Q Quotienten und direkte Summen von Vektorräumen

Wir haben bisher Vektorräume kennengelernt wie die Räume aus geometrischen Vektoren, aus Polynomen, Matrizen etc., also Mengen aus Elementen mit schönen Eigenschaften, aus denen wir dann die Vektorraumstruktur als einen begrifflichen Oberbau ablesen konnten. Wir wollen nun eine radikal anderen Standpunkt einnehmen: Im Vordergrund steht die Struktur und wir schaffen uns Objekte, die diese Struktur tragen. Zunächst zeigen wir, daß sich (fast) jede Menge zu einem Vektorraum machen läßt:

Satz Q.1 (Strukturtransfer) *Es sei V ein K-Vektorraum, W eine Menge und $\varphi : V \to W$ eine Bijektion. Wir definieren in W Operationen $+ : W \times W \to W$ und $\cdot : K \times W \to W$, sowie ein Element $0 \in W$ durch*

$$\begin{aligned} w + w' &:= \varphi(\varphi^{-1}(w) + \varphi^{-1}(w')) \\ \alpha \cdot w &:= \varphi(\alpha\varphi^{-1}(w)) \qquad\qquad w, w' \in W,\ \alpha \in K \\ 0 &:= \varphi(0). \end{aligned}$$

Dann ist W mit diesen Daten ein K-Vektorraum und φ ein Isomorphismus zwischen Vektorräumen.

Beweis: Von den Vektorraum-Axiomen für W zeigen wir exemplarisch die Assoziativität.

Für $x, y, z \in W$ ist

$$\begin{aligned} (x + y) + z &= \varphi(\varphi^{-1}(x + y) + \varphi^{-1}(z)) \\ &= \varphi(\varphi^{-1}(\varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y))) + \varphi^{-1}(z)) \\ &= \varphi(\varphi^{-1}(x) + \varphi^{-1}(y) + \varphi^{-1}(z)) \end{aligned}$$

und dasselbe bekommt man für $x + (y + z)$.

Wendet man auf die definierenden Gleichungen φ^{-1} an, so erhält man

$$\begin{aligned} \varphi^{-1}(w + w') &= \varphi^{-1}(w) + \varphi^{-1}(w'), \\ \varphi^{-1}(\alpha \cdot w) &= \alpha\varphi^{-1}(w) \\ \varphi^{-1}(0) &= 0. \end{aligned}$$

Somit ist $\varphi^{-1} \in \mathrm{Hom}(W, V)$ und, da φ bijektiv ist, ist also φ^{-1} und damit auch φ selbst ein Isomorphismus. □

Quotienten

Diese Methode nutzen wir nun, um uns neue Vektorräume mit bestimmten Eigenschaften zu schaffen, zunächst den *Quotientenraum*.

Ist V ein Vektorraum, U ein Unterraum mit Basis $(b_1, \ldots, b_n)$, so können wir diese Basis i. a. auf vielerlei Weisen zu einer Basis $(b_1, \ldots, b_n, b_{n+1}, \ldots, b_m)$ von V ergänzen und jedesmal sind $U = \mathrm{span}(b_1, \ldots, b_n)$ und $W := \mathrm{span}(b_{n+1}, \ldots, b_m)$ komplementäre Unterräume von V, für die also insbesondere $U \cap W = (0)$ und $U + W = V$. Natürlich sind alle so entstehenden Räume W isomorph. Wir wollen nun uns einen solchen Raum W schaffen, der genau die wichtigen Eigenschaften von allen diesen Räumen besitzt, aber nicht den Zufälligkeiten einer Basiswahl unterliegt. Dies wird uns den sog. Quotientenraum V/U liefern.

Konstruktion Q.2 *Es sei V ein Vektorraum, dazu U ein Unterraum. Zu jedem $v \in V$ bilden wir die Menge*

$$\overline{v} := v + U := \{v + u \mid u \in U\} \subset V$$

und erklären $V/U := \{\overline{v} \mid v \in V\}$. Dies ist die Trägermenge des sog. Quotienten von V nach U.

Wir werden nun diese Menge zu einem Vektorraum machen und dabei die eingangs geschilderte Idee des Strukturtransfers nutzen, wenngleich wir hier etwas geschickter vorgehen müssen. Zunächst betrachten wir zwei solche Klassen $\overline{v}_1, \overline{v}_2$. Sie sind stets entweder disjunkt oder identisch. Genauer gilt

Lemma Q.3 *Für $v_1, v_2 \in V$ gilt*

$$\overline{v}_1 \cap \overline{v}_2 \neq \emptyset \Leftrightarrow v_1 - v_2 \in U \Leftrightarrow \overline{v}_1 = \overline{v}_2.$$

Insbesondere ist dann $\overline{v} = \overline{0}$ genau wenn $v \in U$.

Beweis: Ist $\overline{v}_1 \cap \overline{v}_2 \neq \emptyset$, so existiert ein $x \in \overline{v}_1 \cap \overline{v}_2$ und damit gibt es $u_1, u_2 \in U$, sodaß $x = v_1 + u_1 = v_2 + u_2$, also auch $v_1 - v_2 = u_2 - u_1 \in U$.

