V Vektorräume

Im Vorkapitel hatten wir einige Beispiele von Vektorräumen kennengelernt, etwa die Ortsvektoren in der Ebene oder den $\mathbb{R}^2$ und den $\mathbb{R}^3$. Das Gemeinsame war, daß in allen drei Fällen die Regeln V1 bis V8 aus Satz O.3 galten, wobei zwei Operatonen vorkommen:

- Eine Addition $(+)$ von Vektoren, die wieder einen Vektor ergibt, und
- eine Multiplikation $(\cdot)$ von Vektoren mit Zahlen, was wieder einen Vektor ergibt. Von diesen Zahlen haben wir nur die in den Regeln R1 bis R10 von Fakt O.1 niedergelegten Eigenschaften benutzt.

Wir abstrahieren nun von diesen Beispielen, um zu einer allgemeinen Definition eines Vektorraumes über einem "Körper K" zu kommen. Ein solcher Körper ist eine mathematische Struktur, in der diese Regeln R1 bis R10 von Fakt O.1 gelten, also neben den reellen Zahlen beispielsweise die rationalen oder die komplexen (und noch viele andere!). Der Vollständigkeit halber geben wir nochmal eine abstrakte Definition.

Definition V.1 (Körper) *Ein Körper besteht aus einer Menge K, zwei ausgezeichneten Elementen $0, 1 \in K$ und zwei Operationen $+, \cdot : K \times K \to K$, sodaß die folgenden Gesetze K1 - K10 gelten:*

K1: $+$ *ist associativ, d.h.* $\forall_{\alpha,\beta,\gamma\in K}\ (\alpha+\beta)+\gamma = \alpha+(\beta+\gamma)$.

K2: 0 *ist neutrales Element bezüglich* $+$*, d.h.* $\forall_{\alpha\in K}\ \alpha+0 = 0+\alpha = \alpha$.

K3: Eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen $(+)$*: Jede Gleichung* $\alpha+\xi = \beta$ *mit* $\alpha, \beta \in K$ *besitzt genau eine Lösung* $\xi \in K$*. Wir bezeichnen sie mit* $\xi = \beta - \alpha$.

K4: $+$ *ist kommutativ, d.h.* $\forall_{\alpha,\beta\in K}\ \alpha+\beta = \beta+\alpha$.

K5: $\cdot$ *ist associativ, d.h.* $\forall_{\alpha,\beta,\gamma\in K}\ (\alpha\cdot\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot(\beta\cdot\gamma)$.

K6: 1 *ist neutrales Element bezüglich* $\cdot$*, d.h.* $\forall_{\alpha\in K}\ \alpha\cdot 1 = 1\cdot\alpha = \alpha$.

K7: Eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen $(\cdot)$*: Jede Gleichung* $\alpha\cdot\xi = \beta$ *mit* $\alpha, \beta \in K, \alpha \neq 0$ *besitzt genau eine Lösung* $\xi \in K$*. Wir bezeichnen sie mit* $\xi = \frac{\beta}{\alpha}$.

K8: $\cdot$ *ist kommutativ, d.h.* $\forall_{\alpha,\beta\in K}\ \alpha\cdot\beta = \beta\cdot\alpha$.

K9: Für beide Operationen zusammen gelten die beiden Distributivgesetze, d.h $\forall_{\alpha,\beta,\gamma\in K}$ *ist*

$$(\alpha+\beta)\cdot\gamma = \alpha\cdot\gamma+\beta\cdot\gamma$$
$$\alpha\cdot(\beta+\gamma) = \alpha\cdot\beta+\alpha\cdot\gamma$$

K10: Die beiden neutralen Elemente sind verschieden: $1 \neq 0$.

Wir werden häufig kurz von einem Körper K sprechen und dabei stillschweigend meinen, daß die eben betrachteten Daten gegeben sind.

Definition V.2 (Vektorraum) *Ein Vektorraum besteht aus einer Menge V, deren Elemente wir "Vektoren" nennen mit einem ausgezeichneten Element $0 \in V$, einem Körper K, dessen Elemente "Skalare" heißen, und zwei Operationen*

$$+ : V \times V \to V \quad \text{und} \quad \cdot : K \times V \to V,$$

sodaß die folgenden Gesetze V1 bis V8 gelten:

V1: $+$ *ist associativ, d.h.* $\forall_{x,y,z\in V}\ (x+y)+z = x+(y+z)$.

V2: 0 *ist neutrales Element bezgl.* $+$, *d.h.* $\forall_{x\in V}\ x+0=0+x=x$.

V3: Eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen, d.h. $\forall_{x,y\in V}$ *besitzt jede Gleichung der Art* $x+u=y$ *genau eine Lösung* u. *Wir bezeichnen sie mit* $u:=y-x$ *und nennen dies die Differenz der Vektoren* y *und* x.

V4: $+$ *ist kommutativ, d.h.* $\forall_{x,y\in V}\ x+y=y+x$.

V5: $\cdot$ *ist associativ, d.h.* $\forall_{\lambda,\mu\in K}\ \forall_{x\in V}\ (\lambda\cdot\mu)\cdot x=\lambda\cdot(\mu\cdot x)$.

V6: 1 *ist neutrales Element bezgl.* $\cdot$, *d.h.* $\forall_{x\in V}\ 1\cdot x=x$.

Es gelten die Distributivgesetze, d.h. $\forall_{\lambda,\mu\in K}\ \forall_{x,y\in V}$ *gelten*

V7: $\lambda\cdot(x+y)=\lambda\cdot x+\lambda\cdot y$,

V8: $(\lambda+\mu)\cdot x=\lambda\cdot x+\mu\cdot x$.

Bemerkung V.3 *Eine Struktur, die den Regeln V1 bis V4 genügt, nennt man eine "Abelsche Gruppe". Finden Sie sowas auch schon in einem Körper?*

Gebräuchliche Redeweisen sind "V ist ein K-Vektorraum" oder ein "Vektorraum über K". Wenn es uns gleichgültig ist, welcher Körper K denn genau beteiligt ist, sprechen wir auch kurz von einem Vektorraum. Im den beiden wichtigen Fällen $K=\mathbb{R}$ oder $K=\mathbb{C}$ sprechen wir auch kurz von einem *reellen* bzw. einem *komplexen Vektorraum.* Für die Physiker und die Finanzökonomen unter Ihnen genügt es, wenn Sie sich unter K stets einen dieser beiden Körper vorstellen, aber um die komplexen Zahlen kommen auch Sie nicht herum!

