

1 Grundlagen

Axiome der Lage

Der nun aufzubauende drei - dimensionale projektive Raum enthält drei Sorten von "Grundelementen", genannt "Punkte, Geraden, Ebenen". Diese stehen über die "Grundbeziehung" der "Inzidenz" miteinander in Beziehung. Statt des abstrakten Wortes "inzident" benutzen wir auch aus der Euklidischen Geometrie entnommene anschauliche Begriffe wie "geht durch", "liegt auf" etc.

Wir setzen die Gültigkeit der folgenden *Axiome* voraus.

Grundphänomene der Lage 1.1

- G1 a) Zu einer Geraden g gibt es Punkte, die mit g inzident sind. Sie bilden eine "Punktreihe mit Träger g ".
- b) Zu einer Geraden g gibt es Ebenen, die mit g inzident sind. Sie bilden ein "Ebenenbüschel mit Träger g ".
- G2 a) Zu einer Ebene E^- gibt es Punkte, die mit E^- inzident sind. Sie bilden ein "Punktfeld mit Träger E^- ".
- b) Zu einem Punkt P^+ gibt es Ebenen, die mit P^+ inzident sind. Sie bilden ein "Ebenenbündel mit Träger P^+ ".
- G3 a) Zu einer Ebene E^- gibt es Geraden, die mit E^- inzident sind. Sie bilden ein "Geradenfeld (Strahlenfeld) mit Träger E^- ".
- b) Zu einem Punkt P^+ gibt es Geraden, die mit P^+ inzident sind. Sie bilden ein "Geradenbündel (Strahlenbündel) mit Träger P^+ ".
- G4) Zu einem Paar $\{P^+, E^-\}$ aus Punkt und Ebene, die miteinander inzident sind, gibt es Geraden, die sowohl durch diesen Punkt gehen als auch in dieser Ebene liegen. Diese bilden ein "Geradenbüschel (Strahlenbüschel) mit Träger $\{P^+, E^-\}$ ".
- G5 a) Liegt eine Gerade in einer Ebene, so liegt auch jeder Punkt der Geraden (als Punktreihe) in dieser Ebene.
- b) Geht eine Gerade durch einen Punkt, so geht auch jede Ebene dieser Gerade (als Ebenenbüschel) durch diesen Punkt.
- G6 a) Liegt ein Punkt in einer Ebene, so liegt nicht jede Gerade des Punktes (als Strahlenbündel) in dieser Ebene.
- b) Geht eine Ebene durch einen Punkt, so geht nicht jede Gerade der Ebene (als Strahlenfeld) durch diesen Punkt.
- G7 a) Liegt ein Punkt auf einer Geraden, so geht nicht jede Ebene des Punktes (als Ebenenbündel) durch diese Gerade.
- b) Geht eine Ebene durch eine Gerade, so liegt nicht jeder Punkt der Ebene (als Punktfeld) auf der Geraden.

Wir nennen G1 – G7 die "Grundphänomene der Lage".

Diese Grundphänomene können unmittelbar für unsere üblichen räumlichen Begriffe realisiert werden. Sie sind zudem so formuliert, daß sie beim "Dualisieren", d.h. dem Austauschen der Begriffe "Punkt" und "Ebene" in sich selbst übergehen.

Jedes Grundelement erscheint so in drei Ausprägungen, einmal als es selbst, ferner unter dem Aspekt der beiden anderen:

Punkt	Strahlenbündel	Ebenenbündel
Punktreihe	Gerade	Ebenenbüschel
Punktfeld	Strahlenfeld	Ebene

Hinzu kommt aus inzidenten Punkt und Ebene das

Strahlenbüschel.

Bezeichnung 1.2 *Punktreihe, Strahlen- und Ebenenbüschel bezeichnen wir auch als "Grundgebilde erster Stufe".*

Weiter fordern wir :

Grundphänomene der Verknüpfung 1.3

- V1 a) *Zu zwei verschiedenen Punkten gibt es genau eine Gerade, die beide enthält, die "Verbindungsgerade".*
 b) *Zu zwei verschiedenen Ebenen gibt es genau eine Gerade, die in beiden liegt, die "Schnittgerade".*
- V2 a) *Zu einem Punkt und einer nicht durch ihn gehenden Geraden gibt es genau eine Ebene, die beide enthält, die "Verbindungsebene".*
 b) *Zu einer Ebene und einer nicht in ihr liegenden Geraden gibt es genau einen Punkt, der beiden angehört, der "Schnittpunkt".*
- V3) *Zwei verschiedene Geraden haben entweder genau einen Punkt und genau eine Ebene gemeinsam oder weder einen Punkt noch eine Ebene.*
Im letzten Fall nennen wir sie "windschief".

Von diesen *Axiomen der Verknüpfung* sind V1 a), V2 a) und V3 im Euklidischen sofort einleuchtend, während V1 b) und V2 b) im Widerspruch zur Möglichkeit der parallelen Lage von Geraden und/oder Ebenen stehen. Dies deutet darauf hin, daß unser projektiver Raum nicht der übliche Euklidische ist.

Ein mathematisches Modell, das obigen Axiomen genügt, gewinnt man leicht auf folgende Weise: Es sei \mathbf{K} ein Körper. Wir betrachten den linearen Raum \mathbf{K}^4 und darin alle

- 1 - *dimensionalen Unterräume und nennen sie "Punkte",*
 2 - *dimensionalen Unterräume und nennen sie "Geraden",*
 3 - *dimensionalen Unterräume und nennen sie "Ebenen".*

Inzidenz erklären wir über die Inclusion im \mathbf{K}^4 .

Dann ergibt sich die Gültigkeit der geforderten Axiome unschwer aus Sätzen der linearen Algebra.

Bezeichnung 1.4 *Die so erhaltene Struktur heißt der "projektive Raum der Dimension 3 über \mathbf{K} : $\mathbb{P}^3(\mathbf{K})$ ".*

Wählen wir hier etwa \mathbf{K} als einen endlichen Körper, so ist natürlich auch der entstehende projektive Raum endlich. Dies führt zwar zu manchen interessanten Anwendungen, soll jedoch hier nicht weiter verfolgt werden. Wir fordern deshalb das

Reichhaltigkeitsaxiom 1.5 *Punktreihen, Geraden- und Ebenenbüschel haben jeweils unendlich viele Elemente.*

Dies ist natürlich automatisch erfüllt, wenn wir von dem Körper \mathbb{R} der reellen Zahlen ausgehen, was uns zu dem reellen \mathbb{P}^3 führt. Von diesem wollen wir uns nun ein *geometrisches* Modell verschaffen, was nicht nur die Axiome nachzuprüfen erlaubt, sondern auch einen direkten Bezug zu der uns vertrauten Euklidischen Geometrie hat.

Wir beginnen mit den Punkten, Geraden, Ebenen des gewöhnlichen Euklidischen Raumes und fügen noch gewisse weitere - vom Euklidischen Standpunkt "*uneigentliche*" - Elemente hinzu, nämlich

- zu jeder Geraden genau einen *uneigentlichen Punkt*, ihren “*Fernpunkt*”, den sie genau mit allen zu ihr parallelen Geraden gemeinsam hat,
- zu jeder Ebene genau eine *uneigentliche Gerade*, ihre “*Ferngerade*”, die sie genau mit allen zu ihr parallelen Ebenen gemeinsam hat,
- eine feste *uneigentliche Ebene*, die “*Fernebene*”.

Die Ferngerade einer Ebene bestehe als Punktreihe aus genau allen Fernpunkten der in ihr liegenden Geraden, die Fernebene als Punktfeld aus genau allen Fernpunkten und als Strahlenfeld aus genau allen Ferngeraden.

Nach dem eben Ausgeführten besteht dann etwa die Ferngerade einer Ebene als Ebenenbüschel aus allen zu dieser Ebene parallelen Ebenen und der Fernebene, ferner der Fernpunkt einer Geraden g als Ebenenbündel aus allen Ebenen, die eine zu dieser Geraden g parallele Gerade enthalten, und der Fernebene, etc.

Motiviert wird solches Vorgehen aus der zeichnerischen Perspektive, wo eben die Bilder paralleler Geraden einen auf dem Zeichenblatt erscheinenden Schnittpunkt erhalten können, und umgekehrt zu manchen Punkten oder Geraden kein reales Bild existiert.

Es bleibt nun eine langwierige Aufgabe, der Sie sich aber wenigstens zum Teil unterziehen sollten, nachzuweisen, daß alle Axiome der Lage und Verknüpfung uneingeschränkt gelten, und daß die Sonderrolle der uneigentlichen, d.h. der Fernelemente, nur bei der Entwicklung vom Euklidischen Standpunkt aus besteht, in dem fertigen Gebilde aber alle Punkte, Geraden, Ebenen untereinander völlig gleichberechtigt sind.

Dies so erhaltenen Gebilde ist die Struktur, in der wir unsere dreidimensionale synthetische projektive Geometrie betreiben werden, wobei wir gleich sehen werden, daß es sich um den reellen \mathbb{P}^3 handelt. Diese geometrische Konstruktion erlaubt es aber, das Geometrisieren mit den Objekten Punkt, Gerade, Ebene zu betreiben, die sich in vielerlei Hinsicht so verhalten, wie wir es aus der Euklidischen Elementargeometrie kennen, und nicht bloß Namen für axiomatisch charakterisierte Objekte sind.

Dabei ergibt sich noch folgende Konsequenz: Wählen wir in unserem projektiven Raum eine beliebige Ebene aus, nennen sie “*Fernebene*”, alle in ihr liegenden Geraden “*Ferngeraden*” und alle in ihr liegenden Punkte “*Fernpunkte*”, so ergibt der Rest ein Modell unseres üblichen Euklidischen Raumes; d.h. wir können uns diesen Rest stets im Euklidischen Bild veranschaulichen, und insbesondere dann Parallelität über gemeinsame Fernelemente erklären. Man beachte aber, daß im projektiven Raum Begriffe wie “*parallel*”, “*rechter Winkel*” oder “*Länge von Strecken oder Winkeln*” a priori nicht erklärt sind, sondern erst in speziellem Kontext eingeführt werden können.

Betrachten wir nun den Zusammenhang des oben anschaulich geschilderten geometrischen Modells mit dem aus den Unterräumen des \mathbb{R}^4 gebildeten \mathbb{P}^3 . Wir beginnen mit der Geraden als Punktreihe. Nach dem Unterraum-Modell sind also deren Punkte alle eindimensionalen Unterräume eines zweidimensionalen Raumes g , der isomorph zum \mathbb{R}^2 ist. Siehe Abbildung 1.1.

Wir wählen als $g \cong \mathbb{R}^2$ die Zeichenebene mit Nullpunkt O . Jeder projektive Punkt P wird dann durch einen eindimensionalen Unterraum, also durch eine Nullpunktsgerade P (durch O) dargestellt. Nun zeichnen wir eine beliebige Gerade \bar{g} nicht durch O , und tragen den Schnittpunkt \bar{P} der Nullpunktsgeraden P , die den projektiven Punkt P darstellt, mit \bar{g} ein. Auf diese Weise wird jedem projektiven Punkt P genau ein (gewöhnlicher) Punkt \bar{P} der gewöhnlichen Geraden \bar{g} eindeutig zugeordnet; es gibt jedoch eine Ausnahme: Der durch die zu \bar{g} parallele Nullpunktsgerade dargestellte Punkt P_∞ geht leer aus, bis wir ihm *den einen* Fernpunkt von \bar{g} zuordnen. Lassen wir nun den Strahl P etwa im Uhrzeigersinn kontinuierlich um O rotieren, so wandert der zugeordnete Punkt \bar{P} zunächst nach rechts bis zum Fernpunkt und kommt dann von links wieder an. Die projektive Gerade ist als Punktreihe

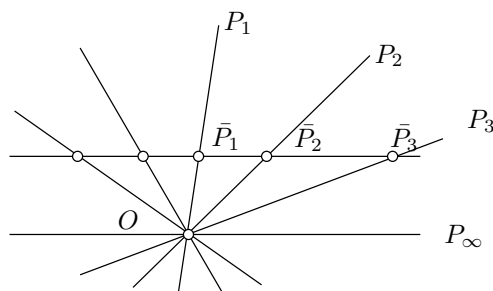


Abbildung 1.1

eine geschlossene Linie, der Fernpunkt keineswegs ein Ende, d.h. topologisch ist die projektive Gerade ein Kreis.

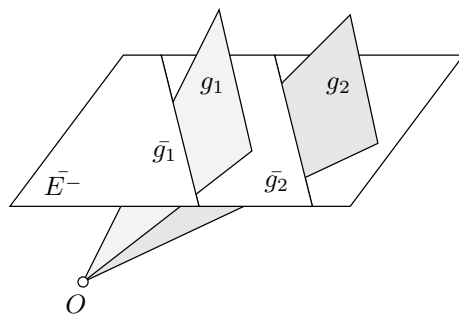


Abbildung 1.2

Analog können wir für die projektive Ebene vorgehen. Siehe Abbildung 1.2. Wir beginnen mit der Ebene als Strahlenfeld. Nach dem Unterraum-Modell sind diese Strahlen alle zweidimensionalen Unterräume eines dreidimensionalen Raumes E^- , der also isomorph zum \mathbb{R}^3 ist. Sein Nullpunkt sei wieder O . Jede projektive Gerade g unseres Feldes wird dann realisiert durch eine Ebene durch O . Nun zeichnen wir eine Ebene \bar{E}^- , nicht durch O und tragen die Schnittgeraden \bar{g} von g mit \bar{E}^- ein. Für jede projektive Gerade g erhalten wir in \bar{g} genau eine gewöhnliche Gerade in der gewöhnlichen Ebene \bar{E}^- , wobei wieder genau eine Ausnahme eintritt: Die durch die zu \bar{E}^- parallele Nullpunktsebene dargestellte Gerade g_∞ liefert mit \bar{E}^- keine gewöhnliche Schnittgerade, bis wir eben in \bar{E}^- noch *die* Ferngerade einführen. In dieser Ferngeraden liegen dann auch genau die Fernpunkte aller der Geraden, die ganz in der Ebene \bar{E}^- verlaufen. Da parallele Geraden den selben Fernpunkt haben, sind dies also genau die Fernpunkte der Geraden eines ganz in dieser Ebene liegenden Geradenbüschels.