Ist $v_1 - v_2 = u_0 \in U$, so ist $v_1 = v_2 + u_0$ und somit $\overline{v}_1 = \{v_1 + u \mid u \in U\} = \{v_2 + u_0 + u \mid u \in U\}$ und, da $u_0 \in U$ und mit u auch $u_0 + u$ jeweils ganz U durchläuft, ist die zuletzt erhaltene Menge gerade $\overline{v}_2$.

Ist schließlich $\overline{v}_1 = \overline{v}_2$, so ist trivialerweise ihr Durchschnitt nicht leer, da ja beide Mengen nicht leer sind. □

Jedes $\overline{v}$ ist eine Teilmenge von V, also ein Element der sog. "Potenzmenge" von V, die eben aus allen Teilmengen von V besteht. Von dieser letzten Aussage vergessen wir nun alles, was das individuelle Aussehen dieser Elemente angeht, und behalten nur, daß die $\overline{v}$ Elemente einer gewissen Menge sind, die wir oben schon mit V/U bezeichnet hatten.

Wir betrachten nun die Abbildung

$$\pi : V \to V/U : v \mapsto \overline{v}.$$

Lemma Q.4 *Diese Funktion π ist (nach Konstruktion) surjektiv und (nach Lemma Q.3) gilt*

$$\pi(v_1) = \pi(v_2) \;\Leftrightarrow v_1 - v_2 \in U.$$

Nun haben wir eine ähnliche Situation wie bei Satz Q.1. Wir haben einen Vektorraum V, eine Menge $W := V/U$ und eine Funktion $\pi : V \to V/U$, die allerdings nicht mehr bijektiv ist, dafür aber die Eigenschaft von Lemma Q.4 besitzt. Dies reicht wieder aus, um U/V zu einem Vektorraum und π zu einem Homomorphismus zu machen. Damit letzteres eintritt, müssen die Operationen $\oplus, \alpha\odot$ in V/U so erklärt sein, daß für alle $v, v_1, v_2 \in V$, und alle $\alpha \in K$ gilt

$$\begin{aligned} \pi(v_1 + v_2) &= \pi(v_1) \oplus \pi(v_2) \\ \pi(\alpha v) &= \alpha \odot \pi(v) \\ \pi(0) &= \overline{0}, \end{aligned} \qquad (*)$$

wobei die letzte Gleichung natürlich durch die Definition von π schon gegeben ist.

Wenn wir nun versuchen, hieraus die Operationen in V/U zu definieren, so werden zwar alle Elemente von V/U erfaßt, da π ja surjektiv ist. Aber π ist nicht injektiv, d.h. verschiedene v_1, v_2 können das selbe Bild $\pi(v_1) = \pi(v_2)$ haben, sodaß zunächst nicht klar ist, ob sich durch $(*)$ überhaupt Operationen definieren lassen. Dies geht genau dann, wenn gilt

1. Ist $\pi(v_1) = \pi(v_1')$ und $\pi(v_2) = \pi(v_2')$, so ist $\pi(v_1 + v_2) = \pi(v_1' + v_2')$ und
2. Ist $\pi(v) = \pi(v')$, so ist $\pi(\alpha v) = \pi(\alpha v')$.

Lemma Q.4 sichert uns nun, daß dies geht:

Denn nach Lemma Q.4 folgt aus $\pi(v_i) = \pi(v_i')$, daß $v_i - v_i' \in U$ $(i = 1, 2)$. Dann ist aber auch $v_1 - v_1' + v_2 - v_2' = (v_1 + v_2) - (v_1' + v_2') \in U$ und somit $\pi(v_1 + v_2) = \pi(v_1' + v_2')$. Ferner folgt aus $\pi(v) = \pi(v')$, daß $v - v' \in U$, damit auch $\alpha v - \alpha v' \in U$, also auch $\pi(\alpha v) = \pi(\alpha v')$. Durch $(*)$ sind also tatsächlich Operationen in V/U definiert. Daß sie V/U zu einem Vektorraum machen, prüft man durch eine langweilige Rechnung, die wir übergehen. Schließlich sichert $(*)$ auch, daß π ein Homomorphismus ist.

Künftig bezeichnen wir die eben eingeführten Operationen in V/U einfach mit $+, \cdot, 0$. Wir fassen zusammen:

Definition und Satz Q.5 (Quotientenraum) *Es sei V ein Vektorraum, U ein Unterraum. Der eben konstruierte Vektorraum V/U heißt Quotientenraum (gelesen V nach U), der surjektive Homomorphismus $\pi : V \to V/U$ heißt kanonischer Epimorphismus. Es gelten*

(i) $\ker \pi = U$.

(ii) Ist W irgendein Vektorraum und $\varphi : V \to W$ ein Homomorphismus mit $U \subset \ker \varphi$, so gibt es genau einen Homomorphismus $\psi : V/U \to W$, mit $\varphi = \psi \circ \pi$.