Den Punkt $\cdot$ bei $\alpha\cdot x$ lassen wir meist weg. Statt $0-x$ schreiben wir $-x$.

$\boxed{1}$

Wenn Sie die Beispiele bearbeitet haben, kennen Sie schon eine ganze Reihe von Vektorräumen. Orientieren sie sich im Weiteren zunächst am Beispiel des K^n, speziell am $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$, versuchen Sie aber allmählich zu einer abstrakteren Betrachtungsweise zu finden.

Zunächst ziehen wir einfache Folgerungen aus den Vektorraum-Axiomen V1 bis V8, die uns nützliche Rechenregeln geben. V bezeichne irgendeinen Vektorraum über irgendeinem Körper K.

Satz V.4 *Es gelten*

(i) $\forall_{x\in V}\ 0\cdot x=0$,

(ii) $\forall_{\alpha\in K}\ \alpha\cdot 0=0$,

(iii) $\forall_{x\in V}\ (-1)\cdot x=-x$,

(iv) $\forall_{x,y\in V}\ x-(-y)=x+y$.

Beweis:

(i) $x=1x=(1+0)x=1x+0x=x+0x$. Damit ist $z:=0x$ Lösung der Gleichung $x+z=x$, die offenbar auch die Lösung $z=0$ besitzt. Da es nur eine Lösung gibt, muß $z=0$ sein, was wir zeigen wollten.

(ii) $\alpha x=\alpha(x+0)=\alpha x+\alpha 0$. Somit ist $z:=\alpha 0$ Lösung von $\alpha x+z=\alpha x$ und mit demselben Schluß wie eben also $\alpha x=0$.

(iii) Es ist $0=0x=(1-1)x=1x+(-1)x=x+(-1)x$. Also ist $z:=(-1)x$ Lösung von $x+z=0$ und damit $(-1)x=-x$.

(iv) Betrachten wir die Gleichung $(-y)+z=x$. Eine Lösung ist definitionsgemäß $z=x-(-y)$. Daneben ist aber auch $x+y$ Lösung, denn

$$(-y)+(x+y)=(x+y)+(-y)=x+(y+(-y))=x+0=x.$$

□

In dem Vektorraum V ist zunächst nur eine Addition von zwei Elementen erklärt, während für $x,y,z,u,... \in V$ Ausdrücke wie $x+y+z+u$ zunächst keinen Sinn geben. Dagegen sind hinreichend geklammerte Ausdrücke wie

$$(x+y)+(z+u), \quad ((x+y)+z)+u, \quad ((x+z)+u)+y$$

sinnvoll. Mit Hilfe der Regeln V1 und V4 ergibt sich aber, daß alle diese Ausdrücke dasselbe Element von V liefern. Beispielsweise ist

$$\begin{aligned}(x+y)+(z+u) &\overset{V4}{=} (z+u)+(x+y) \overset{V1}{=} ((z+u)+x)+y \\ &\overset{V4}{=} (x+(z+u)+y) \overset{V1}{=} ((x+z)+u)+y.\end{aligned}$$

Durch systematisches Anwenden dieser Idee erhalten wir

Satz V.5 *Für die Addition in einem Vektorraum gelten das allgemeine Associativgesetz und das allgemeine Kommutativgesetz.*

Dies bedeutet:

Sind $x_1,x_2,...,x_n \in V$ gegeben, ordnen wir sie in irgendeiner Reihenfolge an, schreiben + Zeichen zwischen je zwei und fügen soviele Klammern ein, daß eine auswertbare Formel entsteht, so erhalten wir stets dasselbe Element von V unabhängig von der gewählten Reihenfolge und Klammerung. Für das so definierte Element schreiben wir

$$x_1+x_2+...+x_n \text{ oder } \sum_{i=1}^{n} x_i \text{ oder } \sum_{i\in I} x_i, \text{ wobei } I=\{1,2,...,n\}.$$

Erwähnt seien noch die Spezialfälle

$$\sum_{i=1}^{1} x_i \; = x_1, \quad \sum_{i=1}^{0} x_i \; = 0.$$

Sind $x_1,x_2,...,x_n \in V$ und $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n \in K$ gegeben, so sind auch die $\alpha_i x_i \in V$ und somit auch $\sum_{i=1}^n \alpha_i x_i \in V$.

Bezeichnung V.6 (Linearkombination, Span) *Für Vektoren $x_1,x_2,...,x_n \in V$ und Skalare $\alpha_1,\alpha_2,...,\alpha_n \in K$ heißt*

$$\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \in V$$

eine "Linearkombination der x_i mit Koeffizienten α_i."

Die Menge aller aus $x_1,x_2,...,x_n$ bildbaren Linearkombinationen nennen wir ihren Span und bezeichnen ihn als

$$\begin{aligned}\operatorname{span}(x_1,x_2,...,x_n) &:= \operatorname{span}(x_i \mid i\in\{1,2,...,n\}) \\ &:= \sum_{i=1}^{n} K\cdot x_i := \{\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i \mid \alpha_i \in K,\ i=1,...,n\}\end{aligned}$$

Das Studium solcher Mengen von Linearkombinationen wird uns nun einige Zeit beschäftigen.

Zunächst ist ein Begriff einzuführen:

Definition V.7 (Unterraum) *Ist V ein Vektorraum, U eine Teilmenge von V, sodaß $0 \in U$ und mit den auf U eingeschränkten Operationen in V die Menge U selbst ein K-Vektorraum ist, so heißt U ein "Unter-(K-Vektor)-Raum" von V.*

Ein Unterraum ist also insbesondere selbst ein Vektorraum.

Um von einer Menge $U \subset V$ zu prüfen, ob sie ein Unterraum ist, sind also mit den von V übernommenen Operationen die Axiome V1 bis V8 nachzuprüfen. Der folgende Satz hilft da künftig Arbeit zu sparen.

Satz V.8 *Ist V ein K-Vektorraum und $U \subset V$ mit*

(i) $0 \in U$,

(ii) $\forall_{x,y \in U}\ x + y \in U$, *d.h. ist U abgeschlossen unter $+$, und*

(iii) $\forall_{\alpha \in K}\ \forall_{x \in U}\ \alpha x \in U$, *d.h. ist U abgeschlossen unter $\alpha \cdot$,*

so ist U ein Unterraum.

Beweis: Wegen (i) ist $0 \in U$, und wegen (ii) ist die Einschränkung von $+ : V \times V \to V$ auf $U \times U \to V$ sogar eine Abbildung $U \times U \to U$. Analog ergibt die Einschränkung von $\alpha \cdot$ eine Abbildung $\cdot : K \times U \to U$.

