}$$

und zweimaliges Anwenden von Satz H.29 liefert die Behauptung. □

Basiswechsel und die damit verbundene Basistransformation treten natürlich auch in den K^m- Räumen auf und lassen sich natürlich aus dieser allgemeinen Methode ableiten. Da hierbei leicht Verwechslungen auftreten, sei dies kurz explizit dargestellt.

Problem H.37 *Es sei $B = (u'_1, ..., u'_m)$ eine Basis aus Spaltenvektoren im K^m. Dann besitzt jeder Spaltenvektor $x \in K^m$ eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^m \eta_i u'_i$. Wir setzen wieder $y := \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \vdots \\ \eta_m \end{pmatrix}$ und fragen wieder:*

Wie bekommt man y aus x?

Man sieht sofort, daß dies mit der kanonischen Basis $B = (e_1, ..., e_m)$ das Problem H.33 für $U = K^m$ ist. Damit liefert Satz H.34: Definieren wir die Matrix $G = (\gamma_{ij})$ über $e_j = \sum_{i=1}^m \gamma_{ij} u'_i, (j = 1, ..., m)$, so ist $y = Gx$. Bilden wir nun die Matrix $H := (u'_1, ..., u'_m)$, sie enthält als Spalten also die neue Basis, so kann man $e_j = \sum_{i=1}^m \gamma_{ij} u'_i$ kompakt schreiben als $I = HG$. Damit ist also $G = H^{-1}$.

Wir haben also

Satz H.38 (Basistransformation im K^m) *Das Problem H.37 wird gelöst durch $y := H^{-1}x$, wobei $H := (u'_1, ..., u'_m)$ die Matrix mit den neuen Basisvektoren als Spalten ist.*

Ferner erhalten wir als Spezialfall von Satz H.36

Satz H.39 *Es sei F eine $n \times m$ Matrix und $B'_U = (u'_1, ..., u'_m)$ bzw. $B'_V = (v'_1, ..., v'_n)$ seien Basen in K^m bzw. K^n. Dann hat der durch $x \mapsto Fx$ definierte Homomorphismus bezüglich der Basen B'_U und B'_V die Darstellung*

$$F' = H_V^{-1} F H_U,$$

wobei $H_U = (u'_1, ..., u'_m)$, $H_V = (v'_1, ..., v'_n)$.

Beweis: Satz H.36 und der Beweis von Satz H.38. □

Den Basiswechsel im K^n kann man natürlich auch direkt angehen.

Betrachten wir zunächst nochmal das Problem H.33 für $U = K^m$. Die beiden Basen $B_U = (u_1, ..., u_m)$ und $B'_U = (u'_1, ..., u'_m)$ können wir wieder je als die Liste der Spaltenvektoren von invertierbaren Matrizen H bzw. H' ansehen. Problem H.33 lautet dann einfach:

Bestimme $y \in K^m$, sodaß

$$u = Hx = H'y,$$

woraus sofort

$$y = (H')^{-1} Hx$$

folgt.

Ist speziell $B = (e_1, ..., e_m)$ die kanonische Basis, so ist $H = I$, die Einheitsmatrix und wir haben das Resultat von Satz H.38 wieder erhalten.

Auch die Formel von Satz H.39 kann man direkt bekommen.

Es definiert $x \mapsto Fx$ einen Homomorphismus $f : K^m \to K^n$, der bezüglich der kanonischen Basen eben durch die Matrix F dargestellt wird. Uns interessiert die Matrix $F' = (\eta'_{ij})$, für die

$$f(u'_j) = \sum_{i=1}^n \eta'_{ij} v'_i$$

gilt. Dies ist aber wegen $f(u_j) = Fu_j$ äquvalent zu

$$F(u'_1, ..., u'_m) = (v'_1, ..., v'_n)F'$$

d.h. zu

$$FH_U = H'_V F',$$

was

$$F' = (H'_V)^{-1} F H_U$$

ergibt.

Ist speziell $n = m$, so können wir für B'_U und B'_V dieselbe Basis wählen, wobei dann in Satz H.39 die beiden Matrizen H_U und H_V zusammenfallen. Wir erhalten dann speziell

$$F' = H^{-1} F H.$$

Definition H.40 (ähnlich) *Zwei $n \times n$ Matrizen F, F' heißen "ähnlich", wenn eine invertierbare Matrix H existiert, sodaß $F' = H^{-1} F H$.*

Dieser Sonderfall wird uns in einem späteren Kapitel noch ausführlich beschäftigen.