Wir hatten festgestellt, daß die (reelle) projektive Gerade topologisch ein Kreis ist, sodaß es nahe liegt, zu vermuten, die (reelle) projektive Ebene sei eine Kugel. Dies ist *falsch!* Die richtige Vorstellung bekommt man, wenn man wieder von dem eben betrachteten Bild ausgeht, wobei die Punkte der projektiven Ebene dargestellt werden durch alle Nullpunktsgersten im \mathbb{R}^3 . Eine beliebige Kugelsphäre K mit Mittelpunkt im Nullpunkt O wird dann von einer solchen Nullpunktsgersten in zwei diametral gegenüberliegenden Punkten geschnitten und wir erhalten offenbar so eine Bijektion zwischen den Punkten der projektiven Ebene und den Paaren von Diametralpunkten einer Kugelsphäre. Das entstehende Gebilde hat große Ähnlichkeit mit dem *MÖBIUS-Band*:

Satz 1.6 Die topologische Gestalt der reellen projektiven Ebene ist eine geschlossene einseitige und damit nicht orientierbare Fläche.

Letzteres bedeutet, daß es möglich ist, etwa einen kleinen orientierten Kreis durch bloßes Verschieben auf der Fläche in den umgekehrt orientierten Kreis zu überführen. Siehe Abbildung 1.3.

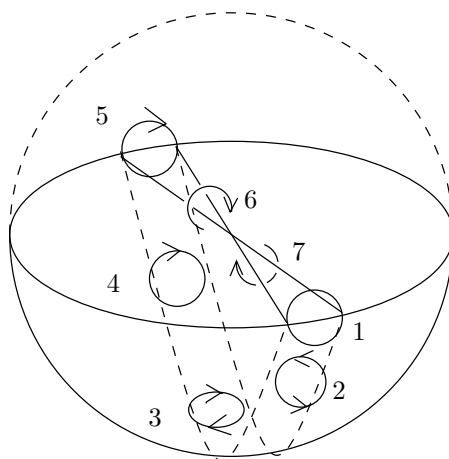


Abbildung 1.3

Es ist wohl deutlich, wie man fortzufahren hat, um die Äquivalenz von unserem geometrisch erzeugten Raum und dem reellen \mathbb{P}^3 vollständig zu beweisen.

Kehren wir nun zu der allgemeinen, durch die bisherigen Axiome beschriebenen Situation zurück, die keineswegs nur den \mathbb{P}^3 ergibt. Wir hatten schon bei den Grundphänomenen der Lage darauf hingewiesen, daß sie invariant sind unter dem Austauschen der Begriffe "Punkt" und "Ebene". Dies gilt auch für die weiteren schon formulierten Axiome – und wird auch für die noch hinzuzunehmenden gelten. Dies führt zu dem

Prinzip der Dualität 1.7 Mit jeder Aussage gilt auch ihre "duale", die durch formales Austauschen der Begriffe "Punkt" und "Ebene" ("Dualisieren") entsteht.

Man braucht jeweils nur eine der beiden zu beweisen, da auch der Beweis der anderen daraus durch Dualisieren entsteht.

Noch ein Wort zu den verwendeten

Notationen 1.8 Punkte bezeichnen wir durch Großbuchstaben mit einem hochgestelltem $+$: $A^+, B^+, \dots, P^+, \dots$, entsprechend Ebenen durch Großbuchstaben mit hochgestelltem $-$: $E^-, F^-, \dots, Q^-, \dots$ und Geraden mit kleinen Buchstaben. Es bezeichnet $v := X^+ \cap Y^+$ die Verbindungsgerade der Punkte X^+, Y^+ und $s := X^- \cap Y^-$ die Schnittgerade der Ebenen X^-, Y^- .

Das Zeichen \vee benutzen wir als allgemeinen Verknüpfungsoperator. So sind – geeignete gegenseitige Lage vorausgesetzt – $(P^+ \vee g)^-$ die Verbindungsebene des Punktes P^+ mit der Geraden g , entsprechend $(E^- \vee g)^+$ der Schnittpunkt der Ebene E^- mit der Geraden g . Treffen sich die Geraden g, h so bezeichnen $(g \vee h)^+$ bzw. $(g \vee h)^-$ den Schnittpunkt und die Verbindungsebene.

Projektivitäten

Neben den Objekten Punkt, Gerade, Ebene gehören zum Geometrisieren auch Abbildungen und die “richtigen”, genannt “*Projektivitäten*”, werden die Bijektionen sein, die die Inzidenzrelation erhalten: Sind zwei Urbilder inzident, so auch deren Bilder und umgekehrt.

Hier seien zunächst nur anfänglich “*Projektivitäten zwischen Grundgebilden erster Stufe (Bezeichnung 1.2)*” behandelt. Zentral dafür sind die Abbildungen durch Schnitt und Schein. Siehe Abbildung 1.4.

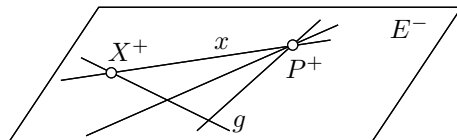


Abbildung 1.4

Es sei $B := P^+ \cap E^-$ ein Strahlenbüschel mit Zentrum P^+ und Ebene E^- , g sei eine Gerade in E^- , nicht durch P^+ . Dann hat jede Gerade $x \in B$ genau einen Schnittpunkt $X^+ := (x \vee g)^+$ mit g und umgekehrt liefert jeder Punkt $X^+ \in g$ genau eine Verbindungsgerade $x := X^+ \cap P^+$ mit P^+ .

Definition 1.9 Wir nennen für die eben beschriebene Konstruktion die Abbildung $B \rightarrow g, x \mapsto X^+$ die “*Abbildung durch Schnitt*” und deren Umkehrung, die Abbildung $g \rightarrow B, X^+ \mapsto x$ die “*Abbildung durch Schein*”, und notieren dafür

$$B(x) \stackrel{\text{Schnitt}}{\bar{\wedge}} g(X^+) \quad \text{bzw.} \quad g(X^+) \stackrel{\text{Schein}}{\bar{\wedge}} B(x).$$

Dieses Konstruktionsprinzip läßt sich natürlich auch auf andere Situationen anwenden.

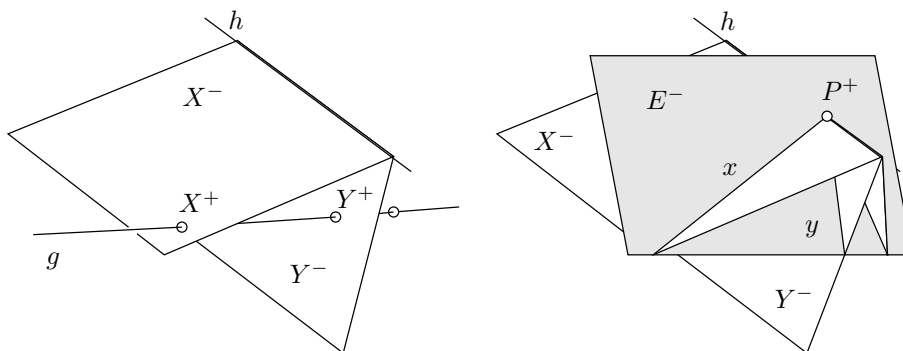


Abbildung 1.5

Ist etwa h eine Gerade, die durch das Büschelzentrum P^+ geht und nicht in der Ebene E^- liegt, so liefert jede Ebene X^- von h durch Schnitt mit der Büschelebene E^- eine Gerade x im Büschel B , und umgekehrt spannt jede Büschelgerade $x \in B$ mit h zusammen eine Ebene X^- des Ebenenbüschels um h auf. Auch hier redet man sinngemäß von *Schnitt* und *Schein*.

Schließlich kann man analog für zwei *windschiefe*, d.h. *sich nicht schneidende* Geraden g, h durch Schneiden bzw. Verbinden jeder Ebene der einen Geraden deren

Schnittpunkt mit der anderen zuordnen, bzw. einem Punkt der einen die durch ihn gehende Ebene der anderen.

Bei allen diesen Abbildungen spricht man von *Schnitt* und *Schein* und benutzt dafür sinngemäß die in Definition 1.9 eingeführte Notation. Siehe Abbildung 1.5.

Schnitt und Schein sowie eine simple Verallgemeinerung faßt man zusammen unter dem Namen "*perspektiv*".

Definition 1.10 (Perspektivität) 1. Zwei ungleichartige Grundgebilde heißen "*perspektiv auf einander bezogen*" – oder kurz "*perspektiv*" –, wenn die Zuordnung durch Schnitt/Schein gegeben ist.

2. Zwei gleichartige Grundgebilde heißen "*perspektiv auf einander bezogen*" – oder kurz "*perspektiv*" –, wenn die Zuordnung durch Schnitt/Schein über ein drittes Grundgebilde gegeben ist. Auch hierfür verwendet man das Zeichen $\bar{\bar{\lambda}}$, über dem man evtl. das vermittelnde Gebilde notiert.

In Abbildung 1.6 sind zwei solche Situationen dargestellt.

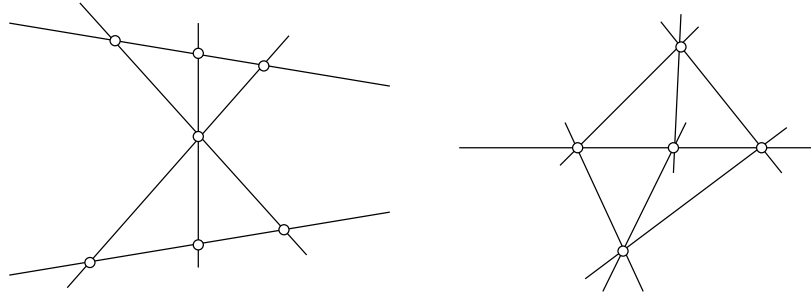


Abbildung 1.6

Hieraus gewinnen wir den allgemeinen Begriff der *Projektivität*:

Definition 1.11 (Projektivitäten für Grundgebilde erster Stufe) Eine Abbildung π zwischen zwei Grundgebilden g, g' erster Stufe heißt "*Projektivität*", wenn sie durch eine endliche Kette von Perspektivitäten realisiert werden kann. Die Notation

$$\pi : g(X, Y, \dots) \bar{\bar{\lambda}} g'(X', Y', \dots)$$

bezeichnet, daß π eine Projektivität zwischen g und g' ist, wobei X und X' einander zugeordnet sind und ebenso Y und Y' .

Da Perspektivitäten bijektiv sind, folgt sofort

Satz 1.12 *Projektivitäten sind bijektiv.*

Für diese Projektivitäten haben wir den folgenden

Existenzsatz 1.13 *Es seien g, g' zwei nicht notwendig verschiedene Grundgebilde erster Stufe, (A, B, C) bzw. (A', B', C') je drei paarweise verschiedene Elemente von g bzw. g' . Dann gibt es eine Projektivität*

$$\pi : g(A, B, C) \bar{\bar{\lambda}} g'(A', B', C'),$$

die also A und A' , B und B' sowie C und C' einander zuordnet.

Beweis: Betrachten wir zunächst den Fall, daß g und g' zwei verschiedene Geraden in einer Ebene sind und deren Schnittpunkt verschieden ist von den vorgegebenen sechs Punkten A^+, B^+, \dots . Dann gewinnen wir π über die in Abbildung 1.7 dargestellte Konstruktion:

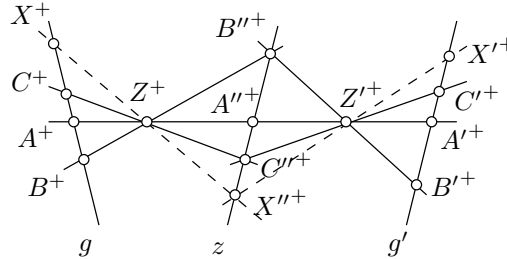


Abbildung 1.7

Verbinde A^+ und $A'+$. Wähle darauf zwei beliebige Punkte $Z^+, Z'+$, nicht auf g, g' und bilde die Geraden $B^+ \cap Z^+$ und $B'+ \cap Z'+$ mit Schnittpunkt $B''+$, sowie $C^+ \cap Z^+$ und $C'+ \cap Z'+$ mit Schnittpunkt $C''+$. $B''+$ und $C''+$ liefern als Verbindungsgerade z , die $A^+ \cap A'+$ in $A''+$ schneidet. Dann bekommen wir die folgende Kette von Perspektivitäten:

$$g(A^+, B^+, C^+, X^+) \xrightarrow{\bar{\lambda}^{Z^+}} z(A''+, B''+, C''+, X''+) \xrightarrow{\bar{\lambda}^{Z'+}} g'(A'+, B'+, C'+, X'+),$$

wodurch eine Projektivität mit den gewünschten Eigenschaften gefunden ist.

Alle anderen Fälle kann man auf diesen zurückführen:

Sind etwa gegeben eine Gerade g mit drei Punkten U^+, V^+, W^+ und ein Büschel $B = P^+ \cap E^-$ mit drei Strahlen u', v', w' , so wähle man eine beliebige Ebene E_1^- um g , die nicht durch P^+ geht, bilde die Schnittgerade $g' := E_1^- \cap E^-$ und beziehe B^+ und g' durch Schnitt/Schein aufeinander. Dann gehören zu u', v', w' drei Punkte $U'+, V'+, W'+$ auf g' . Die Konstruktion von oben, gefolgt von $g'(U'+, V'+, W'+) \xrightarrow{\text{Schein}} \bar{\lambda} B(u', v', w')$ liefert dann die gesuchte Projektivität.