Somit haben wir noch für diese durch Einschränkung gewonnenen Operationen die Axiome V1 bis V8 nachzuweisen. Wir tun dies exemplarisch für V3:

Es ist zu zeigen: *Zu jedem $x, y \in U$ gibt es genau ein $z \in U$, sodaß $x + z = y$.*

Da $U \subset V$ und V ein Vektorraum ist, wissen wir, daß es in V genau eine solche Lösung z unsere Gleichung gibt, nämlich $z = y - x = y + (-1)x$. Die liegt aber wegen (ii) und (iii) schon in U. Also gilt V3.

Versuchen Sie selbst, die anderen Eigenschaften nach diesem Muster zu beweisen!

□

Satz und Definition V.9 (erzeugend) *Für Vektoren $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ ist $U := \operatorname{span}(x_1, x_2, ..., x_n)$ ein Unterraum von V. Er heißt der von $x_1, x_2, ..., x_n$ "erzeugte" oder "aufgespannte" Unterraum, $(x_1, x_2, ..., x_n)$ heißt ein "Erzeugendensystem" für U. Ein Vektorraum heißt "endlich erzeugt", wenn es endlich viele Vektoren $x_1, x_2, ..., x_n \in V$ gibt, sodaß $V = \operatorname{span}(x_1, x_2, ..., x_n)$. Den von dem leeren System erzeugten Vektorraum setzen wir*

$$\operatorname{span}(\emptyset) := \{0\},$$

das ist der nur aus dem einzigen Element 0 bestehende Vektorraum. (Gelten für den V1 bis V8?!)

Beweis: Zum Nachweis der Unterraum-Eigenschaft für eine Span-Menge verwenden wir Satz V.8.

(i) $0 = \sum_{i=1}^n\ 0 \cdot x_i \in \operatorname{span}(x_1, x_2, ..., x_n) = U$.

(ii) Ist $x = \sum_{i=1}^n\ \alpha_i x_i,\ y = \sum_{i=1}^n\ \beta_i x_i$, so ist

$$x + y = \sum_{i=1}^n\ \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^n\ \beta_i x_i = \sum_{i=1}^n\ (\alpha_i + \beta_i) x_i \in U.$$

(iii) Ist $x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i,\ \alpha \in K$, so ist

$$\alpha x = \alpha\Big(\sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i\Big) = \sum_{i=1}^{n} (\alpha\alpha_i)x_i \in U.$$

$\square$

Satz V.10 *Ist V ein Vektorraum, darin $x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n, y \in V$ und ist damit $U := \mathrm{span}(x_1, ..., x_m)$, so gelten*

(i) Es ist $x_i \in U$ für $i = 1, ..., m$, d.h. die U erzeugenden Elemente gehören selbst zu U.

(ii) $U = \mathrm{span}(x_1, ..., x_m) \subset \mathrm{span}(x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n)$.

(iii) Ist $y \in U$, so ist $U = \mathrm{span}(x_1, ..., x_m) = \mathrm{span}(x_1, ..., x_m, y)$.

(iv) Für $x_{m+1}, ..., x_n \in U$ ist $U = \mathrm{span}(x_1, ..., x_m) = \mathrm{span}(x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_n)$.

Die letzten Aussagen besagen, daß der aufgespannte Raum im allgemeinen wächst, wenn man zu dem Erzeugendensystem weitere Vektoren hinzufügt, jedoch unverändert bleibt, wenn man diese schon aus dem Raum U selbst wählt

Beweis:

(i) Für $1 \leq i \leq m$ ist

$$x_i = 1x_i = 0x_1 + ... + 0x_{i-1} + 1x_i + 0x_{i+1} + ... + 0x_n.$$

(ii) Ist $x \in \mathrm{span}(x_1, ..., x_m)$, so haben wir

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i + \sum_{i=m+1}^{n} 0x_i \in \mathrm{span}(x_1, ..., x_n).$$

(iii) Wegen $y \in U$ kann man y schreiben als $y = \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i$. Dann ist $\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i + \alpha y = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i + \alpha \sum_{i=1}^{m} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{m} (\alpha_i + \alpha\beta_i)x_i \in \mathrm{span}(x_1, ..., x_m) = U$. Somit ist $\mathrm{span}(x_1, ..., x_m, y) \subset \mathrm{span}(x_1, ..., x_m)$ und die andere Inclusion gilt nach (ii).

(iv) Man wende (iii) sukzessive für $y := x_{m+1}, x_{m+2}, ...$ an. $\square$

Betrachten wir nun, wie sich die Elemente eines Raumes $V = \mathrm{span}(x_1, ..., x_n)$ durch die $x_1, ..., x_n$ darstellen lassen. Dazu greifen wir die schon im Vorkapitel eingeführten Begriffe linear abhängig bzw. unabhängig wieder auf.

Definition V.11 (Linear abhängig, unabhängig, frei, Basis) *Es sei V ein K-Vektorraum, darin $(x_1, ..., x_n)$ eine Familie von Vektoren.*

(i) Die Familie $(x_1, ..., x_n)$ heißt "linear abhängig", abgekürzt l.a., wenn es Koeffizienten $\alpha_1, ..., \alpha_n \in K$ gibt, von denen mindestens einer $\neq 0$ ist, sodaß

$$\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0.$$

(ii) Die Familie $(x_1, ..., x_n)$ heißt "linear unabhängig", abgekürzt l.u. oder "frei", wenn sie nicht linear abhängig ist, d.h. wenn $\alpha_1 x_1 + ... + \alpha_n x_n = 0$ nur für $\alpha_1 = ... = \alpha_n = 0$ möglich ist.

(iii) Die Familie $(x_1, ..., x_n)$ heißt eine Basis von V, wenn sie unabhängig ist und V erzeugt.

(iv) Es sei nochmal an "endlich erzeugt" erinnert (Satz und Definition V.9)

$\boxed{2}\rangle$

Jede unabhängige Familie $(x_1, ..., x_n)$ ist natürlich Basis von $U := \text{span}(x_1, ..., x_n)$, ferner sollten Sie sich folgende Spezialfälle einprägen:

Fakt V.12 *(i) Eine Familie, die aus genau einem Element und zwar dem Nullelement besteht ist linear abhängig,*

(ii) die leere Familie ist unabhängig und Basis des nur aus der Null bestehenden Raumes $\{0\}$.