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, phantom, "\subset"] & V \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "\pi"'] & W \\ & V/U \arrow[ur, dashed, "\psi"'] & \end{tikzcd}$$

(iii) Dieser Homomorphismus ist genau dann injektiv, wenn $\ker \varphi = \ker \pi$.

(iv) Der Raum V/U ist durch die "universelle" Eigenschaft (ii) bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt; d.h. ist Q ein Vektorraum, $\pi' : V \to Q$ ein Homomorphismus mit $U = \ker \pi'$, sodaß gilt: Für jeden Vektorraum W und jeden Homomorphismus $\varphi : V \to W$ mit $U \subset \ker \varphi$ gibt es genau ein $\psi \in \mathrm{Hom}(Q, W)$ mit $\varphi = \psi \circ \pi'$, so sind Q und V/U isomorph.

Beweis: Zu (i): Es ist $\pi(0) = 0$ und $\pi(v) = \pi(0)$ genau wenn $v - 0 \in U$, d.h. wenn $v \in U$. Damit ist $\ker \pi = U$.

Zu (ii): Es sei $\varphi : V \to W$ mit $U \subset \ker \varphi$ gegeben. Dann gilt für $v_1, v_2 \in V$:

Ist $\pi(v_1) = \pi(v_2)$, so ist $v_1 - v_2 \in U \subset \ker \varphi$ und damit $\varphi(v_1 - v_2) = 0$, d.h. $\varphi(v_1) = \varphi(v_2)$. Da zudem π surjektiv ist, haben wir also durch $\psi(\pi(v)) := \varphi(v)$ eine wohldefinierte Abbildung $\psi : V/U \to W$ erklärt. Nun ist

$$\begin{aligned} \psi(\pi(v_1) + \pi(v_2)) &= \psi(\pi(v_1 + v_2)) = \varphi(v_1 + v_2) \\ &= \varphi(v_1) + \varphi(v_2) = \psi(\pi(v_1)) + \psi(\pi(v_2)), \\ \psi(\alpha\pi(v)) &= \psi(\pi(\alpha v)) = \varphi(\alpha v) = \alpha\varphi(v) = \alpha\psi(\pi(v)), \end{aligned}$$

womit also $\psi \in \mathrm{Hom}(V/U, W)$ ist. Da wir ja $\psi \circ \pi = \varphi$ fordern, ist dieses ψ wegen der Surjektivität von π auch der einzige Homomorphismus mit den gewünschten Eigenschaften.

Zu (iii): Es ist $\psi \circ \pi = \varphi$, somit $x \in \ker \varphi$ genau, wenn $x \in \ker(\psi \circ \pi)$, d.h. genau, wenn $\psi(\pi(x)) = 0$.

Ist ψ injektiv, so ist $\psi(\pi(x)) = 0$ genau, wenn $\pi(x) = 0$, also genau, wenn $x \in \ker \pi$. Also ist in diesem Falle $\ker \varphi = \ker \pi$.

Ist $\ker\varphi = \ker\pi$, so ist $\psi(\pi(x)) = 0$ genau, wenn $\pi(x) = 0$, und da π ja surjektiv ist, also $\psi(\overline{v}) = 0$ genau, wenn $\overline{v} = 0$, was die Injektivität von ψ zeigt.

Zu (iv): Wir haben die rechts stehende Situation:
Zunächst benutze (ii) mit $W := Q, \varphi := \pi'$. Dies liefert $\psi : V/U \to Q$ mit $\pi' = \psi \circ \pi$.
Dann benutze (ii) mit $W := V/U, \varphi := \pi$. Dies liefert $\psi' : Q \to V/U$ mit $\pi = \psi' \circ \pi'$. Dann haben wir $\psi' \circ \psi : V/U \to V/U$ mit $\psi' \circ \psi \circ \pi = \psi' \circ \pi' = \pi = \mathrm{id}_{V/U} \circ \pi$ und analog $\psi \circ \psi' : Q \to Q$ mit $\psi \circ \psi' \circ \pi' = \psi \circ \pi = \pi' = \mathrm{id}_Q \circ \pi'$.
Nun verwende man (ii) mit $W := V/U, \varphi := \pi$. Dann gibt es genau einen Homomorphismus $\chi : V/U \to V/U$ mit $\chi \circ \pi = \pi$. Es sind $\psi' \circ \psi$ und $\mathrm{id}_{V/U}$ solche. Somit müssen sie identisch sein, d.h. es ist $\psi' \circ \psi = \mathrm{id}_{V/U}$. Analog erhält man $\psi \circ \psi' = \mathrm{id}_Q$. Also sind $\psi \in \mathrm{Hom}(V/U, Q)$ und $\psi' \in \mathrm{Hom}(Q, V/U)$ zueinander inverse Isomorphismen.

$$\begin{tikzcd} & U \arrow[d, phantom, "\cap"] & \\ & V \arrow[dl, "\pi"'] \arrow[dr, "\pi'"] & \\ V/U \arrow[rr, dashed, bend right, "\psi"'] & & Q \arrow[ll, dashed, bend right, "\psi'"'] \end{tikzcd}$$