Es ist wohl deutlich, wie in den übrigen Fällen zu verfahren ist. □

Nach dem hier Gezeigten ist klar, daß die Konstruktion zum Existenzsatz keineswegs eindeutig ist, sodaß die Frage entsteht, ob durch drei Paare eine Projektivität schon eindeutig bestimmt ist. Führt man verschiedene Konstruktionen auf dem Zeichenblatt – d.h. in der reellen Geometrie – aus, so scheint stets dasselbe zu entstehen. Andererseits lassen unsere Axiome noch ganz andere Geometrien zu, in denen definitiv keine Eindeutigkeit vorliegt. Wir nehmen daher noch weitere Axiome hinzu.

Axiome der Anordnung und Stetigkeit

In der Euklidischen Geometrie ist der Begriff *“Auf einer Geraden liegt der Punkt C^+ zwischen den Punkten A^+ und B^+ ”* wohlbekannt. Wenn dies ein auch der projektiven Geometrie angemessener Begriff ist, muß er sich unter Projektivitäten vernünftig verhalten, insbesondere also unter Schein-Bildung.

In Abbildung 1.8 liegt C^+ zwischen A^+ und B^+ , nicht aber D^+ . Für die daraus durch Schein aus einem außerhalb liegenden Zentrum Z^+ gebildeten Geraden a, b, c, d liegt aber d genau so gut “zwischen” a und b , wie c . “Zwischen” ist also kein projektiv sinnvoller Begriff. Dagegen haben wir in beiden Fällen die Evidenz, daß sich die ungeordneten Paare $\{A^+, B^+\}$ und $\{C^+, D^+\}$ gegenseitig trennen und

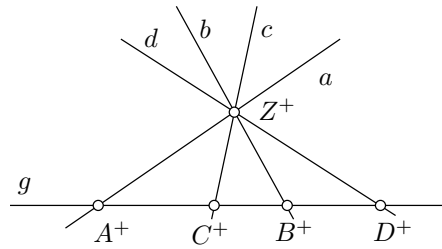


Abbildung 1.8

ebenso $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$. Dies wollen wir nun axiomatisch fassen. Dazu vereinbaren wir noch folgende Redeweise:

Definition 1.14 Die aus einem n -Tupel (g_1, \dots, g_n) von Elementen einer Menge M durch zyklisches Vertauschen hervorgehenden n -Tupel nennen wir "zyklische Umstellungen", das durch Rückwärtslesen entstehende die "Umkehrung". Genau die durch zyklische Umstellung aus der Grundform oder der Umkehrung hervorgehenden Tupel nenne wir "elementare Umordnungen".

Von einem m -Tupel (h_1, \dots, h_m) sagen wir "es kommt in (g_1, \dots, g_n) vor", wenn es Indizes $1 \leq i_1 < \dots < i_m \leq m$ gibt, sodaß $(h_1, \dots, h_m) = (g_{i_1}, \dots, g_{i_m})$ ist.

Damit können wir unsere Forderungen an Anordnung so aussprechen:

Grundphänomene der Anordnung 1.15

A0) In jedem Geradenbüschel B ist eine Relation zwischen je zwei ungeordneten Strahlenpaaren $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$ erklärt, die Relation des sich "Trennens". Stehen $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$ in Relation, so sagen wir auch $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$ "trennen sich" oder "a und b trennen c und d", etc.

Von dieser Relation verlangen wir:

A1 a) Trennen sich $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$, so sind alle vier Strahlen paarweise verschieden.

b) Trennen sich $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$, so auch $\{c, d\}$ und $\{a, b\}$. Die Relation ist symmetrisch.

c) Zu je drei Geraden a, b, c eines Büschels gibt es (mindestens) eine Büschelgerade d , sodaß sich $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$ trennen.

A2 a) Je $n \geq 4$ Geraden eines Büschels B lassen sich stets so als (a_1, \dots, a_n) nummerieren, daß für je vier Geraden $\{b_1, \dots, b_4\} \subset \{a_1, \dots, a_n\}$ gilt

– Kommt (b_1, \dots, b_4) in (a_1, \dots, a_n) vor, so trennen sich $\{b_1, b_3\}$ und $\{b_2, b_4\}$.

– Trennen sich $\{b_1, b_3\}$ und $\{b_2, b_4\}$, so kommt (b_1, \dots, b_4) oder eine elementare Umordnung davon in (a_1, \dots, a_n) vor.

Eine solche Nummerierung nennen wir "zyklische" Anordnung.

b) Alle zyklischen Anordnungen von $\{a_1, \dots, a_n\}$ sind elementare Umordnungen einer einzigen.

A3) Perspektivitäten zwischen Strahlenbüscheln erhalten die zyklische Anordnung.

Die letzte Forderung gibt insbesondere die Möglichkeit, die neuen Begriffe auch auf den übrigen Grundgebilden einzuführen.

Definition 1.16 Die Begriffe “sich Trennen” und “zyklische Anordnung” werden auf Punktreihen und in Ebenenbüscheln über Perspektive aus Strahlenbüscheln erklärt.

Wegen A3 ist es dabei unerheblich, wie man das konkret macht, es ergibt sich stets die selbe Relation. Insbesondere folgt damit auch

Satz 1.17 Projektivitäten erhalten die Trennrelation und zyklische Anordnung, kurz Projektivitäten sind “ordnungstreu”.

Betrachten wir einmal vier Geraden a, b, c, d in einem Büschel. Nach Axiom A2 lassen sie sich zyklisch anordnen. Sei etwa (a, b, c, d) eine solche Anordnung, wobei die Nummerierung durch die Position im Tupel gegeben ist. Dann sind nach A2 genau die folgenden 8 Anordnungen zyklisch:

$$\begin{array}{cccc} (a, b, c, d) & (b, c, d, a) & (c, d, a, b) & (d, a, b, c) \\ (d, c, b, a) & (a, d, c, b) & (b, a, d, c) & (c, b, a, d) \end{array}$$

Hier stehen a, c stets gleichzeitig auf Positionen mit ungerader Nummer oder mit gerader Nummer und ebenso b, d , was bedeutet, daß sich die Paare $\{a, c\}$ und $\{b, d\}$ trennen, andererseits aber auch, daß dies die einzige Möglichkeit ist, diese vier Geraden in zwei sich trennende Paare aufzuteilen. Geringfügig verallgemeinert liefert dies den folgenden

Satz 1.18 Vier Element a, b, c, d eines Grundgebildes erster Stufe lassen sich auf genau eine Weise in zwei sich trennende Paare aufteilen.

Eine weitere Folgerung aus A2 ist

Satz 1.19 1. Läßt man in einer zyklischen Anordnung ein oder mehrere Elemente weg, so entsteht wieder eine zyklische Anordnung (sofern noch genügend Elemente übrig!)

2. Sind $(a, b, c, d, e, \dots, m, n)$ und (a, x, b, c) zyklische Anordnungen, so auch die durch Zusammensetzen entstehende Anordnung $(a, x, b, c, d, e, \dots, m, n)$.

Beweis: Wir beweisen nur 2). Nach A2 kann man alle beteiligten Elemente in eine zyklische Anordnung bringen. Läßt man x weg, so entsteht dabei eine zyklische Anordnung der übrigen, die wir o.E. als die oben genannte annehmen können. Dann entsteht die Anordnung des Gesamten, indem man in diese letzte Anordnung an geeigneter Stelle x einschiebt. Wählt man eine andere als die behauptete, und läßt dann alles außer $\{a, b, c, x\}$ weg, so entsteht ein Widerspruch zur Anordnung (a, x, b, c) . \square

Die Trenn- bzw. Anordnungsrelation gibt noch zu weiteren Begriffen Anlaß. Sind $\{a, c\}, \{b, d\}$ zwei sich trennende Paare, so ist nach A2 jede Anordnung, die abwechselnd ein Element des einen und des anderen Paares benutzt, zyklisch. Dies ergibt genau die oben notierten acht Anordnungen, wobei jeweils die vier in einer Reihe nur durch zyklische Umordnung auseinander hervorgehen. Trägt man dies mit den üblichen (Euklidischen) Begriffen in einem Büschel auf, so erhält man zwei verschiedene Durchlaufrichtungen, wobei schon durch drei Geraden alles festgelegt ist.

Wir gewinnen daraus

Definition 1.20 Zwei Tripel (a, b, c) und (d, e, f) eines Grundgebildes B erster Stufe haben den “selben Sinn”, wenn entweder (d, e, f) eine zyklische Umstellung

von (a, b, c) ist, oder $\{a, b, c, d, e, f\}$ wenigstens vier Elemente enthält und in jeder zyklischen Anordnung aller dieser Elemente, in der (a, b, c) vorkommt auch (d, e, f) oder eine zyklische Umstellung davon vorkommt.

Satz und Definition 1.21 Durch die eben getroffene Festsetzung ist eine Äquivalenzrelation erklärt, die die Menge der Tripel von Elementen von B in genau zwei Äquivalenzklassen gruppiert.

Die zu (a, b, c) gehörende Äquivalenzklasse sei mit $\mathcal{O}(a, b, c)$ bezeichnet. Man nennt sie den "(Durchlauf-)Sinn" oder die "Orientierung" von (a, b, c) . Insbesondere ist

$$\mathcal{O}(a, b, c) = \mathcal{O}(b, c, a) = \mathcal{O}(c, a, b) \neq \mathcal{O}(c, b, a) = \mathcal{O}(b, a, c) = \mathcal{O}(a, c, b).$$

Ferner ist für vier Elemente genau dann $\mathcal{O}(a, b, c) \neq \mathcal{O}(a, b, d)$, wenn sich $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$ trennen.

Alle in einer zyklischen Anordnung (a_1, \dots, a_n) vorkommenden Tripel haben die selbe Orientierung. Wir sprechen diese auch als die Orientierung des n -Tupels (a_1, \dots, a_n) an.

Beweis: Daß für drei Elemente a, b, c die Beziehungen

$$\mathcal{O}(a, b, c) = \mathcal{O}(b, c, a) = \mathcal{O}(c, a, b) \neq \mathcal{O}(c, b, a) = \mathcal{O}(b, a, c) = \mathcal{O}(a, c, b).$$

gelten, folgt unmittelbar aus der Definition.

Sind nun d, e, f Elemente des selben Grundgebildes, sodaß $\{a, b, c, d, e, f\}$ wenigstens vier Elemente enthält, so ordne man alle so zyklisch an, daß darin (d, e, f) vorkommt. Dann kommt darin auch eine zyklische Umstellung von (a, b, c) oder von (c, b, a) vor. Im ersten Fall ist dann $\mathcal{O}(d, e, f) = \mathcal{O}(a, b, c)$, im zweiten Fall ist $\mathcal{O}(d, e, f) \neq \mathcal{O}(a, b, c)$. Folglich gibt es genau zwei Äquivalenzklassen.

Trennen sich $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$ so ist (a, d, b, c) eine zyklische Anordnung. In ihr kommt (a, b, c) aber keine zyklische Umordnung von (a, b, d) vor. Somit ist $\mathcal{O}(a, b, c) \neq \mathcal{O}(a, b, d)$.

Sind die beiden Orientierungen $\mathcal{O}(a, b, c)$ und $\mathcal{O}(a, b, d)$ verschieden, so kann keine zyklische Anordnung von allen vier Elementen sowohl (a, b, c) als auch eine zyklische Umstellung von (a, b, d) enthalten. Wesentlich verschiedene Anordnungen, die (a, b, c) enthalten, sind (a, b, c, d) , (a, b, d, c) , (a, d, b, c) , von denen aber nur die letzte nicht (a, b, d) (oder eine zyklische Umstellung davon) enthält. Damit ist (a, d, b, c) bis auf elementare Umordnungen die einzige Möglichkeit für eine zyklische Anordnung dieser Elemente, sodaß sich $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$ trennen. \square

Satz 1.22 Es ist (a, b, c, d) genau dann zyklisch, wenn (a, b, c) und (a, c, d) gleich orientiert sind.

Beweis: Es seien (a, b, c) und (a, c, d) gleich orientiert. Nach Axiom A2) gibt es eine zyklische Anordnung aller vier Elemente und wieder nach A2) können wir annehmen, daß (a, b, c) darin vorkommt. Da beide Orientierungen gleich sind, muß darin auch (a, c, d) oder (c, d, a) oder (d, a, c) vorkommen. Alle wesentlich verschiedenen Anordnungen, die (a, b, c) enthalten sind aber nur (a, d, b, c) , (a, b, d, c) und (a, b, c, d) . Von diesen erfüllt nur die letzte auch die zweite Bedingung, sodaß (a, b, c, d) die zyklische Anordnung sein muß.

Die Umkehrung ist trivial. \square

Die Abbildung 1.9 gibt uns einen unmittelbaren Eindruck davon, daß zwei Geraden a, b ein Büschel in zwei Winkelfelder zerlegen, nämlich eines, was noch eine gegebene Gerade c enthält, und eines, was diese nicht enthält. Aus unseren Axiomen können wir diesen Begriff so einführen:

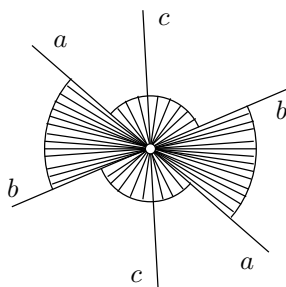


Abbildung 1.9

Definition 1.23 Zu Geraden a, b, c eines Büschels B sei

$$S_{ab/c} := \{x \in B \mid \{a, b\} \text{ und } \{c, x\} \text{ trennen sich}\},$$

das “von a und b gebildete Segment, das c nicht enthält” oder auch “das Segment der bezüglich c zwischen a und b liegenden Geraden”.

Die Geraden a, b gehören nicht zu $S_{ab/c}$. Wir bezeichnen

$$\overline{S_{ab/c}} := S_{ab/c} \cup \{a, b\}$$

und nennen dies den “Abschluß” oder das “abgeschlossene Segment”.

Sinngemäß sind Segmente auf Punktreihen bzw. in Ebenenbüscheln erklärt.

Man beachte, daß nach Axiom A1 die Gerade c *nicht* in dem eben erklärten Segment $S_{ab/c}$ liegt.