Beweis: Es ist $1 \cdot 0 = 0$, d.h. betrachte $\alpha_1 = 1, x_1 = 0$.

Bei der leeren Familie gibt es kein Element, das mit einem Koeffizienten $\neq 0$ in einer Linearkombinatin auftreten könnte. □

Dies klingt wieder recht spitzfindig, wozu braucht man das? Für sich genommen braucht man das nicht, aber wir werden, etwa bei der Behandlung linearer Gleichungssysteme immer wieder auf Situationen stoßen, wo es gerade interessant ist, zu wissen, daß der "Lösungsraum" aus genau einem einzigen Element besteht, und das läßt sich dann in dieser Sprache zwanglos mit allgemeineren Aussagen kombinieren.

Wir hatten eine Familie linear abhängig oder unabhängig genannt, je nachdem, ob sich die Null nur auf eine Weise aus den x_i darstellen läßt, oder nicht. Dafür gilt allgemeiner

Satz V.13 *In einem Vektorraum V sei eine Familie $(x_1, ..., x_n)$ gegeben und dazu $U := \text{span}(x_1, ..., x_n)$. Dann gelten*

(i) Ist $(x_1, ..., x_n)$ linear abhängig, so besitzt jedes $x \in U$ mindestens zwei verschiedene Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i,$$

wobei für mindestens ein $i : \beta_i \neq \gamma_i$.

(ii) Ist $(x_1, ..., x_n)$ linear unabhängig, so besitzt jedes $x \in U$ genau eine Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i.$$

Ferner gelten die Umkehrungen

(iii) Gibt es ein $x \in U$, das mindestens zwei verschiedene Darstellungen als Linearkombinationen der x_i besitzt, so ist $(x_1, ..., x_n)$ linear abhängig.

(iv) Hat jedes $x \in U$ genau eine Darstellung als Linearkombination der x_i, so ist $(x_1, ..., x_n)$ linear unabhängig.

Damit lassen sich Basen so charakterisieren.

(v) $(x_1, ..., x_n)$ ist Basis von V genau dann, wenn sich jedes $x \in V$ auf genau eine Weise als Linearkombination der x_i, $i = 1, 2, ..., n$ darstellen läßt.

Beweis:

Zu (i): Sei $(x_1, ..., x_n)$ linear abhängig. Dann existiert eine nichttriviale Linearkombination, also eine, bei der wenigstens ein Koeffizient $\neq 0$ ist, mit $0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$. Jedes $x \in U$ besitzt eine Darstellung $x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i$. Dann ist aber auch

$$x = 0 + x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i + \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (\alpha_i + \beta_i) x_i.$$

Mit $\gamma_i := \alpha_i + \beta_i$ ist also eine weitere Darstellung gefunden und, da nicht alle $\alpha_i = 0$ sind, ist diese Darstellung von der ersten verschieden.

Zu (iii): Zeigen wir gleich die Umkehrung. Gibt es zu $x \in U$ zwei verschiedene Darstellungen:

$$x = \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i,$$

so ist

$$0 = x - x = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i x_i - \sum_{i=1}^{n} \beta_i x_i = \sum_{i=1}^{n} (\gamma_i - \beta_i) x_i,$$

und mit $\alpha_i = \gamma_i - \beta_i$ ist also $0 = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i x_i$, wobei aber nicht alle Koeffizienten verschwinden. Somit ist die Familie $(x_1, ..., x_n)$ linear abhängig.

(ii) und (iv) kann man nach dem selben Muster beweisen und *Sie sollten dies tun!* Man kann aber auch auf der rein logischen Ebene schließen: Aus der Definition folgt, daß jede Familie entweder linear abhängig ist oder linear unabhängig. D.h. trifft die eine Eigenschaft nicht zu, so gilt die andere. Damit folgt (ii) etwa so: Es sei $(x_1, ..., x_n)$ linear unabhängig. Dann ist also $(x_1, ..., x_n)$ nicht linear abhängig. Somit tritt also die Folgerung aus (iii) nicht ein, sodaß auch die Voraussetzung von (iii) nicht gelten kann. Damit gibt es kein $x \in U$, das verschiedene Darstellungen besitzt. Analog schließt man mit (i) auf (iv).

Zu (v): Sei $(x_1, ..., x_n)$ Basis von V : Dann ist $V = \text{span}(x_1, ..., x_n)$ und so läßt sich jedes $x \in V$ aus den x_i kombinieren. Ferner ist $(x_1, ..., x_n)$ linear unabhängig und nach (ii) hat also jedes x höchstens eine, also hier genau eine Darstellung.

Läßt sich umgekehrt jedes $x \in V$ auf genau eine Weise darstellen, so ist $V = \text{span}(x_1, ..., x_n)$, weil sich jedes darstellen läßt, und, da die Darstellung jeweils eindeutig ist, sind die $(x_1, ..., x_n)$ nach (iv) linear unabhängig. □

Wir kennen nun zwar einige Eigenschaften von Basen eines Vektorraumes, wissen aber noch gar nicht, ob es in jedem Vektorraum eine gibt. Es gilt aber:

Satz V.14 *Jeder Vektorraum hat eine Basis.*

Diesen Satz werden wir nicht beweisen, da es Vektorräume gibt, die so "groß" sind, daß wir mit den uns zur Verfügung stehenden Mitteln den Beweis nicht führen können. Wir begnügen uns deshalb, diesen Satz für "kleine" Vektorräume zu beweisen, mit denen wir uns im Rahmen dieser Einführung (fast) ausschließlich beschäftigen werden.

In Satz und Definition V.9 hatten wir einen Vektorraum als "endlich erzeugt" bezeichnet, wenn er aus den Linearkombinationen einer endlichen Familie besteht. Auf diese Räume werden wir uns nun beschränken.