Mit den oben behandelten Basistransformationen können wir auch jedem Homomorphismus eine Matrixdarstellung von besonders einfacher Form geben. Dazu sei $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $s := \operatorname{def} f$, $r := \operatorname{rg} f$, womit dann $r + s = m = \dim U$. Im Beweis von Satz H.15 hatten wir eine Basis $(u_1, ..., u_m)$ von U konstruiert, für die $(u_1, ..., u_s)$ Basis von $\ker f$ ist und $(f(u_{s+1}), ..., f(u_m))$ Basis von $\operatorname{im} f$. Indem wir die letzte noch zu einer Basis von V ergänzen und umnummerieren erhalten wir:

Es gibt Basen $B_U = (u_1, ..., u_m)$ von U und $B_V = (v_1, ..., v_n)$ von V, sodaß

(i) $f(u_j) = v_j$, $(j = 1, ..., r)$ *und*

(ii) $f(u_j) = 0$, $(j = r + 1, ..., m)$.

Bezüglich dieser Basen hat dann f eine Matrixdarstellung $F = (\eta_{ij})$, deren Koeffizienten sich aus $f(u_j) = \sum_{i=1}^{n} \eta_{ij} v_i$ berechnen. Nun ist für $j = 1, ..., r$ ja $f(u_j) = v_j$, d.h. mit dem KRONECKER-Symbol δ_{ij} ist $\eta_{ij} = \delta_{ij}$ und für $j = r + 1, ..., m$ ist $f(u_j) = 0$, d.h. alle $\eta_{ij} = 0$.

Mit $r = \operatorname{rg} f$ hat also die Matrix F die Gestalt

$$F = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)_{n,m}.$$

Dies liefert

Satz H.41 *(i) Zu jedem Homomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ gibt es Basen, bezüglich derer f die Matrixdarstellung*

$$F = \left(\begin{array}{c|c} I_r & 0 \\ \hline 0 & 0 \end{array} \right)_{n,m}$$

hat. Dabei ist $r = \operatorname{rg} f$.

(ii) Zu jeder Matrix F gibt es invertierbare Matrizen R, S, sodaß $F' := RFS$ die obige Gestalt hat, wobei wieder $r = \operatorname{rg} F$.

Beweis: (i) hatten wir eben gezeigt, (ii) folgt aus Satz H.39 für die "richtigen" Basen. □

Diese Darstellung liefert uns auch noch Einsichten über den Rang einer Marix, den wir bisher als “Spaltenrang”, d.h. die Maximalzahl unabhängiger Spalten erklärt hatten. Genauso können wir den “Zeilenrang” als die Maximalzahl unabhängiger Zeilen erklären. Hat die Matrix F die Gestalt aus Satz H.41,(i), so stimmen offenbar beide überein. Nun ist der Rang eines Homomorphismus gleich dem Rang jeder seiner Matrixdarstellungen und somit gilt:

Satz H.42 *Sind R, S invertierbare Matrizen, so haben F und $F' := RFS$ den selben (Spalten-)Rang.*

Dies wollen wir nun auch noch für den Zeilenrang zeigen, woraus dann über Satz H.41 die Gleichheit von Spalten- und Zeilenrang folgt.

Definition H.43 (Transponieren) *Ist $A = (\alpha_{ij})_{n,m} \in K^{n\times m}$, so heißt $A^T := (\alpha^T_{ij})_{n,m} \in K^{m\times n}$, mit $\alpha^T_{ij} := \alpha_{ji}$ (alle i, j), die “transponierte” Matrix zu A.*

Merke: *Beim Transponieren werden Zeilen zu Spalten und Spalten zu Zeilen.*

Damit gilt trivialerweise: Der Zeilenrang von A ist der Spaltenrang von A^T und umgekehrt.

Für das Transponieren gelten folgende Regeln:

Satz H.44 *(i) $I^T = I$.*

(ii) $(AB)^T = B^TA$ (Reihenfolge!)

(iii) Ist A invertierbar, so auch A^T und $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.

Beweis: (i),(ii) erledigt man durch Anschauen der Elemente.