□

Bemerkung Q.6 *Wesentlich an diesem Quotientenraum ist nicht die Art, wie wir ihn konstruiert haben, d.h. wie seine Elemente aussehen, sondern allein die Charakterisierung durch die universelle Eigenschaft. Sie legt den Raum nur bis auf Isomorphie fest, d.h. je zwei Räume mit dieser Eigenschaft sind isomorph und – das sollten Sie selbst beweisen – jeder zu V/U isomorphe Raum hat diese Eigenschaft. Das Charakterisieren bis auf Isomorphie bedeutet gerade, daß wir von allen speziellen Eigenschaften der Elemente absehen können, aber auch umgekehrt, wenn es gerade paßt, uns für bestimmte Zwecke einen besonders geeigneten Raum aus dieser Isomorphieklasse auswählen können.*

1

Direkte Summen

Ist $(b_1, \dots b_m)$ eine Basis von V und $U := \mathrm{span}(b_1, \dots b_n)$, $U' := \mathrm{span}(b_{n+1}, \dots b_m)$, so hat U' die universelle Eigenschaft des Quotienten: Wählen Sie dazu $\pi : V \to U'$ als die Projektion: $v := \sum_1^m \alpha_i b_i \mapsto \sum_{n+1}^m \alpha_i b_i$ und definieren Sie zu gegebenem $\varphi : V \to W$ mit $U \subset \ker\varphi$ den Homomorphismus $\psi : U' \to W$ über $\psi(b_i) := \varphi(b_i)$, $i = n+1, \dots, m$. Dann muß man noch nachrechnen, daß damit die universelle Eigenschaft gegeben ist. Somit ist dann U' isomorph zu V/U.

Andrerseits sind U und U' komplementäre Räume in V, d.h. es ist $V = U \oplus U'$ als direkte Summe. Diesen Begriff der direkten Summe wollen wir nun derart verallgemeinern, daß die beteiligten Räume nicht mehr a priori Unterräume des selben Raumes V sein müssen, wir also insbesondere bei den Summanden zu isomorphen übergehen können. Ein solcher erweiterter Begriff der direkten Summe liefert dann etwa eine Formel der Art

$$V = U \oplus V/U.$$

Dabei wollen wir *nicht* von den Elementen der beteiligten Räume ausgehen, sondern wieder von einer universellen Eigenschaft. Um sie herzuleiten, greifen wir kurz auf den alten Begriff der direkten Summe und das “Anfassen” von Elementen zurück.

Es sei wieder $(b_1, \dots b_m)$ eine Basis von V und $U := \mathrm{span}(b_1, \dots b_n)$, $U' := \mathrm{span}(b_{n+1}, \dots b_m)$. Dann ist $V = U \oplus U'$ und $U \subset V$, $U' \subset V$, wodurch recht triviale injektive Homomorphismen $\eta : U \to V$, und $\eta' : U' \to V$ gegeben sind, die eben an den Elementen jeweils gar nichts ändern.

Ist nun X irgendein Vektorraum und sind $\varphi : U \to X$ und $\varphi' : U' \to X$ irgendwelche Homomorphismen, so gibt es immer genau einen Homomorphismus $\psi : V \to X$, sodaß

$$\psi \circ \eta = \varphi,\ \psi \circ \eta' = \varphi'.$$

Daß dies so ist, kann man folgendermaßen sehen: Damit $\psi \circ \eta = \varphi$ auf U ist, muß sein $\psi(u) = \varphi(u)$ und auf U' analog $\psi(u') = \varphi'(u')$. Damit ψ ein Homomorphismus ist, muß notwendig

$$\psi(u + u') = \psi(u) + \psi(u') = \varphi(u) + \varphi(u')$$

gelten. Nach Konstruktion hat jedes $v \in V$ eine eindeutige Darstellung als $v = u+u'$ mit $u \in U, u' \in U'$. Somit ist also ψ auf ganz V eindeutig festgelegt und – trivial nachzurechnen – ein Homomorphismus.

Dies nutzen wir nun zu folgender

Definition Q.7 (Direkte Summe)

Es seien V ein Vektorraum, $(V_i \mid i \in I)$ eine Familie von Vektorräumen und $(\eta_i \mid i \in I)$ eine Familie von Homomorphismen $\eta_i : V_i \to V$, $i \in I$. Dann heißt V direkte Summe der V_i : $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$, wenn gilt: Für jeden Vektorraum W und jede Familie von Homomorphismen $(\varphi_i \mid i \in I)$ mit $\varphi_i : V_i \to W$ gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi : V \to W$, sodaß für alle $i \in I$ gilt $\varphi \circ \eta_i = \varphi_i$. (∗∗)

$$\begin{tikzcd} V_i \arrow[d, "\eta_i"'] \arrow[dr, "\varphi_i"] & \\ V \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & W \end{tikzcd}$$

An dem Spezialfall haben wir gesehen, daß es so etwas geben kann. Wir werden gleich für den allgemeinen Fall eine direkte Summe konstruieren.

