M Matrizen

Im Vorkapitel hatten wir die linearen Räume $\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^3$ der Spaltenvektoren betrachtet und dazu Matrizen eingeführt, die lineare Abbildungen in diesen Räumen beschreiben. Wir wollen dies nun verallgemeinern.

Für das weitere sei K ein festgewählter Körper, n, m, ℓ seien natürliche Zahlen, $K^n, K^m, ...$ seien die K-Vektorräume aus den als Spalten geschriebenen n-, bzw. m-tupeln von Elementen aus K. Daneben betrachten wir sogenannte $n \times m$-Matrizen A über K:

$$A := (\alpha_{ij})_{n,m} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \dots & \alpha_{1m} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \dots & \alpha_{2m} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \alpha_{n2} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix}$$

mit $\alpha_{ij} \in K$ $(i = 1, ..., n, j = 1, ..., m)$. Deren Gesamtheit bezeichnen wir mit $K^{n\times m}$.

Definition und Satz M.1 *Für Matrizen $A = (a_{ij})_{n,m}$, $B = (\beta_{ij})_{n,m}$ und Skalare $\gamma \in K$ erklären wir durch*

$$A + B := (\alpha_{ij} + \beta_{ij})_{n,m},$$
$$\gamma \cdot A := (\gamma \cdot \alpha_{ij})_{n,m}$$

eine Addition von Matrizen und eine Multiplikation von Matrizen mit Skalaren. Mit diesen Operationen und der Nullmatrix 0 (alle $\alpha_{ij} = 0$) als neutralem Element ist $K^{n\times m}$ ein K-Vektorraum.

Wie in den schon betrachteten Fällen können wir eine Operation Matrix $\times$ Spaltenvektor einführen.

Definition M.2 *Ist $A \in K^{n\times m}, x \in K^m$, so ist*

$$Ax := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1} & \dots & \alpha_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \sum_{j=1}^m \alpha_{1j}\xi_j \\ \vdots \\ \sum_{j=1}^m \alpha_{nj}\xi_j \end{pmatrix} \in K^n$$

Beachten Sie: Matrix $\times$ Spaltenvektor ist nur erklärt, wenn die Zahl der Spalten von A = Zahl der Komponenten von x. Das Ergebnis ist ein Spaltenvektor mit soviel Komponenten, wie A Zeilen hat.

Aus der Definition rechnet man leicht nach, daß für die Abbildung $x \mapsto y := Ax$ gilt:

$A(\gamma x + \gamma' x') = \gamma(Ax) + \gamma'(Ax')$ wenn $A \in K^{n\times m}, x, x' \in K^m, \gamma, \gamma' \in K$, d.h., daß eine sog. "lineare Abbildung" $f_A : K^m \to K^n, x \mapsto Ax$ durch die Matrix A vermittelt wird.

Wir werden später sehen, daß in einem noch zu präzisierenden Sinn, so jede lineare Abbildung dargestellt werden kann.

Bezeichnen wir die als Spalten von A auftretenden Spaltenvektoren $\in K^n$ der Reihe nach mit $a_{\cdot 1}, ..., a_{\cdot m}$, so erhält man aus der Definition sofort für die kanonischen Einheitsvektoren $e_j \in K^m$:

$$a_{\cdot j} = Ae_j \quad (i = 1, ..., m)$$

d.h.

die Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren,

und hieraus für
$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j :$$
$$Ax = A(\sum_{j=1}^{m} \xi_j e_j) = \sum_{j=1}^{m} \xi_j A e_j = \sum_{j=1}^{m} \xi_j a_{\cdot j}.$$
Für Matrizen A, B, wobei die Spaltenzahl von A = Zeilenzahl von B ist, können wir ein Produkt erklären.

Definition M.3 *Zu $A = (a_{ij})_{n,m} \in K^{n\times m}, B = (\beta_{jk})_{m,\ell} \in K^{m\times \ell}$ sei $AB \in K^{n\times \ell}$ erklärt durch*
$$AB = (\sum_{j=1}^{m} \alpha_{ij}\beta_{jk})_{n,\ell}$$

Beachten Sie: Für $A \in K^{n\times m}, B \in K^{r\times \ell}$ ist das Produkt AB genau dann definiert wenn $m = r$ und liefert dann eine $n \times \ell$ - Matrix. Deren Element in Zeile i und Spalte k ergibt sich aus Zeile i von A und Spalte k von B.