(iii):

$$\begin{aligned} A \text{ invertierbar} &\Leftrightarrow \text{ es existiert } B \text{ mit } AB = BA = I \\ &\Leftrightarrow \text{ es existiert } B \text{ mit } (AB)^T = (BA)^T = I^T \\ &\Leftrightarrow \text{ es existiert } B \text{ mit } B^TA^T = A^TB^T = I \\ &\Leftrightarrow A^T \text{ invertierbar.} \end{aligned}$$

Ferner ist die Inverse eindeutig bestimmt und somit

$$I = (A^{-1}A)^T = A^T {A^{-1}}^T = {A^{-1}}^T A^T.$$

□

Nun benutzen wir Satz H.41,(ii). Wegen der speziellen Form von $F' = RFS$ und dem früher Gesagten ist (mit den Abkürzungen sprg := Spaltenrang, zrg := Zeilenrang)

$$\begin{aligned} \operatorname{sprg} F = \operatorname{sprg} F' = \operatorname{zrg} F' &= \operatorname{sprg}(F')^T \\ &= \operatorname{sprg}(RFS)^T = \operatorname{sprg}(S^TF^TR^T) = \operatorname{sprg} F^T = \operatorname{zrg} F. \end{aligned}$$

Damit haben wir bewiesen:

Satz H.45 *Für jede Matrix ist Zeilenrang = Spaltenrang.*

5

Die eben eingeführte transponierte Matrix bekommt ihre eigentliche Bedeutung erst im Zusammenhang mit den sog. linearen Funktionalen. Der Körper K selbst ist ein 1-dimensionaler K-Vektorraum, für den etwa (1), d.h. die Familie mit genau einem Element, nämlich dem Element 1, eine Basis ist. Damit gelten alle Betrachtungen zu Homomorphismen zwischen K-Vektorräumen U, V auch für $V := K$.

Definition H.46 (Dualer Raum, lineare Funktionale) *Zu einem K-Vektorraum U heißt*

$$U^* := \mathrm{Hom}(U, K)$$

der "duale Raum" oder "Dual-Raum", seine Elemente, also die Homomorphismen von U in den Grundkörper heißen "lineare Funktionale" auf U. Das Nullelement $0^* \in U^*$ ist das Funktional, das

$$0^*(x) = 0 \text{ für alle } x \in U$$

liefert.

Ist $B = (u_1, ..., u_m)$ eine Basis von U, so gibt es nach Satz H.4 eindeutig bestimmte Funktionale $u_j^* \in U^*$, die

$$u_j^*(u_k) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & j = k \\ 0 & j \neq k \end{cases} \qquad (j, k = 1, 2, ..., m)$$

erfüllen.

Definition und Satz H.47 (Duale Basis) *Die eben definierten Funktionale u_j^* bilden eine Basis $B^* = (u_1^*, ..., u_m^*)$ von U^*, die sog. "duale Basis" zur Basis B.*
Es ist demnach $\dim U^* = \dim U = m$.

Beweis: (Siehe auch Beispiel BH 12.)
unabhängig: Aus $\sum_{j=1}^m \alpha_j u_j^* = 0^*$ folgt für jedes k:

$$\begin{aligned} 0 = 0^*(u_k) &= \left(\sum_{j=1}^m \alpha_j u_j^* \right)(u_k) \\ &= \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j^*(u_k) \\ &= \sum_{j=1}^m \alpha_j \delta_{jk} = \alpha_k. \end{aligned}$$

erzeugend: Nach Satz H.4 ist jedes Funktional $u^* \in U^*$ durch seine Werte auf der Basis $B = (u_1, ..., u_m)$, also hier die Zahlen $\alpha_j := u^*(u_j)$ bestimmt. Nun ist aber

$$\left(\sum_{k=1}^m \alpha_k u_k^* \right)(u_j) = \sum_{k=1}^m \alpha_k u_k^*(u_j) = \alpha_j$$

und damit

$$u^* = \sum_{k=1}^m \alpha_k u_k^*.$$

□

Soeben mitbewiesen haben wir

Satz H.48 *Sind $B = (u_1, ..., u_m)$ und $B^* = (u_1^*, ..., u_m^*)$, duale Basen, so hat das Funktional $u^* = \sum_{k=1}^m \alpha_k u_k^*$ bezüglich der Basen B in U und (1) in K als Matrixdarstellung die nur aus einer Zeile bestehende Matrix*

$$(\alpha_1, ..., \alpha_m).$$

Dabei ist $\alpha_j = u^*(u_j)$.