Basis-Satz V.15 *Jeder endlich erzeugte Vektorraum hat eine Basis.*

Wir beweisen diesen Satz in mehreren Schritten:

Lemma V.16 *Ist $(x_1, ..., x_m)$ unabhängig und ist $y \notin \text{span}(x_1, ..., x_m)$, so ist auch $(x_1, ..., x_m, y)$ unabhängig.*

Beweis: Betrachten wir eine Linearkombination, die 0 ergibt:

$$0 = \alpha y + \sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i.$$

Ist $\alpha \neq 0$, so ist

$$\alpha y = -\sum_{i=1}^{m} \alpha_i x_i, \text{ d.h. } y = \sum_{i=1}^{m} \frac{-\alpha_i}{\alpha} x_i \in \operatorname{span}(x_1, ..., x_m).$$

Wir hatten aber gerade vorausgesetzt, daß dies nicht sein sollte. Damit ist notwendig $\alpha = 0$, und, da $(x_1, ..., x_m)$ unabhängig ist, ist notwendig $\alpha_1 = ... = \alpha_m = 0$. Folglich läßt sich die 0 aus $(x_1, ..., x_m, y)$ nur trivial kombinieren, d.h. diese Familie ist linear unabhängig. □

Dieser Beweis enthält einen Standard-Schluß zum Nachweis der linearen Unabhängigkeit: *Man setze mit unbekannten Koeffizienten eine Linearkombination an, die die Null ergibt, und schließe aus dem, was man über die beteiligten Vektoren weiß, darauf, daß alle Koeffizienten null sein müssen.*

Dies benutzen wir zum Beweis von

Satz V.17 (Basis-Ergänzungssatz) *Ist V ein endlich erzeugter Vektorraum und $(x_1, ..., x_m)$ unabhängig in V, so ist entweder schon $(x_1, ..., x_m)$ eine Basis von V, oder es gibt endlich viele Vektoren $x_{m+1}, ..., x_{m+p}$, sodaß $(x_1, ..., x_m, x_{m+1}, ..., x_{m+p})$ eine Basis von V ist.*

Ist $(y_1, ..., y_n)$ irgendein Erzeugendensystem von V, so kann man die Vektoren $x_{m+1}, ..., x_{m+p}$ aus diesen $\{y_1, ..., y_n\}$ wählen.

Beweis: Es sei $(x_1, ..., x_m)$ unabhängig in V. Dann sind zwei Fälle möglich:

1. $\operatorname{span}(x_1, ..., x_m) = V$: Dann ist schon $(x_1, ..., x_m)$ Basis von V. Andernfalls ist

2. $\operatorname{span}(x_1, ..., x_m) \subsetneqq V$: Dann existiert ein $y \in V, y \notin \operatorname{span}(x_1, ..., x_m)$. Nach Lemma V.16 können wir dieses y als x_{m+1} zu $(x_1, ..., x_m)$ hinzufügen und die erweiterte Familie $(x_1, ..., x_m, x_{m+1})$ ist linear unabhängig in V.

   Für diese Familie sind zwei Fälle möglich...: Wir können also für sie genauso argumentieren wie eben: Entweder haben wir schon eine Basis oder wir können unser unabhängiges System vergrößern.

   Mit der Voraussetzung, daß der Raum endlich erzeugt ist, können wir nun aber zeigen, daß der zweite Fall nur endlich oft eintreten kann, sodaß irgendwann eine Basis gefunden werden wird.

   Um dies zu sehen, geben wir uns irgendein Erzeugendensystem $(y_1, ..., y_n)$ von V vor. Es ist damit also $\operatorname{span}(y_1, ..., y_n) = V$. Wir setzen

   $$M_m := \{i \mid 1 \leq i \leq n, \ y_i \notin \operatorname{span}(x_1, ..., x_m\}.$$

   Die Familie $(y_i \mid i \in M_m)$ enthält also genau alle die Elemente des Erzeugendensystems, die nicht schon in $\operatorname{span}(x_1, ..., x_m)$ liegen.

   Ist $M_m = \emptyset$, so gibt es also keine solchen, d.h. alle Elemente des Erzeugendensystems liegen in $\operatorname{span}(x_1, ..., x_m)$ und wir erhalten damit (Satz V.10)

   $$V \supset \operatorname{span}(x_1, ..., x_m) = \operatorname{span}(x_1, ..., x_m, y_1, ..., y_n) \supset \operatorname{span}(y_1, ..., y_n) = V.$$

   Dann ist also $V = \operatorname{span}(x_1, ..., x_m)$, d.h. $(x_1, ..., x_m)$ ist linear unabhängig und erzeugend und damit Basis von V.

   Wir haben also nur zu zeigen, daß wir bei dem beschriebenen Prozess irgendwann $M_{m+p} = \emptyset$ erreichen. Tritt Fall 2 ein, so ist $M_m \neq \emptyset$. Also gibt es ein $i, \ 1 \leq i \leq n$, sodaß $y_i \notin \operatorname{span}(x_1, ..., x_m)$. Dann können wir aber dieses y_i als x_{m+1} zu unserer Familie hinzufügen, womit dann trivialerweise

$y_i \in \mathrm{span}(x_1, ..., x_{m+1})$ ist. Dieser Index ist also jetzt nicht mehr in der aktuellen Menge M_{m+1}. Somit hat M_{m+1} gegenüber M_m wenigstens ein Element verloren, und da wir mit einer endlichen Menge beginnen, kann dies nur endlich oft passieren, was unseren Satz beweist. □

Dies liefert nun sofort den Beweis für den schon oben notierten

Basis-Satz *Jeder endlich erzeugte Vektorraum hat eine Basis.*

Beweis: Satz V.17 mit $m := 0$. □

Der Beweis ist Ihnen vermutlich zu lapidar. Erinnern Sie sich, daß die leere Familie unabhängig ist und den genau die 0 enthaltenden Raum aufspannt. Prüfen Sie ferner nach, daß im Beweis von Satz V.17 nirgends benutzt wird, daß tatsächlich schon ein x_i, $(1 \leq i \leq m)$ vorhanden ist. Wir können also die leere Familie zu einer Basis ergänzen.

Wenn Ihnen das immer noch unheimlich bleibt, dann gehen Sie so vor:

Ist $V = \{0\}$, so ist die leere Familie eine Basis. (Gut, daß es sie gibt, sonst hätte dieser Raum keine Basis!)

Ist $V \neq \{0\}$, so wählen Sie darin irgend einen Vektor $x_1 \neq 0$. Dann ist (warum?) (x_1) eine unabhängige Familie in V, und die können wir nun mit Satz V.17 zu einer Basis ergänzen.

3

Zu einer Basis $(x_1, ..., x_n)$ von V heißt die Zahl n die "Länge" der Basis. In den Beispielen haben sie gesehen, daß ein Vektorraum i. a. viele verschiedene Basen besitzt, wir werden aber sehen, daß sie alle die selbe Länge haben. Dazu zeigen wir zunächst einen Satz, der beschreibt, wie man aus einer Basis eine neue gewinnen kann.