Aus der Definition liest man auch unmittelbar die für Spezialfälle schon behauptete Formel
$$k\text{-te Spalte von } (A \cdot B) = A \cdot (k\text{-te Spalte von } B)$$
ab.

Identifiziert man Spaltenvektoren $\in K^m$ mit Matrizen, die nur eine Spalte besitzen, d.h. $\in K^{m\times 1}$, so geht in diesem Falle ($\ell = 1$) Definition M.3 in Definition M.2 über.

Bei der Multiplikation vom Matrizen gibt es sog. "Nullteiler", d.h. das Produkt von zwei Matrizen kann die Nullmatrix ergeben, obwohl keiner der Faktoren selbst schon die Nullmatrix ist. Ferner ist die Multiplikation nicht kommutativ, d.h. im allg. ist $AB \neq BA$.

Ein Beispiel ist etwa
$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Operation: Matrix $\times$ Vektor können wir als lineare Abbildung deuten. Was bedeutet das Produkt von Matrizen?

Satz M.4 *Seien $A \in K^{n\times m}, B \in K^{m\times \ell}$ Matrizen, $f_A : K^m \to K^n$, $f_B : K^\ell \to K^m$ die zugehörigen linearen Abbildungen. Dann ist $AB \in K^{n\times \ell}$, $f_{AB} : K^\ell \to K^n$ und es gilt:*
$$f_{AB} = f_A \circ f_B$$
d.h. das Matrixprodukt beschreibt das Hintereinanderausführen der zu den Matrix-Faktoren gehörenden Abbildungen.

Beweis: Seien $b._1, ..., b._1$ die Spalten von B, $x = \sum_{k=1}^{\ell} \xi_k e_k \in K^\ell$ beliebig gewählt. Dann haben wir

$$\begin{aligned}(f_A \circ f_B)(x) &= f_A(f_B(x)) = f_A(Bx) = f_A(\sum \xi_k b._k) = \sum \xi_k Ab._k \\ &= \sum \xi_k (AB) e_k = (AB)x = f_{AB}(x) = k - \text{te Spalte von} AB.\end{aligned}$$

Man beachte, daß $Ab._k$ die k-te Spalte von AB ist. □

Dieser Satz liefert uns auch, daß die Multiplikation von Matrizen associativ ist:

Satz M.5 *Sei $A \in K^{n\times m}$, $B \in K^{m\times \ell}$, $C \in K^{\ell\times r}$. Dann sind die Produkte AB, $(AB)C$, BC, $A(BC)$ definiert und es gilt $(AB)C = A(BC)$.*

Beweis: Zur Vereinfachung der Schreibweise sei die k-te Spalte einer Matrix G mit $G._k$ bezeichnet. Dann haben wir:

$$((AB)C)._k = (AB)(C._k) \overset{M4}{=} A(BC._k) = A(BC)._k = (A(BC))._k$$

□

Wir wollen nun untersuchen, wieweit man die Matrix-Multiplikation "umkehren" kann, d.h. wir untersuchen folgendes

Problem: *Gegeben Matrizen $A \in K^{n\times m}$, $B \in K^{n\times k}$. Gibt es dazu eine Matrix $X \in K^{m\times k}$ so daß $AX = B$ und wenn ja, wie findet man sie?*

Ist speziell $k = 1$, d.h. hat B genau eine Spalte b, so suchen wir also einen Spaltenvektor x, so daß $Ax = b$, d.h. wir wollen das lineare Gleichungssystem aus n Gleichungen in m Unbekannten $\xi_1, ..., \xi_m$ lösen:

$$\begin{array}{ccccccc} \alpha_{11}\xi_1 & + & ... & + & \alpha_{1m}\xi_m & = & \beta_1 \\ \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ \alpha_{n1}\xi_1 & + & ... & + & \alpha_{nm}\xi_m & = & \beta_n \end{array}$$

Um dies zu studieren, betrachten wir zunächst "invertierbare" Matrizen.

Definition M.6 *Eine quadratische Matrix $A \in K^{n\times n}$ heißt invertierbar, wenn es eine Matrix $B \in K^{n\times n}$ gibt, so daß*

$$AB = BA = I_n$$

Dabei ist I_n die sog. Einheitsmatrix: $I_n = (\delta_{ij})_{n,n}$ mit dem "Kroneckersymbol"

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j. \end{cases}$$

Wir schreiben dann $B = A^{-1}$ und nennen A^{-1} die zu A inverse Matrix.