Für Segmente in Büscheln und sinngemäß in den anderen Grundgebilden gilt:

Satz 1.24 Zwei seiner Geraden a, b teilen ein Büschel in genau zwei Segmente. Zwei weitere Geraden x, y liegen genau dann im selben Segment, wenn sie von a und b nicht getrennt werden.

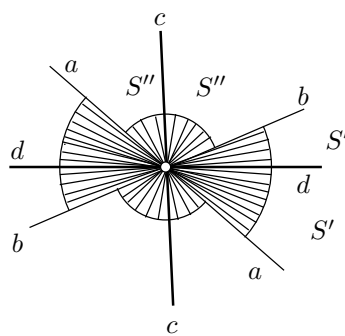


Abbildung 1.10

Beweis: Es seien a, b zwei Büschelgeraden, c, d zwei weitere, so daß sich $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$ trennen. (Dies geht nach A1.) Wir setzen

$$\begin{aligned} S' &:= S_{ab/c} = \{x \mid \{a, b\} \text{ und } \{c, x\} \text{ trennen sich}\}, \\ S'' &:= S_{ab/d} = \{x \mid \{a, b\} \text{ und } \{d, x\} \text{ trennen sich}\}, \end{aligned}$$

d.h. S' bzw. S'' ist das von a, b gebildete offene Segment, das die Gerade c bzw. d nicht enthält. Da sich $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$ trennen, haben wir

$$d \in S', \quad c \in S'', \quad \text{aber} \quad c \notin S', \quad d \notin S''.$$

(Siehe Abbildung 1.10).

Sei nun x ein beliebiger weiterer Strahl im Büschel. Da sich $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$ trennen, ist $acbd$ eine zyklische Ordnung und somit eine der folgenden vier Anordnungen zyklisch:

$$1. \quad axcbd, \quad 2. \quad acxbd, \quad 3. \quad acbxd, \quad 4. \quad acbdx.$$

Über Axiom A2) können wir aus diesen Anordnungen ablesen:

Bei 1.: $\{x, c\}$ trennt nicht $\{a, b\}$, aber $\{x, d\}$ trennt $\{a, b\}$, d.h. $x \notin S', x \in S''$.

Bei 2.: Dito.

Bei 3.: $\{x, c\}$ trennt $\{a, b\}$, und $\{x, d\}$ trennt nicht $\{a, b\}$, d.h. $x \in S', x \notin S''$.

Bei 4.: Dito.

Also gehört jede weitere Gerade x noch zu genau einem der beiden Segmente. Da $x \in S'$, genau wenn sich $\{x, c\}$ und $\{a, b\}$ trennen, folgt also, daß $x \in S''$, genau wenn sich $\{x, c\}$ und $\{a, b\}$ nicht trennen. Somit folgt, da ja $c \in S''$, daß x und c im selben Segment liegen, genau wenn sich $\{x, c\}$ und $\{a, b\}$ nicht trennen. Analog schließt man mit d . Damit haben aber c und d ihre spezielle Rolle verloren und der Satz ist gezeigt. \square

Wir werden in der sogenannten harmonischen Spiegelung (Satz und Bezeichnung 1.43) an zwei Elementen a, b eine Projektivität kennen lernen, die die beiden von a, b gebildeten Segmente bijektiv aufeinander abbildet. Damit folgt dann trivialerweise

Satz 1.25 *Jedes Segment enthält unendlich viele Elemente.*

Manchmal ist es zweckmäßig, Segmente über Orientierung zu charakterisieren. Wir beschreiben dies wieder an Geraden eines Büschels.

In einem Büschel B wählen wir willkürlich drei Geraden u, v, w und nennen deren Orientierung $\mathcal{O}(u, v, w)$ "positiv", die andere Orientierung "negativ". Dann gilt

Satz 1.26 *Zu zwei Geraden a, b eines Büschels B bilden die beiden Mengen*

$$\begin{aligned} S_+ &:= \{x \in B \mid (a, x, b) \text{ ist positiv orientiert}\} \text{ und} \\ S_- &:= \{y \in B \mid (a, y, b) \text{ ist negativ orientiert}\} \end{aligned}$$

die beiden von a, b erzeugten Segmente.

Beweis: Wähle ein beliebiges Geradenpaar $\{c, d\}$, was $\{a, b\}$ trennt. Dann sind nach Satz und Definition 1.21 die Orientierungen $\mathcal{O}(a, b, c)$ und $\mathcal{O}(a, b, d)$ verschieden. Somit ist etwa (a, b, c) positiv, (a, b, d) negativ orientiert. Damit folgt über Satz 1.22: Ist $x \in S_+$, so ist (a, x, b) positiv orientiert, ferner ist (a, b, c) positiv orientiert. Folglich ist (a, x, b, c) zyklisch. Damit trennen sich $\{a, b\}$ und $\{x, c\}$, sodaß $x \in S_{ab/c}$. Damit ist also $S_+ \subset S_{ab/c}$. Ebenso folgt, daß $S_- \subset S_{ab/d}$ liegt, woraus dann direkt die Behauptung folgt. \square

Das Hinzunehmen der Anordnungsaxiome schließt zwar etwa Geometrien über "zu großen" Körpern aus, reicht aber nicht hin, um die oben aus der Euklidischen gewonnene reelle Geometrie \mathbb{P}^3 zu charakterisieren. Dies gelingt erst, wenn wir noch ein weiteres Axiom hinzunehmen.

Wir fordern ein Analogon zum Schnitt-Axiom von DEDEKIND für die reellen Zahlen:

Grundphänomen der Vollständigkeit 1.27 In einem Büschel B sei das Segment $S_{ab/c}$ so in zwei nichtleere, disjunkte Mengen S_1, S_2 zerlegt, daß jede mit zwei Geraden s', s'' auch das ganze Segment $S_{s's''/c}$ enthält. Dann gibt es genau eine Gerade $z \in B$, sodaß für alle von z verschiedenen Geraden $s_1 \in S_1, s_2 \in S_2$ sich $\{s_1, s_2\}$ und $\{z, c\}$ trennen.

Bemerkung 1.28 Durch Schnitt und Schein überträgt sich diese Eigenschaft natürlich auch auf Punktreihen und Ebenenbüschel. Ferner ergibt sich allein aus der Existenz von z schon dessen Eindeutigkeit.

Wir haben nun alle Axiome notiert, die wir verwenden wollen. Es wird sich in Kapitel 3 zeigen, daß damit der reelle \mathbb{P}^3 charakterisiert ist.

Nach Satz 1.17 erhalten Projektivitäten die Trennrelation und die zyklische Anordnung. Dies liefert sofort

Satz 1.29 Das projektive Bild eines Segmentes ist wieder ein Segment.

Ferner war die Orientierung definierende Äquivalenzrelation allein über die Trennrelation und zyklische Anordnung definiert, vertauscht also mit Projektivitäten, sodaß das Bild einer Orientierungs-Äquivalenzklasse unter einer Projektivität φ wieder eine solche Klasse ist. Dabei gilt noch genauer

$$\varphi(\mathcal{O}(a, b, c)) = \mathcal{O}(\varphi(a), \varphi(b), \varphi(c)).$$

Bildet φ speziell ein Grundgebilde B erster Stufe in sich ab, so gehen also dessen beide Orientierungen unter φ wieder in diese beiden Orientierungen über, wobei sich jedoch die beiden Orientierungs-Klassen vertauschen können.

Definition 1.30 Eine Projektivität φ eines Grundgebildes B in sich heißt "gleichsinnig" oder "ungleichsinnig", je nachdem, ob sie die beiden Orientierungen von B je auf sich abbildet oder vertauscht.

Ein Beispiel für eine gleichsinnige Projektivität ist die Identität, die harmonische Spiegelung (Satz und Bezeichnung 1.43) wird sich als ungleichsinnig erweisen.

Betrachten wir ein (Euklidisches) Strahlenbüschel, darin eine ungleichsinnige Projektivität φ . Dreht man nun eine Gerade x gegen der Uhrzeigersinn durch das Büschel, so durchläuft die Bildgerade $\varphi(x)$ das Büschel mit dem Uhrzeigersinn und zweimal kommen x und $\varphi(x)$ zur Deckung, d.h. φ hat zwei Fixelemente.

Dies ist nun etwas, was auf's engste mit dem Vollständigkeitsaxiom verknüpft ist. Betrachten wir zunächst, um konkret zu sein, ungleichsinnige Projektivitäten auf einem Strahlenbüschel B .

Satz 1.31 Es sei φ eine ungleichsinnige Projektivität auf B . Dann gelten

1. φ hat höchstens zwei Fixelemente.
2. Es gibt ein Segment S , sodaß für dessen Abschluß noch $\varphi(\bar{S}) \subset \bar{S}$ und die "Randstrahlen" von S keine Fixelemente sind.

Beweis: Zur Abkürzung schreiben wir x' statt $\varphi(x)$, etc.

1. Hätte φ wenigstens drei Fixelemente f, g, h , so wäre für diese

$$\varphi(\mathcal{O}(f, g, h)) = \mathcal{O}(f', g', h') = \mathcal{O}(f, g, h),$$

da ja $f = f', g = g', h = h'$. Damit wäre φ aber gleichsinnig.

2. Wähle ein $a \in B$, sodaß $a \neq a' = \varphi(a)$ und damit auch $a'' := \varphi(a') \neq a'$. Wir fixieren irgend eine Orientierung als positiv und bilden die Segmente

$$S_+ := \{x \in B \mid (a, x, a') \text{ positiv orientiert}\},$$

$$S_- := \{y \in B \mid (a, y, a') \text{ negativ orientiert}\}.$$

φ überführt Segmente in Segmente und dreht die Orientierung um, sodaß also

$$\varphi(S_+) := \{x' \in B \mid (a', x', a'') \text{ negativ orientiert}\},$$

$$\varphi(S_-) := \{y' \in B \mid (a', y', a'') \text{ positiv orientiert}\}.$$

Ist $a = a''$, so folgt

$$\begin{aligned} \varphi(S_+) &= \{x' \in B \mid (a', x', a'') \text{ negativ orientiert}\} \\ &= \{x' \in B \mid (a', x', a) \text{ negativ orientiert}\} \\ &= \{x' \in B \mid (a, x', a') \text{ positiv orientiert}\} \\ &= S_+. \end{aligned}$$

Damit ist $\varphi(S_+) = S_+$, also auch $\varphi(\overline{S_+}) \subset \overline{S_+}$.

Sei $a \neq a''$ und etwa (a, a', a'') positiv orientiert. Für ein $y \in \varphi(S_-)$ ist (a', y, a'') positiv orientiert, somit (a, a', y, a'') zyklisch und damit auch noch (a, a', y) positiv orientiert. Dann ist aber (a, y, a') negativ orientiert, somit $y \in S_-$. Damit ist $\varphi(S_-) \subset S_-$.

a' liegt in $\overline{S_-}$ und in $\varphi(\overline{S_-})$ und, da (a, a'', a') negativ orientiert ist, liegt auch a'' in S_- . Also ist sogar $\varphi(\overline{S_-}) \subset \overline{S_-}$.

Ist (a, a', a'') negativ orientiert, so schließt man analog mit S_+ . \square

Insbesondere (aber nicht ausschließlich) auf ungleichsinnige Projektivitäten läßt sich also der folgende Satz anwenden. Wir formulieren ihn für ein Strahlenbüschel, er gilt natürlich sinngemäß für Punktreihen, Ebenenbüschel.

Satz 1.32 (Fixpunktsatz) *Es sei $\varphi : B(x) \bar{\wedge} B(x')$ eine Projektivität in einem Strahlenbüschel, die ein Segment $S := S_{ab/c}$ auf das Segment $S' := S_{a'b'/c'}$ abbilde, sodaß $\overline{S'} \subset \overline{S}$. Dann enthält $\overline{S'}$ ein Fixelement von φ .*

Beweis: Die Orientierung $\mathcal{O}(a, b, c)$ bezeichnen wir als positiv, sodaß dann also $S = \{x \in B \mid (a, x, b) \text{ positiv orientiert}\}$. Zur Abkürzung sagen wir für Geraden $x, y \in \overline{S}$:

“ x liegt vor y ” oder “ y liegt nach x ”, wenn $x = a$ oder (a, x, y) positiv orientiert ist. Trivialerweise liegt jedes Fixelement von φ , das in \overline{S} liegt, auch schon in $\varphi(\overline{S}) = \overline{S'}$. Wir nehmen nun an, in \overline{S} habe φ kein Fixelement, sodaß $x \neq x'$ für alle $x \in \overline{S}$ ist. Wir bilden die beiden Teilmengen von \overline{S}

$$S_1 := \{p \in \overline{S} \mid \text{Für alle } h \in \overline{S_{ap/c}} \text{ liegt } h \text{ vor } h'\} \cup \{a\},$$

$$S_2 := \{q \in \overline{S} \mid \text{Es gibt ein } k \in \overline{S_{aq/c}} \text{ mit } k' \text{ vor } k\}.$$

Wir zeigen nun, daß mit diesen Mengen S_1, S_2 das Vollständigkeitsaxiom anwendbar ist und die zugehörige “Schnitt”-Gerade z doch eine Fixgerade wäre. Nach Definition ist $a \in S_1$, ferner ist $b \neq b'$ und somit notwendig b' vor b , sodaß $b \in S_2$ liegt. Also sind beide Mengen nicht leer. Nach Konstruktion ist aber $S_1 \cap S_2 = \emptyset$. Ist $x \in \overline{S}, x \notin S_1$, so existiert ein $k \in \overline{S_{ax/c}}$, sodaß nicht k vor k' liegt. Dann ist aber entweder $k = k'$, was ja ausgeschlossen war, oder es ist k' vor k , d.h. $x \in S_2$. Somit ist $\overline{S} = S_1 \cup S_2$.

Ist $p \in S_1$, so ist nach Konstruktion auch jedes r vor p aus S_1 , d.h. es ist $\overline{S_{ap/c}} \subset S_1$ für alle $p \in S_1$.