Sind U, V zwei K-Vektorräume und $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$, so ist für jedes Funktional $v^* \in V^* = \mathrm{Hom}(V, K)$ dann $v^* \circ f \in \mathrm{Hom}(U, K) = U^*$, also ein Funktional auf U. Wir haben somit eine Abbildung

$$f^* : V^* \longrightarrow U^* : \quad v^* \longmapsto f^*(v^*) := v^* \circ f.$$

Satz und Definition H.49 (adjungierter Homomorphismus) *Die soeben beschriebene Abbildung ist ein Homomorphismus $f^* \in \mathrm{Hom}(V^*, U^*)$, der "zu f adjungierte Homomorphismus".*

Achtung! *$f \in \mathrm{Hom}(U, V)$ erzeugt $f^* \in \mathrm{Hom}(V^*, U^*)$. Die Richtung kehrt sich um.*

Beweis: Für $\alpha_1, \alpha_2 \in K, v_1^*, v_2^* \in V^*$ und $u \in U$ ist

$$\begin{aligned} f^*(\alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^*)(u) &= (\alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^*) f(u) \\ &= \alpha_1 (v_1^* \circ f)(u) + \alpha_2 (v_2^* \circ f)(u) \\ &= \alpha_1 f^*(v_1)(u) + \alpha_2 f^*(v_2)(u). \end{aligned}$$

Somit ist

$$f^*(\alpha_1 v_1^* + \alpha_2 v_2^*) = \alpha_1 f^*(v_1) + \alpha_2 f^*(v_2),$$

d.h. $f^* \in \mathrm{Hom}(V^*, U^*)$. □

Zwischen f und f^* bestehen eine Reihe von Beziehungen, von denen wir einige notieren als

Satz H.50 *(i) Sind $f, g \in \mathrm{Hom}(U, V)$ und $\alpha, \beta \in K$, so ist*

$$(\alpha f + \beta g)^* = \alpha f^* + \beta g^*.$$

(ii) Ist $g \in \mathrm{Hom}(U, V)$, $h \in \mathrm{Hom}(V, W)$ so ist

$$(h \circ g)^* = g^* \circ h^* \qquad \textit{Reihenfolge!!}$$

(iii) $\mathrm{id}_{U^*} = (\mathrm{id}_U)^*$.

(iv) Ist $g \in \mathrm{Hom}(U, V)$ ein Isomorphismus, so ist auch $g^* \in \mathrm{Hom}(V^*, U^*)$ ein Isomorphismus und

$$(g^*)^{-1} = (g^{-1})^*.$$

Beweis: (i) bis (iii) ergeben sich direkt aus der Definition durch Nachrechnen.

Zu (iv): Da g ein Isomorphismus ist, existiert g^{-1} und es ist

$$\mathrm{id}_U = g^{-1} \circ g, \quad \mathrm{id}_V = g \circ g^{-1}.$$

Mit (ii) und (iii) folgt dann

$$\begin{aligned} (\mathrm{id}_{U^*}) &= (\mathrm{id}_U)^* = (g^{-1} \circ g)^* = g^* \circ (g^{-1})^* \\ (\mathrm{id}_{V^*}) &= (\mathrm{id}_V)^* = (g \circ g^{-1})^* = (g^{-1})^* \circ g^*, \end{aligned}$$

womit dann die Behauptung gezeigt ist. □

Wir beschließen diesen Abschnitt mit

Satz H.51 *Sind B_U, B_V Basen in U und V, dazu B_U^*, B_V^* die dualen Basen in U^* bzw. V^*, so gilt für $f \in \mathrm{Hom}(U, V)$:*

Wird f bezüglich B_U, B_V durch die Matrix F dargestellt und wird der adjungierte Homomorphismus f^* bezüglich B_U^*, B_V^* durch die Matrix F^* dargestellt, so ist

$$F^* = F^T,$$

die zu F transponierte Matrix.

Beweis: Mit $F = (\varphi_{ij})$ gilt

$$f(u_j) = \sum_{i=1}^{m} \varphi_{ij} v_i,$$

entsprechend mit $F^* = (\varphi_{ij}^*)$

$$f^*(v_i^*) = \sum_{j=1}^{m} \varphi_{ji}^* u_j^*.$$

$f^*(v_i^*)$ ist ein Funktional auf U und somit ist nach Satz H.48

$$\begin{aligned} \varphi_{ji}^* &= (f^*(v_i^*))(u_j) = (v_i^* \circ f)(u_j) \\ &= v_i^*(f(u_j)) = v_i^* \left(\sum_{k=1}^{m} \varphi_{kj} v_k \right) = \varphi_{ij}. \end{aligned}$$

□

6

BH Beispiele zu Homomorphismen

1

BH1: Die Rechenregeln aus Satz H.3 werden wir ständig benutzen. Hier sind noch zwei weitere, die Sie selbst beweisen sollten. Wenn Sie damit nicht zurecht kommen, haben Sie wichtiges nicht verstanden.