Eine invertierbare Matrix heißt auch "regulär", eine nichtinvertierbare auch "singulär".

Die Einheitsmatrix wirkt bei der Matrixmultiplikation als neutrales Element, d.h. sofern die Multiplikationen formal definiert sind, gilt für beliebige Matrizen: $I_n A = A$, $BI_m = B$. Insbesondere ist damit auch $I_n I_n = I_n$, d.h. I_n ist invertierbar und $I_n^{-1} = I_n$.

Es gibt also für jedes n invertierbare Matrizen. Andererseits ist für die Nullmatrix 0 stets $0A = 0$, $B0 = 0$ so daß diese Matrix nicht invertierbar ist. Sie ist aber keineswegs die einzige nichtinvertierbare quadratische Matrix.

Zunächst stellen wir einige Aussagen über invertierbare Matrizen zusammen.

Satz M.7 *A, B seien $n \times n$ Matrizen. Dann gilt:*

(i) Ist A invertierbar, so ist die inverse Matrix eindeutig bestimmt.

(ii) Ist A invertierbar, so ist A^{-1} invertierbar und $(A^{-1})^{-1} = A$.

(iii) Ist A invertierbar und $AB = I$, so ist $B = A^{-1}$.

(iv) Sind A und B beide invertierbar, so auch AB und $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$. (umgekehrte Reihenfolge!)

Beweis: Zu (i) Sei $AB = BA = I$ und $AC = CA = I$. Dann ist

$$B = BI = B(AC) = (BA)C = IC = C.$$

Zu (ii) Es ist $A^{-1}A = AA^{-1} = 1$. Somit erfüllt A die Forderungen an eine Inverse zu A^{-1}. Damit ist A^{-1} invertierbar und $(A^{-1})^{-1} = A$.

Zu (iii) $B = IB = A^{-1}AB = A^{-1}$, da $AB = I$.

Zu (iv) $(B^{-1}A^{-1})AB = B^{-1}(A^{-1}AB) = B^{-1}B = I$, $ABB^{-1}A^{-1} = AIA^{-1} = AA^{-1} = I$. (Rest mit (ii).) □

Beispiele für invertierbare Matrizen sind

Eliminationsmatrizen:

$$L = \begin{pmatrix} 1 & & & \gamma_{1j} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \gamma_{j-1,j} & & & \\ & & & \gamma_{jj} & & & \\ & & & \gamma_{j+1,j} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \gamma_{nj} & & & 1 \end{pmatrix} \quad (\gamma_{ij} \in K, \gamma_{jj} \neq 0).$$

Man prüft leicht nach, daß Ihre Inverse von der selben Form ist:

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & & & \beta_{1j} & & & \\ & \ddots & & \vdots & & & \\ & & 1 & \beta_{j-1,j} & & & \\ & & & \beta_{jj} & & & \\ & & & \beta_{j+1,j} & 1 & & \\ & & & \vdots & & \ddots & \\ & & & \beta_{nj} & & & 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit } \beta_{jj} = \frac{1}{\gamma_{jj}}, \beta_{ij} = -\frac{\gamma_{ij}}{\gamma_{jj}}, \ (i \neq j).$$

Ferner sind invertierbar die speziellen Permutationsmatrizen $P_{\nu,\mu}$, die aus I_m durch Vertauschen der μ-ten und der ν-ten Spalte hervorgehen.

Permutationsmatrizen:

$$
P_{\nu,\mu} = \begin{pmatrix}
1 & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
& \ddots & & \vdots & & & & \vdots & & & \\
& & 1 & \vdots & & & & \vdots & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots \\
& & & \vdots & 1 & & & \vdots & & & \\
& & & \vdots & & \ddots & & \vdots & & & \\
& & & \vdots & & & 1 & \vdots & & & \\
\cdots & \cdots & \cdots & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & \cdots & \cdots & \cdots \\
& & & \vdots & & & & \vdots & 1 & & \\
& & & \vdots & & & & \vdots & & \ddots & \\
& & & \vdots & & & & \vdots & & & 1
\end{pmatrix}.
$$

Dabei sind jeweils die μ-te und die ν-te Zeile und Spalte hervorgehoben.