Ist $q \in S_2$, so ist nach Konstruktion auch jedes s nach q aus S_2 , d.h. es ist $\overline{S_{qb/c}} \subset S_2$ für alle $q \in S_2$.

Damit kann man aber das Vollständigkeitsaxiom anwenden und wir erhalten ein Element $z \in \overline{S}$, sodaß $S_1 \subset \overline{S_{az/c}}$, $S_2 \subset \overline{S_{zb/c}}$.

Wir zeigen nun, daß dieses z im Gegensatz zur Annahme doch ein Fixelement sein muß, d.h. $z = z'$.

Dazu beweisen wir zunächst folgendes

Fakt 1.33 Für jedes Paar (x, y) aus S , für das x vor y ist, gilt für deren Bilder:

x' ist vor y' genau, wenn φ gleichsinnig ist,
 x' ist nach y' genau, wenn φ ungleichsinnig ist.

Beweis: Sei φ gleichsinnig und x, y, x', y', a' je verschieden von a und b . Da x vor y ist, ist (a, x, y) positiv orientiert, damit auch (a', x', y') positiv orientiert, ferner ist wegen $a', x', y' \in S$ auch (a, a', x', y', b) zyklisch. Damit ist auch (a, x', y') positiv orientiert, d.h. x' vor y' .

Analog schließt man für ungleichsinniges φ . Die Fälle, in denen Randelemente involviert sind, seien zur Übung gelassen. \square

Gibt es, wie angenommen, kein Fixelement, so ist also $z \neq z'$.

Wir zeigen: Dann ist φ notwendig ungleichsinnig.

Fall 1: Es sei $z \in S_1$: Dann ist z vor z' . Damit ist $z' \in S_2$ und es gibt ein $k \in \overline{S_{az'/c}}$ mit k' vor k . Dann ist aber $k \notin S_1$, also in S_2 und damit nach z . Folglich haben wir: z vor k , ferner k' vor k und k vor z' , somit k' vor z' . Also ist φ ungleichsinnig.

Fall 2: Es sei $z \in S_2$: Jedes h vor z liegt in S_1 und damit ist h vor h' . Da $z \in S_2$ muß dann nach Definition von S_2 notwendig z' vor z liegen. Wählt man h vor z aber nach z' , so ist dafür auch h vor h' , aber eben h vor z und h' nach h nach z' , sodaß h' nach z' liegt. Also ist φ auch in diesem Fall ungleichsinnig.

Nun betrachte (a, h, p, z) zyklisch (in S). Dann sind h, p vor z , somit in S_1 , folglich p' nach p . Ferner ist h vor p und, da φ ungleichsinnig ist, ist also p' vor h' , und damit dann h' nach p . Dies gilt für beliebige Elemente p ("nahe" bei z). Somit ist notwendig $h' = z$ oder h' nach z . Da noch $a' \in \overline{S_{zb/c}}$ ist, haben wir also, da das Bild jedenfalls in $\overline{S_{ab/c}}$ liegt,

$$\varphi(\overline{S_{az/c}}) = \overline{S_{a'z'/c'}} \subset \overline{S_{zb/c}}.$$

Analog betrachten wir (z, v, u, b) zyklisch. Dann sind $u, v \in S_2$, dabei u nach v . Zu $v \in S_2$ gibt es ein k , das vor v oder $= v$ ist, mit k' vor k . Sicher ist k vor u und k' vor v . Da φ ungleichsinnig ist und k vor u , ist u' vor k' , und da k' vor v , ist damit u' vor v . Da v beliebig aus S_2 war, folgt wieder u' vor z oder $u' = z$, d.h. wir bekommen wie oben

$$\varphi(\overline{S_{bz/c}}) = \overline{S_{b'z'/c'}} \subset \overline{S_{az/c}}.$$

Dies kann aber nicht sein, wenn $z \neq z'$!

Denn wäre etwa z' vor z , so wäre wegen $a' \in \overline{S_{zb/c}}$ dann $S_{z'z/c} \subset \overline{S_{z'a'/c'}} \subset \overline{S_{zb/c}}$, was nicht geht. Einen analogen Widerspruch bekommt man im anderen Fall. Mit diesem Widerspruch ist die Existenz eines Fixelementes nachgewiesen.

Einige Fälle in denen Randpunkte involviert sind, sind nicht explizit betrachtet, sie seien zur Übung gestellt. \square

Als erste Anwendung zeigen wir

Satz 1.34 Eine ungleichsinnige Projektivität φ eines Grundgebildes in sich hat genau zwei Fixpunkte.

Beweis: Nach Satz 1.31 hat φ höchstens zwei Fixelemente, ferner existiert ein Segment S , dessen Randelemente keine Fixelemente sind, sodaß $\varphi(\overline{S}) \subset \overline{S}$. Nach Satz 1.32 hat somit φ ein Fixelement in \overline{S} . Mit φ ist auch φ^{-1} ungleichsinnig und bildet das zu S komplementäre Segment T in sich ab. Somit hat φ^{-1} ein Fixelement in T , das natürlich auch ein Fixelement von φ ist. Da die Randelemente von S bzw. T nicht fix sind, könne die beiden Fixelemente von \overline{S} und \overline{T} nicht zusammenfallen, sodaß wir tatsächlich zwei verschiedene auch gefunden haben. \square

Eine weitere Anwendung werden wir beim Beweis des Fundamentalsatzes kennen lernen.

Harmonische Lage

Wir beginnen nun im projektiven Raum Geometrie zu betreiben, d.h. Folgerungen aus den Axiomen abzuleiten, die uns geometrische Einsichten vermitteln. Obwohl wir als Operationen im Wesentlichen nur Verbinden und Schneiden zur Verfügung haben, wird sich eine überraschende Fülle von Ergebnissen zeigen.

Wir beginnen mit dem

Satz von DESARGUES 1.35 (DESARGUES (1593 - 1662))

1. Gehen die Verbindungsgeraden $A^+ \cap A'^+$, $B^+ \cap B'^+$, $C^+ \cap C'^+$ zweier Dreiecke $A^+ B^+ C^+$ bzw. $A'^+ B'^+ C'^+$ durch einen Punkt S^+ , so liegen die Schnittpunkte der entsprechenden Dreiecksseiten $(a \vee a')^+$, $(b \vee b')^+$, $(c \vee c')^+$ auf einer Geraden.
2. Die Umkehrung gilt auch.

“Zwei Dreiecke sind entweder “zentriert” und “liniert” oder keines von beiden”.

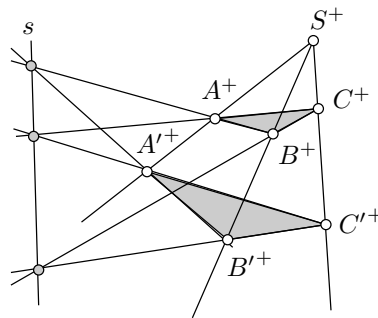


Abbildung 1.11

Beweis: Siehe Abbildung 1.11. Die beiden Dreiecke liefern Ebenen $E^- := (A^+ \vee B^+ \vee C^+)^-$ und $E'^- := (A'^+ \vee B'^+ \vee C'^+)^-$.

Fall 1: $E^- \neq E'^-$: Dann haben E^- , E'^- eine eindeutig bestimmte Schnittgerade s . Die Dreiecke sind zentriert, somit liegen A^+, A'^+, S^+ und B^+, B'^+, S^+ jeweils auf Geraden durch S^+ , die also in der Ebene $(A^+ \vee B^+ \vee S^+)^- = (A'^+ \vee B'^+ \vee S^+)^-$ liegen. In dieser Ebene liegen die Seiten $c := A^+ \cap B^+$ und $c' := A'^+ \cap B'^+$, schneiden sich also. Da zudem c der Ebene E^- , c' der Ebene E'^- angehört, muß der Schnittpunkt ein gemeinsamer Punkt von E^- und E'^- sein, also auf der Geraden s liegen. Völlig analog schließt man für die anderen Seiten. Damit ist die Behauptung 1. in diesem Fall gezeigt.

Fall 2: $E^- = E'^-$: Jetzt liegen beide Dreiecke in einer Ebene E^- und wir haben natürlich keine Schnittgerade, mit der wir argumentieren könnten. Deshalb verschaffen wir uns ein weiteres Dreieck $\hat{A}^+, \hat{B}^+, \hat{C}^+$ in einer Ebene $\hat{E}^- \neq E^-$, sodaß für dieses mit jedem der beiden gegebenen Dreiecke die Voraussetzung von Fall 1. gilt. Dann haben wir, daß $(a \vee \hat{a})^+ =: M^+$ auf s , $(a' \vee \hat{a}) =: M'^+$ auf s , d.h. $M^+ = (\hat{a} \vee s)^+$, $M'^+ = (\hat{a} \vee s)^+$, d.h. $M^+ = M'^+$. Somit gehen a und a' durch den selben Punkt von s . Analog für die anderen Seiten. (Den Spezialfall, der diesen Schluß nicht erlaubt, lösen Sie mal selbst!)

Ein solches Dreieck können wir so erhalten:

Wir legen durch S^+ eine Gerade g , die nicht in der Dreiecksebene E^- liegt, und wählen darauf zwei Punkte S_1^+, S_2^+ beide $\neq S^+$. Nun liegen A^+, A'^+, S^+ und S^+, S_1^+, S_2^+ je auf verschiedenen Geraden durch S^+ , somit alle fünf Punkte in einer Ebene. Diese Ebene enthält dann auch die Geraden $S_1^+ \vee A^+$ und $S_2^+ \vee A'^+$. Ihr Schnittpunkt sei \hat{A}^+ . Analog gewinnen wir \hat{B}^+, \hat{C}^+ . Nach Konstruktion liegen S_1^+, A^+, \hat{A}^+ und S_2^+, A'^+, \hat{A}^+ je in einer Geraden und Analoges gilt für B^+, C^+ . Somit können wir jeweils die räumliche Version von Fall 1. anwenden.

Damit ist die Aussage 1. im wesentlichen gezeigt; die Umkehrung, d.h. die Aussage 2. beweist man mit den selben Ideen. \square

Im Falle $E^- = E'^-$ ist der DESARGUESsche Satz ein Satz über eine ebene Figur, der Beweis benutzt aber die dritte Raumdimension. Dies ist insofern unvermeidbar, als es sog. "Nicht-DESARGUESsche Ebenen" gibt, in denen die entsprechenden Axiome des Verbindens und Schneidens gelten, aber nicht der Satz von DESARGUES. Diese kann man dann natürlich nicht in unseren \mathbb{P}^3 einbetten.

Bemerkung 1.36 *Den Satz von DESARGUES kann man natürlich räumlich dualisieren, wobei also Punkte in Ebenen und Ebenen in Punkte übergehen. Formulieren und beweisen Sie diesen Satz selbst.*

Dieser Satz von DESARGUES hilft uns, den zentralen Begriff der "harmonischen Lage" oder des "harmonischen Wurfes" zu gewinnen. Wir entwickeln ihn am Viereck. Siehe Abbildung 1.12.

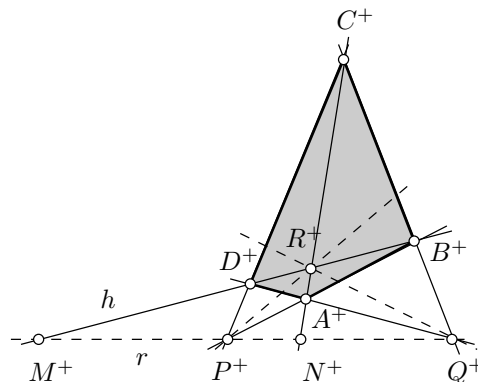


Abbildung 1.12

In einer für das folgende festgewählten Ebene seien 4 Punkte A^+, B^+, C^+, D^+ in allgemeiner Lage, d.h. nicht drei auf einer Geraden, gegeben. Diese 4 Punkte haben $\binom{4}{2} = 6$ Verbindungsgeraden. Die 4 Punkte mit den 6 Verbindungsgeraden bilden das "vollständige Viereck". Dies hat also 4 Ecken und 6 Seiten. Die Seitenschnittpunkte sind einmal die 4 Ecken A^+, B^+, C^+, D^+ , daneben gibt es aber noch

3 weitere Schnittpunkte P^+, Q^+, R^+ , die sog. "Nebenecken" des Vierecks, die zusammen mit ihren Verbindungsgeraden, genannt "Nebenseiten", das "Nebendreieck" des Vierecks bilden.

Jede Nebenseite hat außer den auf ihr liegenden 2 Nebenecken, in denen sich je 2 Viereckseiten schneiden, noch je einen Schnittpunkt mit den verbleibenden 2 Viereckseiten. Etwa $r := P^+ \cap Q^+$ besitzt die weiteren Schnittpunkte M^+, N^+ . Sie sind untereinander und von den Punkten P^+, Q^+ verschieden. Nach Abbildung 1.12 scheinen sich die Punktepaare $\{P^+, Q^+\}$ und $\{M^+, N^+\}$ zu trennen. Dies ist tatsächlich der Fall.

Satz 1.37 *Es seien $A^+B^+C^+D^+$ ein nicht ausgeartetes Viereck, dazu P^+, Q^+, R^+ die Nebenecken, $r := P^+ \cap Q^+$ Nebenseite und darauf wie in Abbildung 1.12 M^+ und N^+ die Schnittpunkte mit den weiteren Viereckseiten. Dann gelten*

1. Die Punkte P^+, Q^+, R^+ sind untereinander und von den Vierecksecken verschieden.
2. Die Punktepaare $\{P^+, Q^+\}$ und $\{M^+, N^+\}$ trennen sich (im durch die Axiome gegebenen Sinne). Sinngemäß gilt dies für die anderen Nebenseiten auch.
3. Die Punkte P^+, Q^+, R^+ sind nicht kollinear.