$$f(x-y) = f(x) - f(y)$$
$$f(-x) = -f(x).$$

BH2: Dies richtet sich insbesondere an die Mathematiker.
In $\mathrm{Hom}(U,V)$ können wir einführen:
$0 \in \mathrm{Hom}(U,V)$ definiert durch $\forall_{x\in U} 0(x) := 0$,
und für $f,g \in \mathrm{Hom}(U,V)$ und $\alpha \in K$:
$(f+g)$ definiert durch $\forall_{x\in U}(f+g)(x) := f(x)+g(x)$,
(αf) definiert durch $\forall_{x\in U}(\alpha f)(x) := \alpha f(x)$.
Zeigen Sie, daß $f+g, \alpha f$ wieder Homomorphismen von U nach V sind, und daß damit $\mathrm{Hom}(U,V)$ selbst wieder ein K-Vektorraum ist,
Betrachten Sie die entsprechende Situation bei Matrizen.

BH3: $\mathbb{R}[T]$ sei der Vektorraum der reellen Polynome. Wir definieren zwei Abbildungen $f,g : \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}[T]$ durch
$f\left(\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu T^\nu\right) := \sum_{\nu=0}^{n} \nu\alpha_\nu T^{\nu-1}$, d.h. für ein Polynom p ist $f(p)$ gerade die Ableitung p'.
$g\left(\sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu T^\nu\right) := \sum_{\nu=0}^{n} \frac{1}{\nu+1}\alpha_\nu T^{\nu+1}$, d.h. für ein Polynom p ist $g(p)$ die Stammfunktion $\int_0^T p(t)dt$.
Zeigen Sie, daß f und g in $\mathrm{Hom}(\mathbb{R}[T],\mathbb{R}[T])$ liegen.

BH4: Es seien $C_0[0,1]$ bzw. $C_1[0,1]$ die auf dem Intervall $[0,1]$ stetigen bzw. stetig differenzierbaren Funktionen mit Werten in $\mathbb{R}$. Überzeugen Sie sich, daß dies reelle Vektorräume sind. Nun betrachten Sie – sinngemäß zum vorigen Beispiel – die Abbildungen f und g, die jeder Funktion u ihre Ableitung u' bzw. ihre Stammfunktion $\int_0^t u(\tau)d\tau$ zuordnet. Überlegen Sie zwischen welchen Räumen da Abbildungen definiert werden, und zeigen Sie, daß f und g wieder Homomorphismen sind.
Weiter bis

2

2

BH5: Bestimmen Sie Kern und Bild der in BH3 definierten Homomorphismen.

BH6: Betrachten Sie den Homomorphismus f aus BH3 (Differenzieren) nur als Abbildung $\mathbb{R}_n[T] \to \mathbb{R}_n[T]$, wobei dies die Polynome vom Grad $\leq n$ bezeichne.
Bestimmen Sie wieder Kern und Bild, sowie Rang und Defekt.

BH7: Es sei $\gamma \in \mathbb{R}$ fest gewählt. Dazu gibt es nach Satz H.4 genau einen Homomorphismus $h \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}_n[T],\mathbb{R})$, für den gilt: $h(T^\nu) = \gamma^\nu$ $(\nu = 0,1,...,n)$.
Was ist $h(p)$ für ein beliebiges Polynom $p \in \mathbb{R}_n[T]$?
Bestimmen Sie Kern, Bild, Rang, Defekt von h.

BH8: Es seien $f, g \in \operatorname{Hom}(K^n, K^n)$ mit folgenden Eigenschaften:

$$f(e_j) \in \operatorname{span}(e_1, ..., e_j),\ g(e_j) \in \operatorname{span}(e_j, e_{j+1}, ..., e_n),\ (j = 1, ..., n)$$

Welche Gestalt haben die nach Satz H.6 zu f bzw. g gehörigen Matizen?
Weiter bis

3

3

BH9: Zeigen Sie, daß $\mathbb{R}_n[T]$ und $\mathbb{R}^{n+1}$ isomorph sind. Überlegen Sie sich konkret mindestens zwei verschiedene Isomorphismen.

BH10: Prüfen Sie die in den vorigen Beispielen definierten Homomorphismen auf injektiv, surjektiv, bijektiv.