Zunächst zeigen wir die Eindeutigkeit

Satz Q.8 *Die direkte Summe ist bis auf Isomorphie eindeutig bestimmt.*

Beweis: Es sei V direkte Summe der $(V_i \mid i \in I)$ mit den zugehörigen Homomorphismen $\eta_i : V_i \to V$, ferner V' direkte Summe der $(V_i \mid i \in I)$ mit den Homomorphismen $\eta_i' : V_i \to V'$. Wir haben zu zeigen, daß V und V' isomorph sind. Dieser Beweis verläuft exakt nach dem selben Schlußschema, wie der entsprechende Beweis beim Quotientenraum:

1. Es liefert (∗∗) für V und die η_i mit $W := V', \varphi_i := \eta_i'$ einen Homomorphismus $\varphi : V \to V'$, sodaß für alle i gilt $\varphi \circ \eta_i = \eta_i'$.

2. Es liefert (∗∗) für V' und die η_i' mit $W := V, \varphi_i := \eta_i$ einen Homomorphismus $\varphi' : V' \to V$, sodaß für alle i gilt $\varphi' \circ \eta_i' = \eta_i$.

Dann haben wir also jeweils für alle $i \in I$

$$\begin{array}{lll} \varphi' \circ \varphi : & V \to V & \text{mit } \varphi' \circ \varphi \circ \eta_i = \varphi' \circ \eta_i' = \eta_i \\ \varphi \circ \varphi' : & V' \to V' & \text{mit } \varphi \circ \varphi' \circ \eta_i' = \varphi \circ \eta_i = \eta_i'. \end{array}$$

3. Nun verwenden wir (∗∗) für V und die η_i mit $W := V, \varphi_i := \eta_i$. Dies liefert genau ein $\chi : V \to V$, sodaß für alle i damit $\chi \circ \eta_i = \eta_i$. Wie gezeigt ist $\varphi' \circ \varphi$ ein solcher Homomorphismus und offenbar auch die Identität id_V . Da es nur eine solchen gibt, muß also $\varphi' \circ \varphi = \mathrm{id}_V$ sein. Völlig analog folgt $\varphi \circ \varphi' = \mathrm{id}_{V'}$, womit dann φ und φ' als zueinander inverse Isomorphismen zwischen V und V' erkannt sind.

□

Satz Q.9 *Zu jeder Familie* $(V_i \mid i \in I)$ *von Vektorräumen existiert deren direkte Summe* $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$.

Beweis: Wir gehen aus von einer Familie $(V_i \mid i \in I)$ von Vektorräumen. Dazu bilden wir

$$V := \{(v_i \mid i \in I),\ \text{wobei } v_i \in V_i,\ \text{aber } v_i \neq 0 \text{ nur endlich oft.}\}$$

Dies sind also alle – bei endlichem I dann auch selbst endlichen – Folgen, deren i-tes Element aus dem i-ten Raum genommen ist, aber, und das ist bei unendlichem I wichtig, nur endlich viele dieser v_i nicht das Nullelement des jeweiligen Raumes sind. In V erklären wir nun Operationen und ein Nullelement, indem wir komponentenweise auf die entsprechenden Operationen bzw. das Nullelement des entsprechenden Raumes V_i zurückgreifen:

$$\begin{array}{llr@{\ }l}
+\ \ : V \times V \to V & \text{durch} & (v_i \mid i \in I) + (v_i' \mid i \in I) & := (v_i + v_i' \mid i \in I),\\
\alpha\cdot\ \ : K \times V \to V & \text{durch} & \alpha \cdot (v_i \mid i \in I) & := (\alpha v_i \mid i \in I),\\
0 \in V & \text{durch} & 0 & := (0_i \mid i \in I).
\end{array}$$

Mit diesen Operationen ist V ein Vektorraum.

Die Homomorphismen $\eta_i : V_i \to V$ definieren wir durch

$$x \in V_i : \eta_i(x) := (\delta_{ij}(x) \mid j \in I),\ \text{wobei } \delta_{ij}(x) := \begin{cases} 0 \in V_j & \text{wenn } j \neq i,\\ x \in V_i & \text{wenn } j = i.\end{cases}$$

Jedes $v = (v_i \mid i \in I) \in V$ hat damit eine eindeutige Darstellung als

$$v = \sum_{i\in I} \eta_i(v_i), \qquad (***)$$

wobei, falls die Menge I nicht endlich ist, dies als Abkürzung für die Summation über die endlich vielen $i \in I$, für die $v_i \neq 0$ ist, zu lesen ist.

Wir zeigen nun die universelle Eigenschaft. Es seien ein Vektorraum W und eine Familie $(\varphi_i \mid i \in I)$ von Homomorphismen $\varphi_i : V_i \to W$ gegeben. Ist $\varphi : V \to W$ ein Homomorphismus mit $\varphi \circ \eta_i = \varphi_i, (i \in I)$, so ist wegen $(***)$ notwendig für jedes $v = (v_i \mid i \in I) \in V$:

$$\varphi(v) = \varphi(\sum_{i\in I} \eta_i(v_i)) = \sum_{i\in I} (\varphi \circ \eta_i)(v_i) = \sum_{i\in I} \varphi_i(v_i),$$

wobei es sich de facto immer um endliche Summen handelt, sodaß dadurch φ eindeutig festgelegt ist.