Für eine solche Matrix ist, wie man leicht nachrechnet $PP = I$.

Mittels dieser Matrizen können wir uns nun ein Verfahren konstruieren, die sog. Gauss-Jordan-Elimination, mit dem wir gegebene Gleichungssysteme $AX = B$ auf Lösbarkeit untersuchen, und falls sie lösbar sind, die Lösung angeben können. Speziell für den Fall $B = I$ können wir damit auch die inverse Matrix berechnen, sofern sie existiert.

Die Grundidee liegt in den durch die nächsten beiden Sätze beschriebenen Sachverhalten:

Satz M.8 *Es seien $A \in K^{n\times m}$, $X \in K^{m\times k}$, $B \in K^{n\times k}$, $C \in K^{n\times n}$ und C invertierbar. Dann gilt:*

X ist Lösung von $AX = B$ genau, wenn X Lösung von $CAX = CB$ ist.

Beweis: Gilt $AX = B$, so auch $CAX = CB$. Gilt umgekehrt $CAX = CB$, so auch $C^{-1}CAX = C^{-1}CB$, d.h. wegen $C^{-1}C = I$ also $AX = B$. □

Dieser Satz besagt, daß wir zum Lösen von $AX = B$ zunächst unser System mittels einer invertierbaren Matrix C auf eine "einfachere" Form transformieren können und dann dieses System lösen. Diese Transformation kann man in mehreren Schritten ausführen, wobei wir die schon als invertierbar bekannten Eliminations- bzw. Permutationsmatrizen benutzen.

Satz M.9 *Sei $A \in K^{n\times m}$ mit den Zeilen $a_{i\cdot}$, L bzw. P seien die oben notierten Eliminations- bzw. Permutationsmatrizen. $a'_{i\cdot}$ bzw. $a''_{i\cdot}$ bezeichne die i-ten Zeilen von LA bzw. PA, je für $(i = 1, ..., n)$. Dann gilt:*

$$
a'_{i\cdot} = \begin{cases} \gamma_{jj} a_{j\cdot} & \text{wenn } i = j \\ a_{i\cdot} + \gamma_{ij} a_{j\cdot} & \text{wenn } i \neq j \end{cases}
$$

$$
a''_{i\cdot} = \begin{cases} a_{i\cdot} & \text{wenn } i \neq \mu, i \neq \nu \\ a_{\nu\cdot} & \text{wenn } i = \mu \\ a_{\mu\cdot} & \text{wenn } i = \nu \end{cases}
$$

Der **Beweis** ist ein einfaches Ausführen der Matrixmultiplikation und sei übergangen.

Dieser Satz besagt: Durch Multiplikation mit einer Eliminationsmatrix zur Spalte j wird die j-te Zeile mit einem Faktor multipliziert, zu jeder anderen Zeile ein Vielfaches der j-ten Zeile addiert.

Durch Multiplikation mit einer Permutationsmatrix zu den Indizes μ, ν werden die μ-te und die ν-te Zeile ausgetauscht.

Wählen wir nun unsere Werte γ_{ij} der Eliminationsmatrix speziell mit den Elementen α_{ik} der k-ten Spalte von A, wobei wir $\alpha_{jk} \neq 0$ annehmen, als

$$\gamma_{ij} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_{jk}} & \text{wenn } i = j \\ -\frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{jk}} & \text{wenn } i \neq k \end{cases}$$

und betrachten speziell die Elemente α'_{ik} der k-ten Spalte von LA, so folgt

$$\alpha'_{ik} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha_{jk}} \cdot \alpha_{jk} = 1, & \text{wenn } i = j \\ \alpha_{ik} - \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{jk}} \cdot \alpha_{jk} = 0, & \text{wenn } i \neq j \end{cases}$$

d.h. in der k-ten Spalte von LA steht genau in Zeile j eine 1, in den übrigen eine 0.

Damit können wir nun durch sukzessive Multiplikation von links mit geeigneten Permutations- und Eliminationsmatrizen jede Matrix auf die sogenannte GAUSS-JORDAN-Form bringen.