Beweis: Zu 1.: Wäre etwa $P^+ = Q^+$, so wären die Geraden $A^+ \cap P^+$ und $A^+ \cap Q^+$ identisch und darauf liegen ja die Ecken A^+, B^+ und D^+ . Das Viereck wäre also ausgeartet.

Zu 2.: Siehe Abbildung 1.13. Auf der Seite $A^+ \cap B^+$ wählen wir einen Punkt S^+

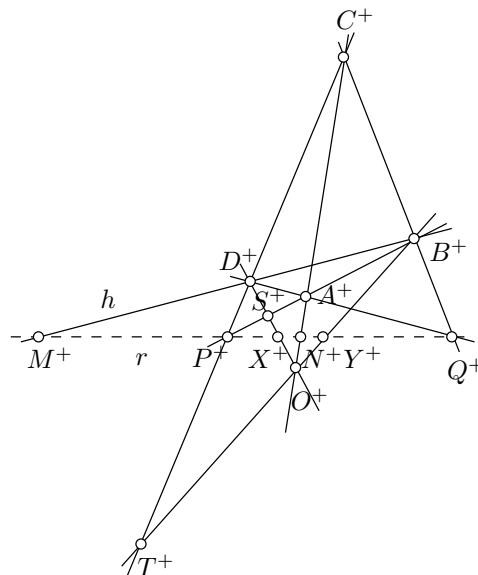


Abbildung 1.13

so, daß $P^+S^+A^+B^+$ zyklisch ist. Damit konstruieren wir, wie in Abbildung 1.13 dargestellt, die Punkte O^+, X^+, Y^+, T^+ . Projektive Bilder von $P^+S^+A^+B^+$ sind

ebenfalls zyklisch. Wir bekommen so etwa

$$\begin{aligned} (1) \quad & P^+S^+A^+B^+ \stackrel{D^+}{\bar{\wedge}} P^+X^+Q^+M^+, \\ (2) \quad & P^+S^+A^+B^+ \stackrel{O^+}{\bar{\wedge}} P^+D^+C^+T^+ \stackrel{B^+}{\bar{\wedge}} P^+M^+Q^+Y^+, \\ (3) \quad & P^+S^+A^+B^+ \stackrel{O^+}{\bar{\wedge}} P^+X^+N^+Y^+. \end{aligned}$$

Nach (1) und (2) werden X^+ wie Y^+ durch $\{P^+, Q^+\}$ von M^+ getrennt, liegen somit im Segment $S_{P^+Q^+ / M^+}$. Folglich ist entweder $P^+X^+Y^+Q^+M^+$ oder $P^+Y^+X^+Q^+M^+$ zyklisch. Zusammen mit (3) folgt dann aber aus Satz 1.19, daß notwendig $P^+X^+N^+Y^+Q^+M^+$ oder $P^+Y^+N^+X^+Q^+M^+$ zyklisch ist, wonach in jedem Falle sich $\{P^+, Q^+\}$ und $\{M^+, N^+\}$ trennen.

Zu 3.: Nach 2. sind insbesondere M^+ und N^+ verschieden. Wären P^+, Q^+, R^+ kollinear, so wäre im Widerspruch dazu $R^+ = M^+ = N^+$. \square

Die Abbildung 1.12 vermittelt also einen zutreffenden Eindruck.

Ausgehend von dreien dieser Punkte, etwa M^+, P^+, Q^+ , können wir auf viele Weisen vollständige Vierecke konstruieren, in denen M^+, P^+, Q^+ , die Bedeutung aus Abbildung 1.12 haben. Etwa so:

Konstruktion 1.38 – *Lege durch jeden der Punkte eine Gerade. Die Schnittpunkte werden D^+, B^+, C^+ .*

- Bilde die Verbindungsgeraden $P^+ \cap B^+$ und $Q^+ \cap D^+$, deren Schnittpunkt A^+ sei.
- Dann liefert $A^+ \cap C^+$ den fehlenden Punkt N^+ .

Üben Sie diese Konstruktion, bis sie im Schlaf geht!

Führt man dies durch, so erscheint immer der selbe Punkt N^+ . Dies ist kein Zufall.

Satz 1.39 *Der Punkt N^+ auf der Geraden r ist schon durch die Punkte M^+, P^+, Q^+ bestimmt und unabhängig davon, wie man obige Konstruktion im Einzelnen ausführt.*

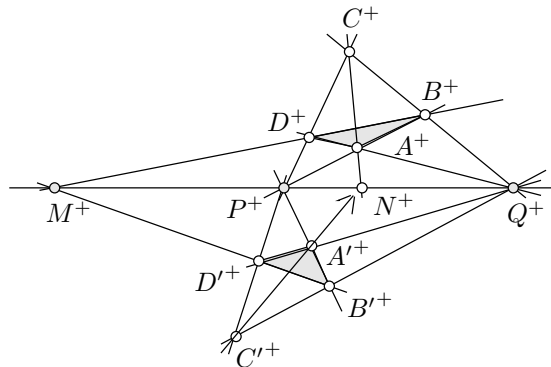


Abbildung 1.14

Beweis: In Abbildung 1.14 ist zu den gegebenen Punkten M^+, P^+, Q^+ die obige Konstruktion zweimal ausgeführt. Wir beweisen die Eindeutigkeit des Punktes N^+ über eine mehrfache Anwendung des Satzes von DESARGUES. Betrachten wir die Dreiecke $A^+B^+D^+$ und $A'^+B'^+D'^+$. Entsprechende Seiten schneiden sich in den Punkten M^+, P^+, Q^+ auf r . Somit sind die Dreiecke liniert, also auch zentriert, d.h. die Geraden $A^+ \cap A'^+, B^+ \cap B'^+, D^+ \cap D'^+$ gehen durch einen Punkt S^+ . Die selben Betrachtungen gelten für die Dreiecke $C^+B^+D^+$ und $C'^+B'^+D'^+$. Somit gehen auch die Geraden $B^+ \cap B'^+, C^+ \cap C'^+, D^+ \cap D'^+$ durch einen Punkt \hat{S}^+ . S^+ wie \hat{S}^+ ist Schnittpunkt der Geraden $B^+ \cap B'^+$ und $C^+ \cap C'^+$, woraus $S^+ = \hat{S}^+$ folgt. Damit gehen alle 4 Geraden $A^+ \cap A'^+, B^+ \cap B'^+, C^+ \cap C'^+, D^+ \cap D'^+$ durch einen Punkt, also insbesondere auch $A^+ \cap A'^+, B^+ \cap B'^+, C^+ \cap C'^+$, was besagt, daß die Dreiecke $A^+B^+C^+$ und $A'^+B'^+C'^+$ zentriert sind, nach DESARGUES also auch liniert. Nun treffen sich $A^+ \cap B^+$ und $A'^+ \cap B'^+$ in P^+ auf r , $B^+ \cap C^+$ und $B'^+ \cap C'^+$ in Q^+ auf r , und somit treffen sich auch $A^+ \cap C^+$ und $A'^+ \cap C'^+$ in *einem* Punkt N^+ auf r . Beide Konstruktionen liefern also den selben Punkt N^+ . \square

Diese Eindeutigkeit rechtfertigt die folgende

Definition 1.40 Wir nennen ein Quadrupel (M^+, P^+, N^+, Q^+) auf einer Geraden einen "harmonischer Wurf" oder in "harmonischer Lage", bzw. sagen, daß die Paare $\{P^+, Q^+\}$ und $\{M^+, N^+\}$ sich "harmonisch trennen", wenn $\{P^+, Q^+\}$ Nebenecken eines vollständigen Vierecks sind und $\{M^+, N^+\}$ die weiteren Schnittpunkte von Vierecksseiten mit dieser Nebenseite $P^+ \cap Q^+$.

Wegen Satz 1.37 trennen sich Punktepaare, die sich "harmonisch trennen" auch im Sinne der Axiomatik.

Der Begriff der harmonischen Lage ist *der* zentrale Begriff für alles weitere. Machen Sie sich insbesondere an speziellen (Euklidischen) Vierecken klar, daß etwa N^+ der Euklidische Mittelpunkt von P^+ und Q^+ wird, wenn man M^+ als Fernpunkt der Geraden wählt. (Man nehme zunächst auch C^+ als Fernpunkt.) Harmonische Lage übernimmt in der projektiven Geometrie die ordnende Funktion, die im Euklidischen eben durch das Mittelpunktbilden, oder allgemeiner das Vergleichen von Strecken, d.h. das Messen gegeben ist.

In der gegebenen Definition haben die beiden Punktepaare noch verschiedene Rollen. Dies ist aber nur scheinbar so. Um dies zu sehen, gehen wir nochmals vom vollständigen Viereck aus, erweitern aber noch unsere Konstruktion zur sogenannten "harmonischen Grundfigur"(Abbildung 1.15).

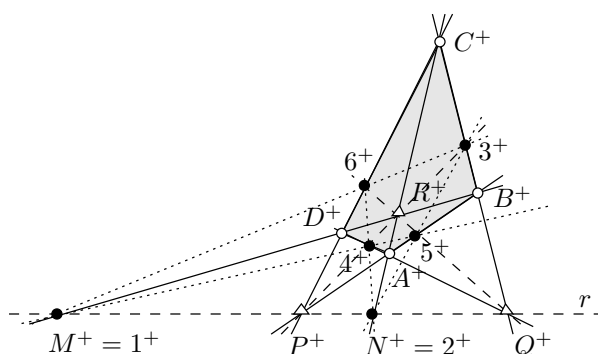


Abbildung 1.15

Dazu führen wir folgende Konstruktion aus:

- Beginne mit dem Viereck $A^+B^+C^+D^+$ und seinen 6 Seiten — .

- Bilde das Nebendreieck $P^+Q^+R^+$ mit den drei Nebenseiten - - - - .
- Bilde die Schnittpunkte $1^+ = M^+, 2^+ = N^+, 3^+, 4^+, 5^+, 6^+$ von den Nebenseiten mit den Viereckseiten und ziehe deren 4 Verbindungsgeraden

Daß beim letzten Schritt tatsächlich nur 4 neue Geraden entstehen, folgt wieder mit dem Satz von DESARGUES: Die Dreiecke $P^+Q^+R^+$ und $D^+B^+A^+$ sind in C^+ zentriert. Somit sind sie liniert, d.h. die Schnittpunkte

- 1^+ von $P^+ \cap Q^+$ und $D^+ \cap B^+$
- 5^+ von $Q^+ \cap R^+$ und $B^+ \cap A^+$
- 4^+ von $R^+ \cap P^+$ und $A^+ \cap D^+$

liegen auf einer Geraden. Analog zeigt man, daß alle neuen Verbindungsgeraden dieser Punkte je drei von ihnen enthalten.

Diese Abbildung 1.15 heißt die *“harmonische Grundfigur”*.

- Sie besteht aus $4 + 3 + 6 = 13$ Punkten
- und $6 + 3 + 4 = 13$ Geraden.

Wir werden sie noch genauer studieren. Zunächst betrachten wir nur das Viereck $3^+, 4^+, 5^+, 6^+$. Es hat M^+, N^+ als Nebenecken und P^+, Q^+ als Schnittpunkte weiterer Viereck-Seiten mit der entsprechenden Nebenseite, d.h. die Qualitäten “Nebenecke” und “weiterer Schnittpunkt mit Nebenseite” haben sich gerade vertauscht und unsere symmetrische Definition von harmonischer Lage ist gerechtfertigt.

Ferner liest man ab:

Je 4 in der harmonischen Grundfigur auf einer Geraden eingezeichnete Punkte bilden einen harmonischen Wurf.

Für je 4 Punkte auf einer Nebenseite ist dies klar. Betrachten wir eine Viereck-Seite, etwa $B^+ \cap C^+$ mit den Punkten $Q^+, B^+, 3^+, C^+$. Für das Viereck $A^+R^+D^+P^+$ ist der Schnittpunkt B von $P^+ \cap A^+$ und $R^+ \cap D^+$ eine Nebenecke, ebenso der Schnittpunkt C^+ von $P^+ \cap D^+$ und $A^+ \cap R^+$, der Punkt 3^+ liegt auf $P^+ \cap R^+$, der Punkt Q^+ auf $D^+ \cap A^+$, womit die harmonische Lage gezeigt ist. Analog geht man für die anderen Geraden vor.

Der Träger eines harmonischen Wurfes (M^+, P^+, N^+, Q^+) war eine Gerade als Punktreihe. Genausogut können wir natürlich harmonische Lage in Geraden- oder Ebenen-Büscheln einführen. Später werden wir noch allgemeinere Träger nutzen können.

Die *“harmonische Lage von 4 Ebenen eines Ebenenbüschels”* gewinnt man aus unserer Definition 1.40 durch räumliches Dualisieren. Man baut also alle durchgeführten Konstruktionen nach, indem man die Begriffe Punkt und Ebene austauscht, wobei Verbindungsgerade zweier Punkte durch Schnittgerade zweier Ebenen zu ersetzen ist. Das Ganze spielt sich dann nicht mehr in einer Ebene als Punkt- und Geradenfeld sondern in einem Punkt als Ebenen- und Geraden-Bündel ab und ist der Vorstellung entsprechend schwieriger zugänglich. Versuchen Sie dennoch sich ein Bild zu machen.

Die *“harmonische Lage von 4 Geraden eines Geradenbüschels”* können wir auf zweifache Weise einführen, die sich jedoch als äquivalent erweisen; nämlich indem wir

- entweder das Büschel als Teil eines ebenen Feldes ansehen, also mit Geraden und Punkten einer Ebene operieren,
- oder das Büschel als Teil eines zentrischen Bündels ansehen, also mit Geraden und Ebenen operieren.