Offensichtlich liefert die Festsetzung

$$\varphi(\sum_{i\in I} \eta_i(v_i)) := \sum_{i\in I} \varphi_i(v_i)$$

auch einen Homomorphismus, womit die universelle Eigenschaft gezeigt ist. □

Ist $V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ mit Injektionen $\eta_i : V_i \to V$, so sind natürlich die Bildräume $V_i' := \eta_i(V_i) \subset V$ Unterräume von V. Sie bilden V als direkte Summe im Sinne der schon früher gegebenen Definition:

Satz Q.10 *Jedes* $v \in V = \bigoplus_{i\in I} V_i$ *hat eine eindeutige Darstellung als*

$$v = \sum_{i\in I} \eta_i(v_i),$$

wobei stets $v_i \in V_i$ *und höchstens endlich oft* $v_i \neq 0$ *ist.*

Beweis: Für die eben konstruierte direkte Summe ist dies gerade die Eigenschaft $(***)$. Da sich entsprechende direkte Summen isomorph sind, überträgt sich dies auf den allgemeinen Fall. $\square$

Weiterhin kann man direkte Summen auch als Verallgemeinerung des Basisbegriffs ansehen.

Satz Q.11 *Ist V ein K-Vektorraum mit Basis $(b_i \mid i \in I)$, so ist $V = \bigoplus_{i \in I} K$.*

Beweis: K ist ein eindimensionaler K-Vektorraum. Wir bilden die Homomorphismen

$$\eta_i : K \to V : \ \eta_i(\alpha) = \alpha \cdot b_i, \quad (i \in I, \alpha \in K).$$

Für sie ist offenbar $\eta_i(1) = b_i$. Sind nun ein Raum W und Homomorphismen $\varphi_i : K \to W$ $(i \in I)$ gegeben, sodaß $\varphi \circ \eta_i = \varphi_i$, so ist notwendig

$$\varphi_i(1) = (\varphi \circ \eta_i)(1) = \varphi(b_i).$$

Also ist notwendig φ der durch die Werte $\varphi_i(1)$ auf der Basis (b_i) eindeutig bestimmte Homomorphismus. Der erfüllt aber umgekehrt auch

$$(\varphi \circ \eta_i)(\alpha) = \varphi(\alpha b_i) = \alpha \varphi(b_i) = \alpha \varphi_i(1) = \varphi_i(\alpha),$$

sodaß $\varphi \circ \eta_i = \varphi_i$. Damit ist V als direkte Summe von $\#I$ vielen Exemplaren von K nachgewiesen. $\square$

Bemerkung Q.12 *Für $I = \{1, 2, \ldots, n\}$ sagt dieser Satz nichts anderes, als daß ein n-dimensionaler Vektorraum isomorph zum K^n ist.*

Mit analogen Überlegungen wie bei diesem Satz erhalten wir aus einer Basis allgemeinere Summendarstellungen:

Satz Q.13 *Es sei V ein Vektorraum mit Basis $(b_j \mid j \in J)$. Wir zerlegen die Menge J in eine Familie $(J_i \mid i \in I)$ von paarweise disjunkten Teilmengen $J_i \subset J$ und bilden die Unterräume $V_i := \operatorname{span}(b_j \mid j \in J_i)$ $(i \in I)$. Dann ist $V = \bigoplus_{i \in I} V_i$.*

Der Satz Q.11 etwas anders interpretiert liefert uns den Zugang zu dem überaus wichtigen Begriff des "freien Vektorraumes" über einer Menge B.

Ist nämlich B eine beliebige – sagen wir nichtleere – Menge, so können wir zu einem vorgegebenen Körper K die direkte Summe

$$V = \bigoplus_{b \in B} K$$

von $\#B$ vielen Exemplaren von K bilden. Die universelle Eigenschaft der direkten Summe bedeutet, daß wir injektive Homomorphismen $\eta_b : K \to V \quad (b \in B)$ haben, sodaß gilt: Sind W ein weiterer Vektorraum, dazu $\varphi_b : K \to W$, $(b \in B)$ Homomorphismen, so gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi : V \to W$ mit $\varphi \circ \eta_b = \varphi_b, \quad (b \in B)$.

Nun ist natürlich mit $v_b := \eta_b(1)$ für jedes $\alpha \in K$

$$\eta_b(\alpha) = \alpha \eta_b(1) = \alpha v_b$$

und analog mit $w_b := \varphi_b(1)$ dann

$$\varphi_b(\alpha) = \alpha \varphi_b(1) = \alpha w_b.$$

Die η_b, φ_b sind somit allein schon durch die v_b, w_b definiert, die wiederum über Funktionen

$$\begin{aligned} \eta : B \to V, &\quad b \mapsto v_b = \eta_b(1), \\ \lambda : B \to W, &\quad b \mapsto w_b = \varphi_b(1) \end{aligned}$$

beschrieben werden können. Dies führt uns zu folgender

Definition und Satz Q.14 (Freier Vektorraum über B)
Sei B eine Menge, V ein K-Vektorraum. Dann heißt V ein freier Vektorraum über B, wenn mit einer Funktion $\eta : B \to V$ gilt: Zu jedem Vektorraum W und jeder Funktion $\lambda : B \to W$ gibt es genau einen Homomorphismus $\varphi : V \to W$ mit $\varphi \circ \eta = \lambda$.

$$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "\eta"'] \arrow[dr, "\lambda"] & \\ V \arrow[r, dashed, "\varphi"'] & W \end{tikzcd}$$

Es gelten

(i) Zu jeder Menge B gibt es einen freien K-Vektorraum über B, der B als Basis enthält.