BH11: Es seien $\gamma_0, \gamma_1, ..., \gamma_m \in \mathbb{R}$ fest gewählte Zahlen. Wir erklären eine Abbildung $f \in \operatorname{Hom}(\mathbb{R}_n[T], \mathbb{R}^{m+1})$ nach Satz H.4 durch die Vorschrift

$$f : T^\nu \longmapsto \begin{pmatrix} \gamma_0^\nu \\ \gamma_1^\nu \\ \vdots \\ \gamma_m^\nu \end{pmatrix}, \quad (\nu = 0, 1, ..., n).$$

(Vergleichen Sie BH7!) Zeigen Sie, daß
f injektiv ist, wenn $m \geq n$,
f surjektiv ist, wenn $m \leq n$
und f ein Isomorphismus ist, wenn $m = n$.
Deuten Sie die letzte Aussage.
Konstruieren Sie im Falle $m = n = 2$ den inversen Isomorphismus f^{-1}.

BH12: (Für Mathematiker)

Nach BH2 ist $\operatorname{Hom}(K^m, K^n)$ ein K-Vektorraum. Wir definieren Homomorphismen $f_{\mu\nu} \in \operatorname{Hom}(K^m, K^n)$ nach Satz H.4 mittels der kanonischen Einheitsvektoren durch

$$f_{\mu\nu}(e_\mu) = e_\nu,\ f_{\mu\nu}(e_i) = 0 \text{ für alle } i = 1, ..., m,\ i \neq \mu\ (\mu = 1, ..., m,\ \nu = 1, ..., n.)$$

Zeigen Sie, daß diese $f_{\mu\nu}$ eine Basis von $\operatorname{Hom}(K^m, K^n)$ bilden.

Wie sehen die nach Satz H.6 zugehörigen Matrizen $F_{\mu\nu} \in K^{n\times m}$ aus?

Zeigen Sie, daß $\Phi : f_{\mu\nu} \mapsto F_{\mu\nu}$ einen Isomorphismus zwischen $\operatorname{Hom}(K^m, K^n)$ und $K^{n\times m}$ definiert.

Betrachten Sie die allgemeinere Situation: U, V seien m- bzw. n-dimensionale K-Vektorräume mit Basen $(u_1, ..., u_m)$ bzw. $(v_1, ..., v_n)$. Definieren Sie Homomorphismen $g_{\mu\nu} \in \operatorname{Hom}(U, V)$ durch

$$g_{\mu\nu}(u_\mu) = v_\nu,\ g_{\mu\nu}(u_i) = 0 \text{ für alle } i = 1, ..., m,\ i \neq \mu\ (\mu = 1, ..., m,\ \nu = 1, ..., n.)$$

Zeigen Sie, daß diese $g_{\mu\nu}$ eine Basis von $\operatorname{Hom}(U, V)$ bilden, und daß ferner durch $\Psi : g_{\mu\nu} \mapsto F_{\mu\nu}$ ein Isomorphismus zwischen $\operatorname{Hom}(U, V)$ und $K^{n\times m}$ definiert wird.

BH13: Verifizieren Sie an den bisherigen Beispielen die Dimensionsformel von Satz H.15

$$f \in \operatorname{Hom}(U, V) \Longrightarrow \operatorname{rg} f + \operatorname{def} f = \dim U.$$

BH14: Es sei A eine $n \times m$ Matrix, F eine invertierbare $n \times n$ Matrix. Zeigen Sie, daß A und FA denselben Spaltenrang haben. Überlegen Sie zunächst, wie die Spalten von FA aussehen, was nach Satz H.20 die Abbildung $x \longmapsto Fx$ bedeutet und sehen Sie bei Satz H.10 nach.

BH15: Das Invertieren von Matrizen mit GAUSS-JORDAN-Elimination kann man nur durch Üben erlernen! Hier sind ein paar Anregungen.

Sind die folgenden Matrizen invertierbar und, wenn ja, wie sieht die Inverse aus?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 10 \end{pmatrix}.$$

(B^{-1} existiert, A^{-1} existiert nicht.)

Sind die Vektoren $\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 9 \end{pmatrix}$ unabhängig, erzeugend, Basis?

Was ist, wenn wir den letzten durch $\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$ ersetzen?

Weiter bis

4

4

BH16: Untersuchen Sie die folgenden Gleichungssysteme $Fx = b$ auf Lösbarkeit und bestimmen Sie gegebenenfalls alle Lösungen.

$F := A$ aus BH15, $b := \begin{pmatrix} 3 \\ 9 \\ 15 \end{pmatrix}$, oder $b := \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 10 \end{pmatrix}$, dito mit $F := B$ aus BH15.

BH17: Wenn sie es noch nicht getan haben sollten, dann studieren Sie jetzt das Beispiel BH4!

Es seien $a(t), v(t)$ festgewählte stetige Funktionen $\in C_0[0,1]$. Wir betrachten die Abbildung

$$f : C_1[0,1] \longrightarrow C_0[0,1] : \; u(t) \longmapsto u'(t) + a(t)u(t).$$

Überlegen Sie zunächst, daß $f \in \mathrm{Hom}(C_1[0,1], C_0[0,1])$ und somit Satz H.24 anwendbar ist.