Diskutieren wir den ersten Aspekt:

In einer festen Ebene wählen wir 4 Geraden a, b, c, d in allgemeiner Lage, d.h. nicht drei durch einen Punkt. Diese 4 Geraden haben $\binom{4}{2} = 6$ Schnittpunkte. Die 4 Geraden mit den 6 Schnittpunkten bilden das *“vollständige Vierseit”*. Dies hat also 4 Seiten und 6 Ecken. Die Verbindungsgeraden dieser 6 Schnittpunkte sind einmal die 4 Geraden a, b, c, d , daneben gibt es aber noch 3 weitere solche Verbindungsgeraden p, q, r , die sog. *“Nebenseiten”* des Vierseits, die zusammen mit ihren Schnittpunkten,

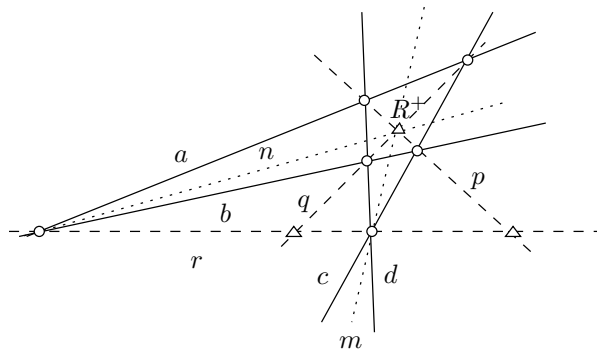


Abbildung 1.16

genannt “Nebenecken”, das “Nebendreieck” des Vierseits bilden (Abbildung 1.16). Vergleichen Sie das mit der bisher ausgeführten Konstruktion (Abbildung 1.15).

Zwei Nebenseiten, etwa p, q schneiden sich in einem Punkt R^+ , auf ihnen liegen insgesamt 4 der 6 Vierseit-Ecken. Verbinden wir R^+ mit den restlichen beiden Ecken, so erhalten wir 2 Geraden m, n . Wir sagen

Die Geraden (m, p, n, q) bilden einen “harmonischen Strahlenwurf im Büschel R^+ ”.

Über den Satz von DESARGUES zeigt man wieder, daß zu m, p, q der Strahl n eines harmonischen Wurfes eindeutig festgelegt ist, und daß die Rollen von p, q und m, n wieder völlig symmetrisch sind. Ferner ergibt sich, daß die beiden formal verschiedenen Begriffe von harmonischer Lage im Strahlenbüschel (s.o.) zusammenfallen und, daß die Begriffe von harmonischer Lage in verschiedenen Gebilden über Schnitt/Schein auseinander hervorgehen.

Wir begnügen uns damit, den Zusammenhang zwischen der harmonischen Lage von Punkten und dem zuletzt behandelten Begriff der harmonischen Lage von Geraden in einem Büschel darzustellen.

Dazu gehen wir nocheinmal zu der *harmonischen Grundfigur* (Abbildung 1.15) zurück, deren Konstruktion mit 4 Punkten begann und mit 4 Geraden endete. Beginnt man nun in der fertigen Figur die 4 letzterhaltenen Geraden zu markieren, dann deren Schnittpunkte u.s.w., so erhält man durch Ausführen der gesamten Konstruktion in umgekehrter Reihenfolge wieder die *harmonische Grundfigur*. Diesmal ist sie aber entstanden aus der Konstruktion zur harmonischen Lage von 4 Geraden eines Büschels. Dies bedeutet:

Satz 1.41 1. *Die harmonische Grundfigur der Ebene bestehend aus 13 Punkten und 13 Geraden ist eine eben-selbstduale Figur, d.h. sie geht beim Austauschen von Punkten und Geraden in sich selbst über.*

2. *Je 4 ihrer Punkte, sofern sie auf einer Geraden liegen, bilden einen harmonischen Punktwurf.*
3. *Je 4 ihrer Geraden, sofern sie durch einen Punkt gehen, bilden einen harmonischen Strahlenwurf.*

Beweis: Die ersten beiden Aussagen haben wir schon gezeigt, die letzte folgt aus der zweiten, da der Satz von DESARGUES invariant ist unter dem Dualisieren in der Ebene. □

Schließlich erweist sich “harmonische Lage” als projektiver Begriff, d.h. als eine Eigenschaft, die sich unter Projektivitäten erhält.

Satz 1.42 1. Schnitt und Schein zwischen verschiedenartigen Grundgebilden erster Stufe erhalten harmonische Lage.

2. Projektivitäten erhalten harmonische Lage.

Beweis: Da Projektivitäten als endliche Ketten von Schnitt/Schein erklärt sind, folgt natürlich die zweite Aussage direkt aus der ersten.

Bleibt die erste zu beweisen. Wir betrachten zunächst Punktreihe und Geradenbüschel. In der harmonischen Grundfigur Abbildung 1.15 haben wir auf der Nebenseite r die 4 Punkte M^+, P^+, N^+, Q^+ , die einen harmonischen Wurf bilden. Die durch Schein aus dem Punkt R^+ aus ihnen entstehenden 4 Geraden gehören ebenfalls zur harmonischen Grundfigur, bilden also nach dem eben gezeigten Satz ebenfalls einen harmonischen Wurf. Wir sind also fertig, wenn wir noch zeigen, daß man die harmonische Grundfigur etwa aus kollinearen Punkten M^+, P^+, Q^+ und einem dazu nicht kollinearen Punkt R^+ aufbauen kann. Dies geht über folgende Konstruktion: P^+, Q^+, R^+ legen das Nebendreieck mit den Nebenseiten (---) fest, $M^+ \cap R^+$ eine Viereck-Seite. Nun wähle auf $M^+ \cap R^+$ beliebig D^+ . $D^+ \cap Q^+$ schneidet $P^+ \cap R^+$ im Punkt 4^+ , $M^+ \cap 4^+$ schneidet $R^+ \cap Q^+$ im Punkt 5^+ und $P^+ \cap 5^+$ ergibt mit $M^+ \cap R^+$ den Punkt B^+ . Der Schnitt von $P^+ \cap D^+$ mit $Q^+ \cap B^+$ liefert C^+ , der von $P^+ \cap B^+$ mit $Q^+ \cap D^+$ den Punkt A^+ . Wir haben somit die folgende Abbildung 1.17 erhalten.

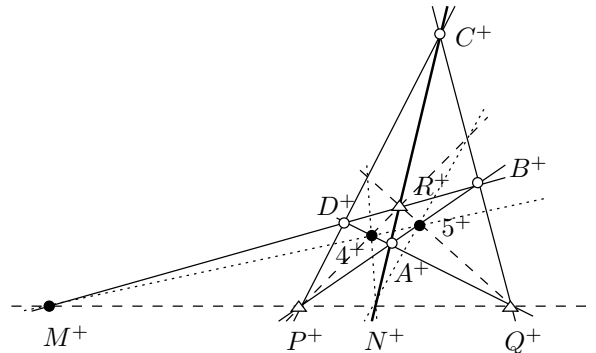


Abbildung 1.17

Nach Konstruktion sind P^+, Q^+ Nebenecken von $A^+B^+C^+D^+$, ferner M^+ der Schnitt einer Seite mit einer Nebenseite, dito N^+ für die Seite $A^+ \cap C^+$. Bleibt zu zeigen, daß R^+ weitere Nebenecke ist, d.h. daß A^+, C^+, R^+ kollinear sind. Dies folgt aber aus dem Satz von DESARGUES für die in M^+ zentrierten Dreiecke $P^+4^+D^+$ und $Q^+5^+B^+$. Damit läßt sich aber diese Figur zur harmonischen Grundfigur ergänzen und unsere Behauptung ist gezeigt.

Räumliches Dualisieren liefert uns den selben Zusammenhang zwischen Strahlenbüscheln (andere Fassung für harmonische Lage) und Ebenenbüscheln.

Schließlich kann man die zentrische Grundfigur aus der ebenen gewinnen, indem man zunächst eben dualisiert und dann aus einem nicht in dieser Ebene liegenden Zentrum den Schein bildet. Dies liefert dann die noch ausstehenden Relationen. \square

Harmonische Lage und Anordnung

Wir hatten schon in Satz 1.37 festgestellt, daß sich Punkte, die sich harmonisch trennen, auch im Sinne der Axiomatik trennen. Die Beziehungen zwischen harmonischer Lage und Anordnung seien noch etwas genauer betrachtet.

Satz und Bezeichnung 1.43 1. Zu festen Punkten P^+, Q^+ auf einer Geraden g ist die Abbildung

$$\sigma_{PQ} : g(P^+, Q^+, X^+) \rightarrow g(P^+, Q^+, X'^+),$$

wobei $\{P^+, Q^+\}, \{X^+, X'^+\}$ harmonisch getrennt sind, eine Projektivität.

Für sie ist $\sigma_{PQ} = \sigma_{PQ}^{-1}$.

σ_{PQ} heißt die "harmonische Spiegelung" an P^+, Q^+ .

2. Die harmonische Spiegelung ist ungleichsinnig.
3. Sinngemäß erklärt man harmonische Spiegelungen in Geraden - oder Ebenenbüscheln.

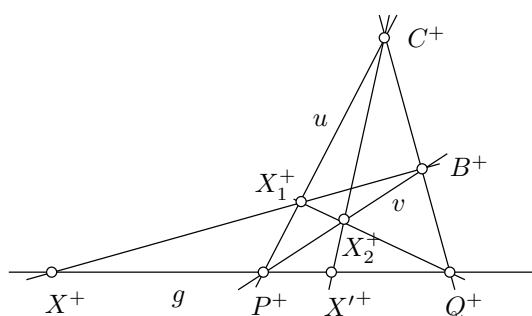


Abbildung 1.18

Beweis:

1. Wir fixieren zwei zu Q^+ kollineare Punkte B^+, C^+ . Zu jedem Punkt X^+ auf g ergibt sich dann die in Abbildung 1.18 dargestellte Situation. Hier sind die Paare $\{P^+, Q^+\}, \{X^+, X'^+\}$ harmonisch getrennt, ferner haben wir die Perspektivitäten

$$g(P^+, Q^+, X^+) \stackrel{B^+}{\bar{\wedge}} u(P^+, C^+, X_1^+) \stackrel{Q^+}{\bar{\wedge}} v(P^+, B^+, X_2^+) \stackrel{C^+}{\bar{\wedge}} g(P^+, Q^+, X'^+).$$

Die Aussage über σ_{PQ}^{-1} folgt aus der Symmetrie der harmonischen Lage.

2. Nach Satz 1.37 trennen sich $\{P^+, Q^+\}$ und $\{X^+, X'^+\}$. Somit sind nach Satz und Definition 1.21 die Orientierung $\mathcal{O}(P^+, Q^+, X^+)$ und die Orientierung $\mathcal{O}(P^+, Q^+, X'^+) = \mathcal{O}(\sigma_{PQ}(P^+), \sigma_{PQ}(Q^+), \sigma_{PQ}(X^+))$ verschieden, so daß σ_{PQ} ungleichsinnig ist. \square

Damit können wir nun den Beweis von Satz 1.25 nachholen: Zwei Punkte P^+, Q^+ erzeugen zwei Segmente, die durch die harmonische Spiegelung bijektiv aufeinander bezogen sind. Da insgesamt unendlich viele Punkte auf der Geraden "sitzen", müssen beide Segmente also unendlich viele enthalten.

Eine der wichtigsten Aussagen über harmonische Lage steckt in folgendem

Satz 1.44 Für Punkte auf einer Geraden sind äquivalent

1. $\{X_1^+, X_2^+\}$ und $\{Y_1^+, Y_2^+\}$ trennen sich nicht;
2. es gibt ein Paar $\{P^+, Q^+\}$, das beide Paare $\{X_1^+, X_2^+\}$ und $\{Y_1^+, Y_2^+\}$ harmonisch trennt.

Sinngemäß gilt dies auch in Geraden- und Ebenenbüscheln.

Beweis: 2. \Rightarrow 1. : Wir können annehmen, daß $P^+Q^+X_1^+Y_1^+$ zyklisch ist. Da sich $\{P^+, Q^+\}$ und $\{X_1^+, X_2^+\}$ sowie $\{P^+, Q^+\}$ und $\{Y_1^+, Y_2^+\}$ trennen, sind dann $P^+X_2^+Y_2^+Q^+X_1^+Y_1^+$ und $P^+Y_2^+X_2^+Q^+X_1^+Y_1^+$ die einzigen wesentlich verschiedenen Möglichkeiten für eine zyklische Anordnung. Die Spiegelung σ_{PQ} erhält als Projektivität zyklische Anordnung. Somit ist auch $P^+Q^+X_2^+Y_2^+$ zyklisch, sodaß die oben erstgenannte Möglichkeit ausscheidet. Also ist $P^+Y_2^+X_2^+Q^+X_1^+Y_1^+$ die einzige mögliche Anordnung. Weglassen von P^+ und Q^+ liefert die Behauptung.

1. \Rightarrow 2. : Wir betrachten die Spiegelungen σ_X an $\{X_1^+, X_2^+\}$ und σ_Y an $\{Y_1^+, Y_2^+\}$ und bilden damit die Projektivität $\varphi := \sigma_Y\sigma_X$. Sie ist gleichsinnig. Wir werden gleich zeigen, daß φ einen Fixpunkt P^+ besitzt. Damit ist dann $\varphi(P^+) = P^+$, d.h. $\sigma_Y\sigma_X(P^+) = P^+$ oder $Q^+ := \sigma_X(P^+) = \sigma_Y(P^+)$. Dies bedeutet aber, daß $\{P^+, Q^+\}$ durch $\{X_1^+, X_2^+\}$ wie durch $\{Y_1^+, Y_2^+\}$ harmonisch getrennt wird, was behauptet war.

Einen Fixpunkt P^+ von φ gewinnen wir über den Fixpunkt-Satz 1.32, indem wir ein Segment S angeben, das von φ in sich abgebildet wird.