(ii) Je zwei freie K-Vektorräume über B sind isomorph.

Beweis: Wir konstruieren eine direkte Summe $V = \bigoplus_{b \in B} K$ mit Injektionen $\eta_b : K \to V, \quad (b \in B)$, und wählen $\eta : b \mapsto \eta_b(1), (b \in B)$. Dann ist nach obigem jedenfalls ein freier Vektorraum über B gefunden und über Satz Q.10 folgt, daß die Familie $(\eta_b(1) | b \in B)$ eine Basis von V ist. Nun ersetze man in der Menge V jedes Element $\eta_b(1)$ durch b – warum man das mit ein paar harmlosen flankierenden Maßnahmen immer machen kann, überlegen Sie mal selbst – und passe die Vektorraum-Operationen entsprechend an (Strukturtransfer.) Dann kann man B selbst als Teilmenge von V ansehen und hat damit B selbst als Basis. Die Eindeutigkeit bis auf Isomorphie geht immer nach dem selben Schema. □

Die direkte Summe von *endlich* vielen Räumen besitzt noch eine weitere Eigenschaft:

Satz Q.15 *Es sei $V = \bigoplus_{i=1}^{n} V_i$ mit Injektionen $\eta_i : V_i \to V$. Dann gibt es Epimorphismen $\pi_j : V \to V_j, \quad (j = 1, \dots, n)$ mit folgenden Eigenschaften:*

$$\pi_j \circ \eta_i = \delta_{ij} := \begin{cases} \mathrm{id}_{V_i} & j = i, \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

und für jeden Vektorraum W und je n Homomorphismen $\psi_i : W \to V_i$ gibt es genau einen Homomorphismus $\psi : W \to V$ mit $\psi_i = \pi_i \circ \psi, \quad (i = 1, \dots, n)$.

$$\begin{tikzcd} V_i & \\ V \arrow[u, "\pi_i"] & W \arrow[ul, "\psi_i"'] \arrow[l, dashed, "\psi"] \end{tikzcd}$$

Bemerkung Q.16 *Die letzt genannte Eigenschaft charakterisiert V als ein sog. "Produkt".*

Beweis: Die universelle Eigenschaft der direkten Summe für

$$W := V_j \text{ und } \varphi_i := \delta_{ji} = \begin{cases} \mathrm{id}_{V_i} & j = i, \\ 0 & j \neq i \end{cases}$$

bestimmt eindeutig Homomorphismen $\pi_j : V \to V_j$ mit $\pi_j \circ \eta_i = \delta_{ji}$. Ist nun $\psi : W \to V$ mit $\psi_i = \pi_i \circ \psi$ gegeben, so haben wir ja nach Satz Q.10 für jedes $w \in W$ mit Elementen $w_i \in V_i$ die eindeutige Darstellung

$$\psi(w) = \sum_{i=1}^{n} \eta_i(w_i).$$

Dafür ist dann

$$\begin{aligned}\psi_j(w) = (\pi_j \circ \psi)(w) &= \sum_{i=1}^{n} (\pi_j \circ \eta_i)(w_i) \\ &= \sum_{i=1}^{n} \delta_{ij}(w_i) = w_j.\end{aligned}$$

Folglich ist notwendig

$$\psi(w) = \sum_{i=1}^{n} (\eta_i \circ \psi_i)(w),$$

und dies beschreibt ja auch stets einen Homomorphismus, für den trivialerweise

$$\pi_j \circ \psi = \sum_{i=1}^{n} \pi_j \circ \eta_i \circ \psi_i = \psi_j$$

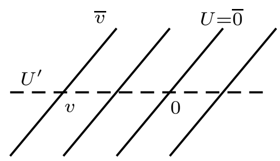
ist. $\square$

2

BQ Beispiele zu Quotienten und direkte Summen

1

BQ1: Bekanntlich gibt es den Körper F_2, der aus genau zwei Elementen 0 und 1 besteht, die dann auch die beiden neutralen Elemente bezüglich der Addition und der Multiplikation sind. Stellen Sie selbst die vollständigen Additions- und Multiplikationstabellen auf. Mit diesem Körper $K := F_2$ besteht dann der K^2 genau aus den vier Elementen $(0,0), (0,1), (1,0), (1,1)$. Ist nun W irgendeine Menge mit vier Elementen, etwa $W := \{1,2,3,4\}$, so gibt es viele Bijektionen $\varphi : K^2 \to W$ und jede macht über den Satz Q.1 daraus einen Vektorraum über dem Körper F_2. Führen Sie das mal genauer aus.