Definition M.10 *Eine Matrix $C \in K^{n\times m}, C = (\gamma_{ij})$ hat "*GAUSS-JORDAN-*Form", wenn gilt: Es gibt Indizes $1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_r \leq m$, so daß für die Spalten $c_{.j}$ von C gilt:*

$$c_{.j} \quad \begin{cases} = e_\rho & \textit{falls für ein } \rho \ \leq r, j = k_\rho \\ \in \operatorname{span}(e_1, ..., e_\rho) & \textit{falls } j < k_{\rho+1} \ (0 \leq \rho < r) \\ \in \operatorname{span}(e_1, ..., e_r) & \textit{falls } k_r < j \end{cases}$$

Die k_ρ heißen Pivot-Indizes.

Ein typisches Beispiel für eine Matrix in Gauß-Jordan-Form ist

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & \times & 0 & \times & \times & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \times & \times & 0 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \times & \times \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Die Pivot-Indizes sind

$$k_1 = 2,\ k_2 = 4,\ k_3 = 7,\ k_4 = 8,$$

mit x sind nicht weiter bekannte Eintragungen bezeichnet.

Aber auch die Einheitsmatrix I_n und die Nullmatrix 0 sind in Gauß-Jordan-Form.

Wir können nun jedes Gleichungssystem $AX = B$ mittels der in Satz M.8 beschriebenen äquivalenten Umformung auf ein System $\hat{A}X = \hat{B}$ bringen, in dem $\hat{A}$ Gauß-Jordan-Form hat. Dies tun wir durch schrittweise Multiplikation mit Permutations- bzw. Eliminationsmatrizen. Das dafür im folgenden beschriebene Verfahren heißt

Gauss-Jordan-Elimination *Setze $A^{(0)} := A$, $B^{(0)} := B$. Setze $k_0 := 0$ und $r :=$ 0. Es seien $\alpha_{ij}^{(r)}$ die Elemente in $A^{(r)} \in K^{n\times m}$.*

(i) *Suche ein Element* $\alpha_{ij}^{(r)} \neq 0$ *mit* $i > r,\ j > k_r$:
Gibt es kein solches, so ist der Algorithmus mit $\hat{A} := A^{(r)}$, $\hat{B} := B^{(r)}$ *beendet.*
Gibt es ein solches, so setze

$$k_{r+1} := \min\{j | j > k_r \wedge \exists_{i>r} \alpha_{ij}^{(r)} \neq 0\},$$
$$\mu := \min\{i | i > r \wedge a_{ik_{r+1}}^{(r)} \neq 0\}.$$

Weiter bei 2.

(ii) *Vertausche in* $A^{(r)}$ *und in* $B^{(r)}$ *Zeile* $r+1$ *mit Zeile* μ. *Die neuen Matrizen seien* $\hat{A}^{(r)}$ *und* $\hat{B}^{(r)}$.
Man beachte, daß in Zeile $r+1$ *von* $\hat{A}^{(r)}$ *das Element in der Spalte* k_{r+1} *nun* $\neq 0$ *ist, d.h.* $\hat{\alpha}_{r+1,k_{r+1}}^{(r)} \neq 0$ *und alle Elemente davor* $= 0$ *sind, d.h.* $\hat{\alpha}_{r+1,j}^{(r)} = 0$ *für* $1 \leq j < k_{r+1}$.
Weiter bei 3.

(iii) *Wähle die Eliminationsmatrix* L *so, daß in* $L\hat{A}^{(r)}$ *die Spalte mit der Nummer* k_{r+1} *zum Einheitsvektor* e_{r+1} *wird. Setze* $A^{(r+1)} := L\hat{A}^{(r)}$, $B^{r+1} := L\hat{B}^{(r)}$, $r := r+1$ *und weiter bei (1).*

Die Matrix L braucht man dabei gar nicht explizit zu kennen. Man hat lediglich in $A^{(r)}$ *und* $B^{(r)}$ *simultan* folgendes zu tun:

1. Wähle $\gamma := \frac{1}{\hat{\alpha}_{r+1,k_{r+1}}^{(r)}}$ und multipliziere jedes Element der $(r+1)$-ten Zeile mit dem Faktor γ.

2. Für $i = 1, ..., n,\ i \neq r+1$ wähle $\gamma_i := \hat{\alpha}_{i,k_r+1}^{(r)}$ und ersetze die i-te Zeile durch (i-te Zeile) - $\gamma_i \cdot ((r+1))$ -te Zeile).