Satz V.18 *Es sei $(y_1, ..., y_n)$ eine Basis von V. Der Vektor x habe die Darstellung $x = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i$. Ist dann für einen Index k, $(1 \leq k \leq n)$ der Koeffizient $\alpha_k \neq 0$, so ist auch $(y_1, ..., y_{k-1}, x, y_{k+1}, ..., y_n)$ Basis von V.*

Zu jedem $x \neq 0$ gibt es stets so einen Index k. Damit kann man jedes $x \neq 0$ gegen ein geeignetes Basiselement austauschen und erhält jeweils wieder eine Basis von V.

Beweis: Die Basis sei so nummeriert, daß $\alpha_1 \neq 0$.

1. $(x, y_2, ..., y_n)$ *ist erzeugend:* Es ist

$$x = \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i \quad \text{d.h. } \alpha_1 y_1 = x - \sum_{i=2}^n \alpha_i y_i,$$

also

$$y_1 = \frac{1}{\alpha_1} x - \sum_{i=2}^n \frac{\alpha_i}{\alpha_1} y_i \in \mathrm{span}(x, y_2, ..., y_n).$$

Mit Satz V.10 ist dann

$$V \supset \mathrm{span}(x, y_2, ..., y_n) = \mathrm{span}(x, y_1, y_2, ..., y_n) \supset \mathrm{span}(y_1, y_2, ..., y_n) = V,$$

sodaß also

$$V = \mathrm{span}(x, y_2, ..., y_n).$$

2. $(x, y_2, ..., y_n)$ *ist unabhängig:* Setzen wir in $0 = \beta x + \sum_{i=2}^n \beta_i y_i$ die Darstellung für x ein, so folgt

$$0 = \beta \sum_{i=1}^n \alpha_i y_i + \sum_{i=2}^n \beta_i y_i = \beta\alpha_1 y_1 + \sum_{i=2}^n (\beta\alpha_i + \beta_i) y_i.$$

Da $(y_1, y_2, ..., y_n)$ unabhängig ist, muß $0 = \beta\alpha_1$ und $0 = \beta\alpha_i + \beta_i$ für die restlichen Indizes gelten. Wegen $\alpha_1 \neq 0$ liefert dies zunächst $\beta = 0$ und dann $\beta_2 = ... = \beta_n = 0$. Somit ist auch $(x, y_2, ..., y_n)$ unabhängig. □

Wir erweitern diesen Satz zum

Satz V.19 (Austauschsatz von STEINITZ) *Ist $(y_1, y_2, ..., y_n)$ Basis von V und $(x_1, ..., x_k)$ unabhängig, so ist $k \leq n$ und bei geeigneter Nummerierung der y_i ist $(x_1, ..., x_k, y_{k+1}, ..., y_n)$ Basis von V.*

Beweis: Der Beweis erfolgt durch Induktion über k.

Im Falle $k = 0$ sind keine Vektoren auszutauschen und der Satz ist richtig.

Sein nun $k > 0$ und der Satz für $k - 1$ schon bewiesen. Wir haben damit also:

1. $k - 1 \leq n$ und
2. $(x_1, ..., x_{k-1}, y_k, ..., y_n)$ ist Basis von V.

Falls $k - 1 = n$ wäre, wäre schon $(x_1, ..., x_{k-1})$ Basis von V. Dann wäre aber speziell $x_k \in \text{span}(x_1, ..., x_{k-1})$, d.h. $x_k = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i$ oder $0 = \sum_{i=1}^{k-1} \alpha_i x_i + (-1)x_k$, was wegen der Unabhängigkeit der $(x_1, ..., x_k)$ nicht sein kann.

Also ist notwendig $k - 1 < n$, d.h. $k \leq n$.

Da $(x_1, ..., x_{k-1}, y_k, ..., y_n)$ eine Basis ist, gibt es eine Darstellung

$$x_k = \alpha_1 x_1 + ...\alpha_{k-1} x_{k-1} + \beta_k y_k + ... + \beta_n y_n.$$

Wären alle $\beta_i = 0$, so kämen wir auf den selben Widerspruch wie eben. Also ist wenigstens einer dieser β-Koeffizienten $\neq 0$ und bei geeigneter Nummerierung also $\beta_k \neq 0$.

Mit Satz V.18 folgt dann, daß auch $(x_1, ..., x_{k-1}, x_k, y_{k+1}, ..., y_n)$ eine Basis ist. □

Wir fassen diese Ergebnisse zusammen zu

Satz und Definition V.20 (Dimension)

(i) Jeder endlich erzeugte Vektorraum hat eine Basis endlicher Länge.

(ii) Besitzt ein Vektorraum eine endliche Basis $(y_1, ..., y_n)$, so haben alle Basen die selbe Länge n. Wir nennen n die "Dimension" des Vektorraumes V: $\dim V = n$.

(iii) Gibt es in V zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine unabhängige Familie mit n Elementen, so besitzt V keine endliche Basis. Wir nennen dann V "unendlichdimensional" und notieren $\dim V = \infty$.

(iv) Die Dimension von $V = \{0\}$ wird $= 0$ gesetzt.

Beweis:

(i) Siehe Basis-Satz.

(ii) Besitzt V eine endliche Basis $(y_1, ..., y_n)$, so ist V endlich erzeugt. Ist $(x_1, ..., x_k)$ eine weitere Basis, so ist sie ein unabhängiges System und nach dem Austauschsatz von STEINITZ ist $k \leq n$. Vertauschen wir die Rollen der Basen, so folgt ebenso $n \leq k$, was die Invarianz der Basislänge beweist.

(iii) Wäre $(y_1, ..., y_n)$ eine endliche Basis, so könnte jedes unabhängige System höchsten n Elemente haben. □

Ist V ein endlich erzeugter Vektorraum, so besitzt er eine endliche Basis und damit eine Dimension $n \in \mathbb{N}$. Gilt dies auch für seine Unterräume?

Satz V.21 *Ein Unterraum eines n-dimensionalen Vektorraumes V hat eine Dimension* $\dim U \leq n$.

Beweis: Sei $(y_1, ..., y_k)$ Basis von U. Sie ist eine unabhängige Familie in V und nach dem Austauschsatz von STEINITZ ist dann $k \leq n$.

Das ist aber nur die Hälfte des Beweises. Hat denn U überhaupt eine Basis, ist denn U endlich erzeugt? – Dies folgt aber aus dem Basis-Ergänzugssatz. Denn beginnen wir den für U mit der leeren Familie, so erhalten wir entweder nach endlich vielen Schritten eine Basis von U oder wir erhielten in U und damit aber auch in V beliebig große unabhängige Familien und das geht in dem endlich dimensionalen V eben nicht. □

Wir können diese Aussage noch genauer machen.