BQ2: Zur Konstruktion des Quotientenraumes ist vielleicht folgendes Beispiel hilfreich: Wir nehmen als Raum V die geometrische Ebene, als Unterraum U eine Gerade durch den Nullpunkt. Zu jedem Punkt v der Ebene ist dann die Menge $\overline{v} = v + U$ einfach die zu U parallele Gerade durch v. Der konstruierte Quotientenraum V/U besteht somit aus allen zu U parallelen Geraden. Zwei Geraden werden addiert, indem man in jeder Geraden einen beliebigen Punkt wählt, diese beiden Punkte wie üblich in der Ebene V addiert und die Gerade durch die Summe legt. Machen Sie sich klar, daß es tatsächlich völlig gleichgültig ist, welche Punkte auf den gegebenen Geraden Sie wählen. Insbesondere können Sie natürlich zunächst einen von U verschiedenen Unterraum U' wählen, der dann jede unserer Geraden genau einmal trifft und als Repräsentanten für die Geraden deren Schnitt mit U' nehmen. Überlegen Sie sich, daß der "Geraden-Raum" V/U und U' stets isomorph sind.

BQ3: Im Raum der reellen Polynome

$$\mathbb{R}[T] := \{p = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \mid a_i \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N};\}$$

betrachten wir zu einer festen Zahl $m \in \mathbb{N}$ den Unterraum

$$U := \{p = \sum_{i=0}^{n} a_i T^i \mid a_0 = a_1 = \ldots = a_m = 0.\}$$

und damit den kanonischen Epimorphismus $\pi : \mathbb{R}[T] \to \mathbb{R}[T]/U$. Dann ist also $\pi(p) = \pi(q)$ genau, wenn $p - q \in U$, d.h. wenn p und q auf dem "Anfangsstück bis zum Grad m" übereinstimmen. Schließen Sie daraus, daß $\mathbb{R}[T]/U$ isomorph ist zum Raum der Polynome vom Grad $\leq m$. Was bedeutet die universelle Eigenschaft hier?

Weiter bis

2

2

Die Überlegungen zur direkten Summe sehen wilder aus, als sie sind. Ist in einem Vektorraum V eine Familie $(V_i|i \in I)$ gegeben, sodaß sich jedes Element von V auf genau eine Weise als Summe von Elementen aus den V_i darstellen läßt, so ist $V = \bigoplus_i V_i$. Als η_i haben wir dann die Inklusionen $V_i \subset V$ und insgesamt haben wir den früher behandelten Begriff der direkten Summe wiedererhalten. Mit dem neuen Begriff können wir den Prozess umkehren und uns zu gegebenen V_i einen Raum schaffen, der dann – bis auf Isomorphie – die Eigenschaften des alten Begriffs hat. Studieren Sie das etwa an den folgenden Situationen.

BQ4: Es sei V direkte Summe der $(V_i|i \in I)$ und $(\eta_i|i \in I)$ die zugehörige Familie von Inklusionen. Dann sind die Räume $U_i := \eta_i(V_i)$ Unterräume von V und jedes Element von V ist eindeutig als Summe von Elementen der U_i darstellbar.

BQ5: Führen Sie dies im Detail aus an folgendem Beispiel:
Ist $n = n_1 + n_2 + \ldots + n_k$, so ist für jeden Körper K dann $K^n = K^{n_1} \oplus \ldots \oplus K^{n_k}$. Versuchen Sie dies notfalls erst mal für $k = 2$.

BQ6: Bei Differentialgleichungen tritt etwa folgendes Problem auf: Gesucht ist ein Funktion u, die im Innern eines Intervalles $[a, b]$ einer gewisen Differentialgleichung genügt und am Rand, d.h. auf $\{a, b\}$ zusammen mit gewissen Ableitungen vorgegebene Werte annimmt. Dabei sind also zu betrachten: Funktionen u, die auf (a, b) etwa k-mal stetig differenzierbar sind und die etwa m vielen Randwerte, z.B. $u(a), u(b), u'(a), u'(b), \ldots$. Dies können wir alles zu *einem* linearen Raum $C_k[a, b] \oplus \mathbb{R}^m$ zusammenfassen.

Zum freien Vektorraum sei noch eine Bemerkung gemacht. Da jeder Vektorraum eine Basis besitzt, ist jeder Vektorraum ein freier Vektorraum. Damit bringt uns dieser Begriff nur Bekanntes in neuer Form. Dies ändert sich jedoch, wenn wir von Vektorräumen etwa zu Algebren oder zu Moduln übergehen, wo die freien Objekte nur noch ein echter Teil aller Algeberen, Moduln, etc. sind. Umso wichtiger ist es, daß Sie die Charakterisierung freier Objekte über durch Homomorphismen formulierte universelle Eigenschaften am Beispiel der Vektorräume sorgfältig studieren, um sie dann bei komplizierteren Objekten handhaben zu können.