Dann wird die k_{r+1} -te Spalte zum Einheitsvektor und, da alle Elemente der $(r+1)$ -ten Zeile vor der Spalte k_{r+1} in $\hat{A}^{(r+1)}$ schon $= 0$ sind, wird an diesen Spalten nichts geändert.

Da bei den einzelnen Schritten jedesmal mit einer invertierbaren Matrix multipliziert wurde und das Produkt invertierbarer Matrizen wieder invertierbar ist, haben wir also

Satz M.11 *Zu jedem Gleichungssystem* $AX = B$ *gibt es eine invertierbare Matrix* C, *so daß mit* $\hat{A} := CA$, $\hat{B} := CB$ *in dem äquivalenten System* $\hat{A}X = \hat{B}$ *die Matrix* $\hat{A}$ *in Gauß-Jordan-Form ist.*

Zur praktischen Durchführung schreibe man die beiden Matrizen A und B zweckmäßigerweise durch einen senkrechten Strich getrennt nebeneinander und wende die in (2) bzw. (3) beschriebenen Zeilenoperationen jeweils auf die volle Zeile dieser Matrix $(A|B)$ an.

Achtung *Die unter (1) auszuwählenden Elemente dürfen nur in der A-Matrix, also nur links vom Strich gesucht werden.*

Betrachten wir Spezialfälle:

Sei $A \in K^{n \times n}$. *Ist* A *invertierbar?*

Wir untersuchen das System $AX = I$ mit $I = I_n$.

GAUSS-JORDAN-Elimination liefert ein invertierbares C, so daß dies aequivalent ist zu $CAX = C$ wobei $\hat{A} := CA$ in GAUSS-JORDAN-Form.

1. Fall: $\hat{A} = I_n$: Dann haben wir $I_n X = C$, d.h. $X = C$.

Somit ist $AX = I$ lösbar und die invertierbare Matrix $X(= C)$ ist Lösung von $AX = I$, d.h. $AC = I$. Nach Satz M.7 ist dann auch A invertierbar und $A^{-1} = C$.

Geht also bei GAUSS-JORDAN*-Elimination* $AX = I$ *über in* $IX = C$*, so ist* $C = A^{-1}$.

2. Fall: $\hat{A} \neq I_n$: Ohne Beweis sei vermerkt, daß dann A *nicht* invertierbar ist. Wir werden dies später noch genauer untersuchen.

Sei $A \in K^{n\times m}, b \in K^{n\times 1}$*, gesucht* $x \in K^{m\times 1}$*, so daß* $Ax = b$.

Wir haben also ein Gleichungssystem mit n Gleichungen in m Unbekannten.

Wir führen GAUSS-JORDAN-Elimination aus und erhalten $\hat{A}x = \hat{b}$.

Es seien

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_m \end{pmatrix}, \quad \hat{b} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix},$$

und $1 \leq k_1 < k_2 < ... < k_r \leq m$ die Pivot-Indizes von $\hat{A} = (\hat{\alpha}_{ij})$. Dann erhält man aus der speziellen Form von $\hat{A}$:

Die Zeilen von $\hat{A}$ mit Nummern $> r$ sind alle $= 0$. Somit folgt:

1. Ist für ein $i > r$ ein $\beta_i \neq 0$, so ist das System $\hat{A}x = \hat{b}$ und damit auch das System $Ax = b$ nicht lösbar.

2. Sei also für alle $i > r : \beta_i = 0$. Dann ist das System $\hat{A}x = \hat{b}$ lösbar.

   Eine Lösung ist

$$\xi_j = \begin{cases} 0 & \text{wenn } j \notin \{k_1, ..., k_r\} \\ \beta_\rho & \text{wenn } j = k_\rho, \ (\rho = 1, ..., r). \end{cases}$$

   Sofern $r < m$, d.h. nicht alle Spalten Pivotspalten sind, erhält man alle Lösungen auf folgende Weise:

   Wähle für $j \notin \{k_1, ..., k_r\}$ irgendwelche Werte ξ_j^0. Dann ist

$$\xi_j := \begin{cases} \xi_j^0 & \text{wenn } j \notin \{k_1, ..., k_r\} \\ \beta_\rho - \sum_{\mu \notin \{k_1,...,k_r\}} \xi_\mu^0 \cdot \hat{\alpha}_{\rho\mu} & \text{wenn } j = k_\rho \end{cases}$$

   eine Lösung.

   Auch dies werden wir noch genauer untersuchen.