Satz V.22 *Ist U ein m-dimensionaler Unterraum eines n-dimensionalen Raumes V, so gibt es eine Basis $(y_1, ..., y_m, y_{m+1}, ..., y_n)$ von V, sodaß $(y_1, ..., y_m)$ Basis von U ist.*

Beweis: Wähle eine Basis $(y_1, ..., y_m)$ von U und ergänze zu Basis von V. □

Ist $(y_1, ..., y_m, y_{m+1}, ..., y_n)$ eine Basis von V, und setzen wir $U_1 := \text{span}(y_1, ..., y_m)$, $U_2 := \text{span}(y_{m+1}, ..., y_n)$, so sind dies zwei Unterräume der Dimensionen $\dim U_1 = m$, $\dim U_2 = n - m$, für die folgendes gilt:

1. $U_1 \cap U_2 = \{0\}$,
2. $U_1 + U_2 := \{x \in V \mid \text{Es gibt } x_1 \in U_1, x_2 \in U_2 \text{ mit } x = x_1 + x_2\} = V$.

Denn ist $x \in U_1 \cap U_2$, so ist

$$x = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i = \sum_{i=m+1}^{n} \beta_i y_i, \text{ d.h. } 0 = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i - \sum_{i=m+1}^{n} \beta_i y_i,$$

und da $(y_1, ..., y_n)$ unabhängig ist, muß

$$\alpha_1 = ... = \alpha_m = \beta_{m+1} = ... = \beta_n = 0$$

sein.

Ferner hat jedes $x \in V$ eine Darstellung

$$x = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i y_i = \sum_{i=1}^{m} \alpha_i y_i + \sum_{i=m+1}^{n} \alpha_i y_i,$$

wobei der erste Term in U_1, der zweite in U_2 liegt.

Definition V.23 (komplementäre Unterräume) *Zwei Unterräume U_1, U_2 eines Vektorraumes V heißen "komplementär", wenn $U_1 \cap U_2 = \{0\}$ und $U_1 + U_2 = V$.*

Der Satz V.22 und die anschließenden Überlegungen liefern unmitelbar

Satz V.24 *In einem endlich-dimensionalen Vektorraum V gibt es zu jedem Unterraum U_1 einen komplemantären Unterraum U_2. Für komplementäre Unterräume gilt die Dimensionsformel*

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim V.$$

Es sei bemerkt, daß es zu einem Unterraum i.a. viele komplementäre Unterräume gibt. Man schaue einfach in den Beweis von Satz V.22.

Dies ist nur ein Spezialfall von

Satz V.25 (Dimensionsformel) *Sind U_1, U_2 Unterräume eines endlich-dimensionalen Raumes V, so gilt*

$$\dim U_1 + \dim U_2 = \dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2).$$

Beweis: Zunächst ist zu zeigen, daß $U_1 \cap U_2$ und $U_1 + U_2$ wieder Unterräume von V sind. Ferner sind $U_1, U_2, U_1 \cap U_2$ sogar Unterräume von $U_1 + U_2$. All dies zeigen Sie mal selbst! Nach der letzten Feststellung können wir dann gleich $U_1 + U_2 = V$ annehmen.

Fall 1: $(U_1 \cap U_2) = \{0\}$: Dann sind die Räume U_1 und U_2 komplementär und mit $\dim(U_1 \cap U_2) = \dim\{0\} = 0$ folgt die Behauptung aus dem vorigen Satz.

Fall 2: $(U_1 \cap U_2) \neq \{0\}$: Hierzu benutzen wir Fall 1. Nach Satz V.24 gibt es in U_1 einen zu $(U_1 \cap U_2)$ komplementären Raum U, für den also gilt

$$(U_1 \cap U_2) \cap U = \{0\}, \quad (U_1 \cap U_2) + U = U_1,$$

und damit

$$\dim(U_1 \cap U_2) + \dim U = \dim U_1. \qquad (*)$$

Weiter ist $(U \cap U_2) = \{0\}$: Denn wegen $U \subset U_1$ ist

$$U \cap U_2 = (U \cap U_1) \cap U_2 = U \cap (U_1 \cap U_2) = \{0\}.$$

Ferner ist

$$U_1 + U_2 = (U + (U_1 \cap U_2)) + U_2 = U + ((U_1 \cap U_2) + U_2) \subset U + U_2 \subset U_1 + U_2,$$

sodaß also überall das Gleichheitszeichen steht und damit insbesondere

$$U + U_2 = U_1 + U_2.$$

Folglich sind die Räume U und U_2 komplementär (in $U_1 + U_2$) und damit

$$\dim(U_1 + U_2) = \dim U + \dim U_2. \qquad (**)$$

Addieren wir die Gleichungen $(*)$ und $(**)$, so folgt

$$\dim(U_1 + U_2) + \dim(U_1 \cap U_2) + \dim U = \dim U + \dim U_2 + \dim U_1,$$

woraus sich unmittelbar die Behauptung ergibt. □

Das Konzept komplementärer Unterräume läßt sich noch ausweiten. Wir erhalten so den Begriff der direkten Summe von Unterräumen eines Vektorraumes V.

Zunächst sei bemerkt:

Fakt V.26 *Sind U_1 und U_2 komplementäre Unterräume von V, so gelten*

(i) Jeder Vektor $x \in V$ besitzt genau eine Darstellung als $x = x_1 + x_2$, wobei $x_1 \in U_1$ und $x_2 \in U_2$.

(ii) *Ist* $0 = x_1 + x_2$, *wobei* $x_1 \in U_1$ *und* $x_2 \in U_2$, *so ist* $x_1 = x_2 = 0$.

Der **Beweis** sei als Übung gelassen.

Zwei komplementäre Unterräume geben also ein Beispiel für die folgende

Definition V.27 (Direkte Summe von Unterräumen) *$U_1, ..., U_n$ und U seien Unterräume eines Vektorraumes V. Dann heißt U "direkte Summe" der U_i, notiert als*

$$U = U_1 \oplus U_2 \oplus ... \oplus U_n = \bigoplus_{i=1}^{n} U_i,$$

wenn

(i) $U = \{x \in V \mid x = x_1 + ... + x_n,$ *wobei für jedes* $i = 1, ..., n,\ x_i \in U_i\}$ *und*

(ii) $0 = x_1 + ... + x_n$ *mit* $x_i \in U_i,\ (i = 1, ..., n)$ *nur für* $x_1 = ... = x_n = 0$ *möglich ist.*

Überlegen Sie selbst, daß dann jedes Element der direkten Summe genau eine Darstellung als Summe von Elementen der einzelnen Unterräume besitzt.