Da sich $\{X_1^+, X_2^+\}$ und $\{Y_1^+, Y_2^+\}$ nicht trennen, können wir annehmen, daß $X_1^+, Y_1^+, Y_2^+, X_2^+$ zyklisch ist. Die dadurch gegebene Orientierung nennen wir "positiv" und bilden das Segment $S := \{V^+ \mid \mathcal{O}(X_1^+, V^+, X_2^+) \text{ positiv}\}$. Mit $U_i^+ := \varphi(X_i^+) = \sigma_Y\sigma_X(X_i^+) = \sigma_Y(X_i^+)$ ($i = 1, 2$) wird S unter der gleichsinnigen Projektivität φ abgebildet auf $\varphi(S) = S' := \{V'^+ \mid \mathcal{O}(U_1^+, V'^+, U_2^+) \text{ positiv}\}$. Es ist σ_Y ungleichsinnig, somit liegen die σ_Y -Bilder von $X_1^+, Y_1^+, Y_2^+, X_2^+$ wieder zyklisch, jedoch negativ orientiert, und damit ist dann $Y_1^+, U_1^+, U_2^+, Y_2^+$ wieder zyklisch und positiv orientiert. Damit ist insgesamt $X_1^+, Y_1^+, U_1^+, U_2^+, Y_2^+, X_2^+$ zyklisch und positiv orientiert und damit $\overline{\varphi(S)} = \overline{S'} \subset \overline{S}$, sodaß Satz 1.32 anwendbar ist. \square

Als nächstes betrachten wir, was passiert, wenn wir bei der harmonischen Spiegelung einen Fixpunkt verschieben.

Satz 1.45 Sind für die Punkte einer Geraden g sowohl (X^+, P^+, X'^+, Q^+) als auch $(X^+, P^+, X'_1^+, Q_1^+)$ harmonische Würfe, so stimmen die Orientierungen von (P^+, Q^+, Q_1^+) und (P^+, X'^+, X'_1^+) überein.

Verschiebt man also den einen Fixpunkt Q^+ einer harmonischen Spiegelung σ_{PQ} nach Q_1^+ , so wandern die Bilder X'^+ beliebiger Punkte X^+ im selben Sinne nach X'_1^+ .

Beweis:

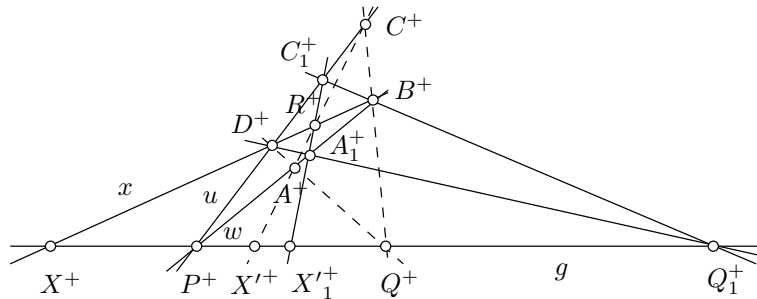


Abbildung 1.19

Wir spiegeln einen Punkt X^+ an zwei Paaren $\{P^+, Q^+\}$ und $\{P^+, Q_1^+\}$. Die Bildpunkte seien entsprechend X'^+ bzw. X'_1^+ . Dazu nutzen wir folgende Konstruktion

(siehe Abbildung 1.19): Auf der Geraden g sind gegeben P^+, Q^+, Q_1^+ und X^+ . Wir wählen eine Gerade x durch X^+ , fixieren darauf Punkte B^+, D^+ und bilden die Geraden $u := P^+ \cap D^+, w := P^+ \cap B^+$. Um X'^+ zu gewinnen, bilde man den Schnittpunkt C^+ von $Q^+ \cap B^+$ mit u und den Schnittpunkt A^+ von $Q^+ \cap D^+$ mit w . Dann ist X'^+ der Schnittpunkt von $A^+ \cap C^+$ mit g . Analog erhält man $X_1'^+$, indem man mit Q_1^+ beginnt und die Zwischenpunkte C_1^+ und A_1^+ konstruiert. Die Dreiecke $A^+Q^+C^+$ und $A_1^+Q_1^+C_1^+$ sind zentriert im Punkt P^+ , also auch liniert und zwar über die Gerade $x = D^+ \cap B^+$. Folglich gehen die beiden Geraden $A^+ \cap C^+$ und $A_1^+ \cap C_1^+$ durch den selben Punkt R^+ von x . Damit haben wir folgende Projektivität:

$$\varphi : g(X^+, P^+, Q^+, Q_1^+) \xrightarrow{B^+} \bar{\wedge} u(D^+, P^+, C^+, C_1^+) \xrightarrow{R^+} \bar{\wedge} g(X^+, P^+, X'^+, X_1'^+).$$

Da (X^+, P^+, X'^+, Q^+) ein harmonischer Wurf ist, sind die Tripel (X^+, P^+, Q^+) und (X^+, P^+, X'^+) gleich orientiert. Folglich ist φ gleichsinnig und daher sind auch (P^+, Q^+, Q_1^+) und $(P^+, X'^+, X_1'^+)$ gleich orientiert. \square

Drei Punkte A^+, B^+, C^+ einer Punktreihe kann man (auf drei verschiedene Weisen) zu einem harmonischen Wurf ergänzen. Dann kann man aus den alten und den neuen Punkten wieder drei auswählen, zu einem harmonischen Wurf ergänzen und so fortfahren. Dies führt zu folgendem Begriff:

Definition 1.46 Die kleinste Menge \mathcal{G} , die drei Punkte A^+, B^+, C^+ einer Punktreihe enthält und mit je drei Punkten auch die damit bildbaren harmonischen Würfe, heißt "harmonisches Gitter" zu diesen Punkten.

Solche Gitter liegen dicht in der Punktreihe:

Satz 1.47 Ist \mathcal{G} ein harmonisches Gitter auf einer Punktreihe g , so enthält jedes Segment von g einen Punkt von \mathcal{G} .

Im Hinblick auf eine Anwendung in Kapitel 3 führen wir den Beweis für Gitter, die nur die folgende schwächere Eigenschaft erfüllen:

Eigenschaft 1.48 Die Menge \mathcal{G} enthalte wenigstens drei Punkte, darunter einen ausgezeichneten Punkt F^+ , und enthalte ferner zu je zwei weiteren Punkten $P^+, Q^+ \in \mathcal{G}$ auch die Punkte X^+, X'^+, X''^+ , für die F^+, X^+, P^+, Q^+ bzw. F^+, P^+, X'^+, Q^+ bzw. F^+, P^+, Q^+, X''^+ harmonische Würfe sind.

Beweis: (von Satz 1.47 unter der schwächeren Voraussetzung von Eigenschaft 1.48.) Wir nehmen an, es gebe ein Segment $S = S_{UV}$ von g , das keinen Gitterpunkt enthält. Dabei sei gleich S als maximal angenommen. Durch geeignete Festlegung der Orientierung ist dann $S = \{X^+ \mid \mathcal{O}(U^+, X^+, V^+) \text{ positiv}\}$.

Fall 1: Es ist $U^+ = F^+$ (analog $V^+ = F^+$): Da \mathcal{G} wenigstens drei Punkte enthält,

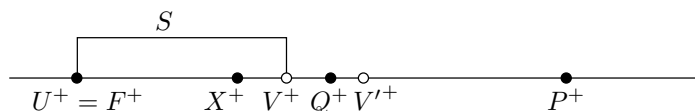


Abbildung 1.20

gibt es einen Punkt $P^+ \in \mathcal{G}, \neq U^+, V^+$, der dann notwendig $\notin S$. Wir spiegeln F^+ an $\{V^+, P^+\}$ zu $V'^+ \notin S$. Dann gibt es im Segment $S_{U^+V'^+}/P^+$ einen Gitterpunkt Q^+ . Spiegeln wir P^+ an $\{F^+, Q^+\}$ zu X^+ , so erhalten wir einen Gitterpunkt. Es

sind nun $P^+F^+V^+V'^+$ und $P^+F^+X^+Q^+$ harmonische Würfe und somit nach Satz 1.45 (beachte $F^+ = U^+$!) die Orientierungen $\mathcal{O}(U^+X^+V^+)$ und $\mathcal{O}(U^+Q^+V'^+)$ gleich. Letztere ist nach Konstruktion positiv, somit liegt dann $X^+ \in S$, was nach Voraussetzung nicht sein kann. Dieser Fall kann also nicht eintreten.

Fall 2: $F^+ \neq U^+, V^+$:

Dann ist $S = S_{U^+V^+} = S_{U^+V^+/F^+}$ und $\mathcal{O}(F^+, U^+, V^+)$ positiv.

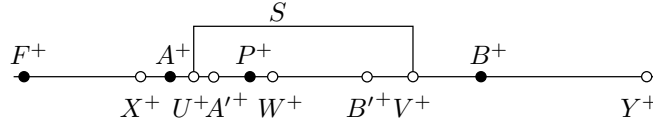


Abbildung 1.21

Wir bestimmen eine Reihe von Punkten:

W^+ durch Spiegeln von F^+ an $\{U^+, V^+\}$,

X^+ durch Spiegeln von W^+ an $\{U^+, F^+\}$,

Y^+ durch Spiegeln von W^+ an $\{V^+, F^+\}$.

Es ist dann $F^+X^+U^+W^+V^+Y^+$ zyklisch und positiv orientiert.

Im Segment $S_{X^+U^+/F^+}$ gibt es einen Gitterpunkt $A^+ \in \mathcal{G}$, im Segment $S_{Y^+U^+/F^+}$ gibt es einen Gitterpunkt $B^+ \in \mathcal{G}$. Bestimme P^+ durch Spiegeln von F^+ an $\{A^+, B^+\}$. Dann ist $P^+ \in \mathcal{G}$. Wir zeigen, daß P^+ sogar in S liegt, was den erwünschten Widerspruch liefert.

Dazu spiegeln wir A^+ an $\{U^+, F^+\}$ zu A'^+ , dito B^+ an $\{V^+, F^+\}$ zu B'^+ . Es sind also $F^+A^+U^+A'^+$ und $F^+A^+P^+B^+$ harmonische Würfe, somit nach Satz 1.45 $A^+A'^+B^+$ und $A^+U^+P^+$ gleichorientiert und zwar beide positiv. Ebenso sind $F^+B^+V^+B'^+$ und $F^+B^+P^+A^+$ harmonische Würfe, somit wieder $B^+B'^+A^+$ und $B^+V^+P^+$ gleichorientiert und zwar beide negativ. Damit ist notwendig $U^+P^+V^+$ positiv orientiert, d.h. $P^+ \in S$. \square

Der Fundamentalsatz

Mit den nun vorhandenen Mitteln, können wir die Projektivitäten (Definition 1.11) zwischen Grundgebilden erster Stufe vollständig charakterisieren.

Fundamentalsatz 1.49 Eine Abbildung zwischen zwei Grundgebilden g, g' erster Stufe ist genau dann eine Projektivität, wenn sie bijektiv ist und harmonische Lage erhält.

Sind (A, B, C) aus g und (A', B', C') aus g' je drei paarweise verschiedene Elemente, so gibt es genau eine Projektivität

$$\pi : g(A, B, C) \bar{\wedge} g'(A', B', C').$$

“Drei Paare bestimmen eine Projektivität”.

Beweis: Auf Grund früherer Sätze wissen wir, daß

- Projektivitäten bijektiv sind (Satz 1.12),
- zu je drei Paaren eine Projektivität existiert (Existenzsatz 1.13),
- Projektivitäten die Trennrelation erhalten (Satz 1.17),
- Projektivitäten harmonische Lage erhalten (Satz 1.42).

Betrachten wir nun eine Abbildung ρ eines Grundgebildes erster Stufe in sich, sagen wir, um konkret zu sein, einer Geraden g . Diese Abbildung sei bijektiv, erhalte harmonische Lage und habe drei Fixpunkte A^+, B^+, C^+ . Dann ist für den harmonischen Wurf A^+, B^+, C^+, D^+ notwendig auch D^+ Fixpunkt und allgemeiner folgt

sofort, daß das ganze harmonische Gitter zu A^+, B^+, C^+ nur aus Fixpunkten von ρ besteht. Wir zeigen, daß dann notwendig ρ die Identität ist.

Annahme: $\rho \neq \text{id}$: Dann existiert ein Punkt X^+ , für den $X'^+ := \rho(X^+) \neq X^+$ und, da das Gitter dicht liegt, gibt es Gitterpunkte G^+, G'^+, G''^+ sodaß die Anordnung $G^+X^+G'^+X'^+G''^+$ zyklisch ist. Damit trennen sich $\{G^+, X^+\}$ und $\{G'^+, G''^+\}$ nicht. Es gibt also ein Paar $\{P^+, Q^+\}$, was beide harmonisch trennt (Satz 1.44). Da ρ harmonische Lage erhält, müssen sich also auch die jeweiligen Bilder harmonisch trennen, d.h. das Bild-Paar $\{P'^+, Q'^+\}$ trennt die Bild-Paare $\{G^+, X'^+\}$ und $\{G'^+, G''^+\}$ harmonisch, was aber nach Satz 1.44 unmöglich ist, da sich ja $\{G^+, X'^+\}$ und $\{G'^+, G''^+\}$ trennen. Somit kann es keine Punkt X^+ mit $\rho(X^+) \neq X^+$ geben, d.h. die Abbildung ρ ist die Identität. Für andere Grundgebilde erster Stufe schließt man natürlich völlig analog.

Damit folgt der noch ausstehende Teil unseres Satzes so: Ist π eine beliebige Bijektion, die harmonische Lage erhält, so können wir auf beliebige Weise drei Paare $(A, \pi(A)), (B, \pi(B)), (C, \pi(C))$ herausgreifen und dazu über den Existenzsatz 1.13 eine diese einander zuordnende Projektivität π' konstruieren. Die Abbildung $\rho := \pi^{-1}\pi'$ ist dann bijektiv, erhält harmonische Lage und hat natürlich A, B, C als Fixelemente, ist somit nach dem eben gezeigten Teil die Identität. Folglich ist $\pi = \pi'$ und damit auch π eine Projektivität, die zudem notwendig mit der zu den drei Paaren konstruierten übereinstimmt, womit der Fundamentalsatz gezeigt ist. \square

Wir haben nun alle wesentlichen Grundlagen und Hilfsmittel aus den Axiomen her bereitgestellt und werden nun in den folgenden Kapiteln damit Geometrie betreiben.