Damit können wir die

Aufgabe *Löse die Differentialgleichung*

$$u'(t) + a(t)u(t) = v(t),$$

beschreiben durch

Bestimme die Lösungen der linearen Gleichung $f(u) = v$.

Wir erhalten als

Folgerung *Wenn überhaupt lösbar – das sei hier nicht untersucht – erhält man alle Lösungen so:*

Man bestimme eine Lösung u_0 der inhomogenen Gleichung:

$$f(u_0) = v, \text{ d.h. } u_0'(t) + a(t)u_0(t) = v(t)$$

und alle Lösungen der homogenen Gleichung

$$f(u) = 0, \text{ d.h. } u'(t) + a(t)u(t) = 0$$

und addiere.

Ein Beispiel: $u'(t) - 2u(t) = 2$.

Für $u_0(t) \equiv -1$ ist $u'(t) \equiv 0$, d.h. $f(u_0)(t) = 0 - 2\cdot(-1) = 2$. Somit ist $u_0(t) \equiv -1$ eine Lösung.

Die homogene Gleichung lautet: $u'(t) - 2u(t) = 0$. Dafür ist sicher $\tilde{u}(t) := e^{2t}$ eine Lösung, da $\tilde{u}'(t) := 2 \cdot e^{2t}$, d.h. $f(\tilde{u})(t) = 2 \cdot e^{2t} - 2 \cdot e^{2t} = 0$. Also sind sicher alle u der Form $u(t) := \alpha \cdot e^{2t} - 1$ mit beliebigem $\alpha \in \mathbb{R}$ Lösungen.

Man kann zeigen, daß der Kern von f tatsächlich die Dimension 1 hat, woraus dann folgt, daß wir alle Lösungen gefunden haben.

Analog kann man mit linearen Differentialgleichungen höherer Ordnung verfahren, etwa

$$u''(t) + a(t)u'(t) + b(t)u(t) = v(t).$$

Hier hat der Kern die Dimension 2 und man erhält 2 unabhängige Lösungen der homogenen Gleichung.

Ein Beispiel: $u''(t) + 4u(t) = 2$.

$u_0(t) = \frac{1}{2}$ ist eine Lösung der inhomogenen Gleichung,

$u_1(t) := \cos 2t$, und $u_2(t) := \sin 2t$ sind zwei unabhängige (und damit eine Basis für die) Lösungen der homogenen Gleichung. Damit lautet die allgemeine Lösung

$$\frac{1}{2} + \alpha \cos 2t + \beta \sin 2t, \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}).$$

Weiter bis

5

5

BH18: Betrachten wir nochmal den in BH6 untersuchten Homomorphismus $f \in \mathrm{Hom}(\mathbb{R}_n[T], \mathbb{R}_n[T])$, der das Differenzieren bewirkt. Benutzen wir in $\mathbb{R}_n[T]$ im Urbild- wie im Bildraum die Basen $B_U := (1, T, T^2, ..., T^n)$ und $B_V := (1, T, T^2, ..., T^n)$, so haben wir einmal die kanonischen Isomorphismen

$$\varphi_{B_V} := \varphi_{B_U} : \mathbb{R}_n[T] \to \mathbb{R}^{n+1} : T^\nu \mapsto e_{\nu+1} \ (\nu = 0, 1, ..., n)$$

und bekommen andrerseits

$$f(T^i) = (T^i)' = i \cdot T^{i-1} = \sum_{j=0}^{i-2} 0 \cdot T^j + i \cdot T^{i-1} + \sum_{j=i}^{n} 0 \cdot T^j, \ (j = 0, 1, ..., n).$$

Somit hat f die Matrixdarstellung – notiert für $n = 3$ –

$$F = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nun wählen Sie etwa für $n = 3$ in $\mathbb{R}_n[T]$ die Basis

$$\begin{aligned} q_0(T) &:= (T-1)(T-2)(T-3), \\ q_1(T) &:= T(T-2)(T-3), \\ q_2(T) &:= T(T-1)(T-3), \\ q_3(T) &:= T(T-1)(T-2). \end{aligned}$$

(Vergleiche BV11.)

Stellen Sie f wieder als Matrix dar, wobei sie einmal nur B_U, dann nur B_V und schließlich beide durch die neue Basis ersetzen und verifizieren Sie daran Satz H.36.