4

BV Beispiele zu Vektorräumen

1

Studieren Sie zunächst die folgenden Beispiele und prüfen Sie, wo Vektorräume vorliegen und wo nicht.

BV1: Es sei

$$\mathbb{R}^n := \{(\xi_1, ..., \xi_n) \mid \xi_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., n\}$$

die Menge aller n-tupel von reellen Zahlen. Wir definieren eine

Addition (+): $(\xi_1, ..., \xi_n) + (\eta_1, ..., \eta_n) := (\xi_1 + \eta_1, ..., \xi_n + \eta_n)$ und eine

Multiplikation mit Zahlen $\alpha \in \mathbb{R} : \alpha \cdot (\xi_1, ..., \xi_n) := (\alpha\xi_1, ..., \alpha\xi_n)$.

BV2: Es sei $\mathbb{C}^n$ die Menge aller n-tupel von komplexen Zahlen. Wir erklären Addition (+) und Multiplikation mit Zahlen $\alpha \in \mathbb{C}$ formal gleich wie in BV1, nur daß jetzt eben alle vorkommenden Zahlen komplex sind.

BV3: Es sei F die Menge aller auf $\mathbb{R}$ definierten reellwertigen Funktionen

$$F := \{f \mid f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}\}.$$

Wir erklären in F eine Addition (+): Für $f, g \in F$ bezeichne $f + g$ die für alle $t \in \mathbb{R}$ durch $(f + g)(t) := f(t) + g(t)$ erklärte Funktion.

Wir erklären in F eine Multiplikation mit reellen Zahlen α : Für $f \in F$ bezeichne αf die für alle $t \in \mathbb{R}$ durch $(\alpha f)(t) := \alpha \cdot f(t)$ erklärte Funktion.

BV4: $\mathbb{R}[T]$ bezeichne die Menge aller Polynome mit reellen Koeffizienten in einer Variablen T. + bzw. $\alpha\cdot$ seien als die übliche Addition bzw. Multiplikation bei Polynomen erklärt.

BV5: $\mathbb{Z}[T]$ bezeichne die Menge aller Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten in einer Variablen T. + bzw. $\alpha\cdot$ seien als die übliche Addition bzw. Multiplikation bei Polynomen erklärt.

BV6: Wie BV4, aber nur Multiplikation mit $\alpha \in \mathbb{Z}$ zugelassen.

BV7: Wie BV5, aber $\alpha \in \mathbb{R}$ zugelassen.

BV8: Wie BV3, aber eingeschränkt auf Funktionen mit $f(0) = 0$.

BV9: Wie BV3, aber eingeschränkt auf Funktionen mit $f(1) = 1$.

Vektorräume liegen vor in BV1 bis BV4 und in BV8. Was geht bei den anderen schief?

Lesen Sie weiter bis

2

2

Untersuchen sie die in den obigen Beispielen genannten Vektorräume daraufhin, ob einer Unterraum zu einem anderen ist.

Unterräume von BV3 sind BV4 und BV8. Warum ist der $\mathbb{R}^n$ *nicht* Unterraum des $\mathbb{C}^n$?

Welche Räume sind endlich erzeugt? (BV1, BV2.) Geben sie dafür Erzeugendensysteme und Basen an.

BV10: Zeigen Sie, daß im $\mathbb{R}^n$ bzw. $\mathbb{C}^n$ die "kanonischen Einheitsvektoren"

$$e_1 := (1,0,0,...,0),\ e_2 := (0,1,0,...,0),...,e_n := (0,0,...,0,1)$$

eine Basis sind. Finden Sie noch andere Basen.

BV11:

1. Sind im $\mathbb{R}^3$ die Unteräume

   $$U_1 := \operatorname{span}((1,1,0),(1,0,-1)) \text{ und } U_2 := \operatorname{span}((1,1,0),(1,0,-1),(0,1,1))$$

   gleich oder verschieden?

2. Betrachten Sie in $\mathbb{R}[T]$ die Polynome p_i, q_i, definiert durch

   $$p_{-1}(T) := T(T-1),\ p_0(T) := (T+1)(T-1),\ p_{+1}(T) := T(T+1),$$
   $$q_1(T) := T,\ q_2(T) := T^2.$$

   Sind die Unterräume $\operatorname{span}(p_{-1}, p_0, p_{+1})$ und $\operatorname{span}(p_{-1}, p_0, p_{+1}, q_1, q_2)$ gleich oder verschieden. Wie steht es mit der Unabhängigkeit der notierten Familien?

Lesen Sie weiter bis

3

3

BV12: Führen Sie den Beweis des Basis-Ergänzungssatzes an einem Beispiel explizit aus:

Im $\mathbb{R}^4$ ist $(y_1, ..., y_4)$ mit

$$\begin{aligned} y_1 &= (1,0,0,0) \\ y_2 &= (1,1,0,0) \\ y_3 &= (1,1,1,0) \\ y_4 &= (1,1,1,1) \end{aligned}$$

ein Erzeugendensystem. (Warum?)

Suchen Sie in x_1, x_2, x_3 mit

$$\begin{aligned} x_1 &= (1,0,1,0) \\ x_2 &= (0,1,0,1) \\ x_3 &= (1,-1,1,-1) \end{aligned}$$

unabhängige Teilfamilien auf und ergänzen Sie diese nach der Methode des Basis-Ergänzungssatzes zu einer Basis von $\mathbb{R}^4$.

Lesen Sie weiter bis

4

4

BV13: Wenden Sie den Austauschsatz an

1. auf (e_1, e_2, e_3, e_4) als Basis des $\mathbb{R}^4$ und auf $x_1 = (1,0,1,0)$, $x_2 = (0,1,0,1)$,
2. auf die in 1. gewonnene Basis und $x_1 := e_1, x_2 := e_2$.

BV14: Geben Sie einen komplementären Unterraum an

1. im $\mathbb{R}^4$ zu $\operatorname{span}((1,0,1,0),\ (0,1,0,1))$.
2. in $\mathbb{R}[T]$ zum Unterraum aller Polynome, die nur gerade Potenzen von T enthalten. (Warum ist das ein Unterraum?)

BV15: Bestimmen Sie $\dim(U \cap V)$ für die zwei Unterräume $U, V \subset \mathbb{R}^4$, wobei $U = \operatorname{span}(e_1, e_2, e_3)$, $V := \operatorname{span}((1,0,1,0),\ (0,1,0,1))$.