BH19: Im $\mathbb{R}^3$ bilden die Spalten u_1, u_2, u_3 von $H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ eine Basis.

Stellen sie die Vektoren $x_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 4 \end{pmatrix}$ und $x_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ dar als $x = \sum_{j=1}^{3} \eta_j u_j$ und berechnen Sie die Koeffizienten η_j. (Satz H.38)

BH20: Geben Sie die Matrixdarstellung von $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^3}$ bezüglich der kanonischen und der in BH19 notierten Basis an. Es gibt zwei Möglichkeiten. Wie hängen die zusammen?

Weiter bis

6 〉

〉 6

Ein paar Beispiele für Funktionale:

BH21: Es sei $U = K^m$, also der Raum der $(m, 1)$-Spaltenvektoren. Ist dann $F := (f_{11}, f_{12}, ..., f_{1m})$ eine $1 \times m$ Matrix, so ist für jede Spalte $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \in K^m$ das Produkt Fx definiert und liefert eine 1×1 Matrix, die wir natürlich mit ihrem einzigen Element identifizieren. Nach den früheren Überlegungen ist damit durch

$$f : K^m \longrightarrow K : x \longmapsto Fx$$

ein Homomorphismus, d.h. hier ein lineares Funktional auf K^m gegeben. In diesem Sinne liefert jeder $(1, m)$ Zeilenvektor ein Funktional auf K^m.

Die kanonischen Einheitsvektoren e_i $(i = 1, .., m)$ bilden eine Basis B des K^m. Wegen $e_j^T e_i = \delta_{ij}$ sind somit die durch die Zeilenvektoren e_j^T $(j = 1, ..., m)$ gegebenen Funktionale eine Basis von $(K^m)^*$, nämlich gerade die zu B duale Basis B^*.

Überlegen Sie einmal, wie Sie die duale Basis B^* zu einer gegebenen Basis $B = (x_1, ..., x_m)$ von K^m auf analoge Weise darstellen können.

Beachten Sie: Die Zeilenvektoren sind nicht die Funktionale auf dem K^m, sondern jeder Zeilenvektor liefert ein Funktional, d.h. der $(K^m)^*$ und der Raum der $(1, m)$-Zeilenvektoren stimmen nur bis auf Isomorphie überein.

BH22: Sei $C := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f \text{ stetig }\}$. Mit den punktweise erklärten Operationen ist C ein reeller Vektorraum. Ist dann $t \in \mathbb{R}$ gegeben, so können wir die Abbildung

$$\varphi_t : C \to \mathbb{R} : \ \varphi_t(f) := f(t),$$

die jeder stetigen Funktion f also ihren Wert an der Stelle t zuordnet, betrachten. Rechnen Sie nach, daß φ_t ein lineares Funktional auf C ist, d.h. $\varphi_t \in \mathrm{Hom}(C, \mathbb{R}) = C^*$. Solche Funktionale nennt man Punktfunktionale. Sie spielen etwa in der gesamten Numerik eine wichtige Rolle.

Diese Funktionale φ_t zu verschiedenen Stellen t_i sind stets unabhängig:

Seien $t_0, t_1, ..., t_n$ gegeben. Wir definieren für alle i stetige Funktionen f_i durch die Polynome:

$$f_i(t) := \prod_{k=0, k\neq i}^{n} \frac{t - t_k}{t_i - t_k}.$$

Man rechnet leicht nach, daß stets $f_i(t_i) = 1$ und $f_i(t_j) = 0$ für alle $j \neq i$ ist. Dann ist offensichtlich

$$\varphi_{t_j}(f_i) = \delta_{ij}.$$

Ist nun $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_{t_j} = 0 \in C^*$, d.h. das Nullfunktional, das allen Funktionen $f \in C$ den Wert 0 zuordnet, so folgt speziell für $f = f_i \ (i = 1, .., n)$:

$$0 = \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_{t_j} \right) (f_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varphi_{t_j}(f_i) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \delta_{ij} = \alpha_i.$$

Dies kann aber nur geschehen, wenn alle $\alpha_i = 0$ sind, sodaß die $(\varphi_{t_1}, ..., \varphi_{t_n})$ linear unabhängig sind.

Damit gibt es also in C^* beliebig große endliche linear unabhängige Familien. Nach Definition und Satz H.47 muß dann C selbst schon unendlich-dimensional sein. Denn wäre C endlich-dimensional, so auch C^* und dann könnte es nicht unabhängige Familien beliebiger Größe geben.

Genauere Auskunft über den Raum C^* können wir erst später mit Hilfe der Integrationstheorie bekommen.