

2 Projektivitäten auf Grundgebilden erster Stufe

Für dieses und die folgenden Kapitel legen wir eine einmal fest gewählte Ebene zugrunde, in der stillschweigend alle vorkommenden Punkte und Geraden liegen.

Entsprechend benutzen wir hier eine vereinfachte Notation:

Punkte bezeichnen wir einfach mit Großbuchstaben A, B, \dots , Geraden wieder mit kleinen Buchstaben.

Ferner bezeichne $v := AB$ die Verbindungsgerade und $S := ab$ oder gelegentlich auch $S := a \vee b$ den Schnittpunkt.

Projektivitäten auf einer Punktreihe

Der in Kapitel 1 zuletzt bewiesene Fundamentalsatz 1.49 besagt insbesondere, daß eine Projektivität eines Grundgebildes erster Stufe in sich, die mindestens drei Fixelemente besitzt, trivial, d.h. die Identität ist. Also etwa für Punktreihen haben wir

Fakt 2.1 Eine Projektivität einer Punktreihe in sich mit mindestens drei Fixpunkten ist die Identität.

Die Existenz von Projektivitäten mit zwei Fixpunkten ist natürlich über den Fundamentalsatz sofort klar. Etwa die in Satz und Bezeichnung 1.43 erklärte harmonische Spiegelung σ_{PQ} ist eine solche (mit Fixpunkten P, Q).

Eine Projektivität mit genau einem Fixpunkt gewinnt man beispielsweise aus der in Abbildung 2.1 dargestellten Konstruktion:

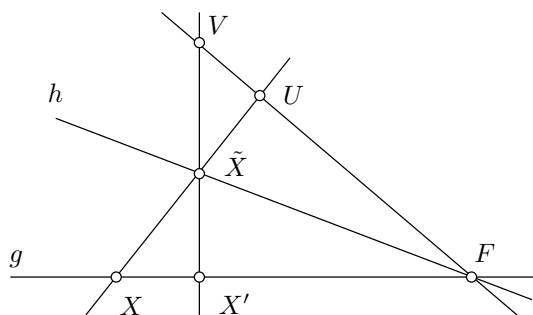


Abbildung 2.1

$$\pi : g(X) \xrightarrow{U} h(\tilde{X}) \xrightarrow{V} g(X').$$

Dabei sind U, V, F kollinear, h geht durch F . Dann gilt

$$\pi(X) = X \Leftrightarrow X = \tilde{X} \Leftrightarrow X = F,$$

d.h. wir haben genau einen Fixpunkt.

Die Existenz von Projektivitäten ohne Fixpunkt werden wir bald sehen.

Bezeichnung 2.2 Eine Projektivität π eines Grundgebildes erster Stufe in sich mit

keinem Fixpunkt heißt “elliptisch”,

genau einem Fixpunkt heißt “parabolisch”,

genau zwei Fixpunkten heißt “hyperbolisch”.

Die harmonische Spiegelung σ_{PQ} hat die Eigenschaft, daß sie, zweimal angewendet, die Identität ergibt. Sie ist damit ein Beispiel für folgende

Definition 2.3 Eine Projektivität η eines Grundgebildes g erster Stufe in sich heißt "Involution", wenn $\eta^2 = \text{id}$, also die Identität ist. Für ein Element A in g ist dann mit $A' := \eta(A)$ auch $A = \eta(A')$. Man nennt dann (A, A') ein "Involutionenpaar".

Die Identität rechnen wir im allgemeinen *nicht* zu den Involutionen. Im Weiteren wählen wir, um konkret zu sein, als Grundgebilde eine Punktreihe. Sämtliche Aussagen gelten aber sinngemäß auch für die anderen Grundgebilde erster Stufe.

Die Involutionen spielen eine zentrale Rolle in der projektiven Geometrie, sie seien daher zunächst untersucht.

Lemma 2.4 Zu je 4 Punkten A, B, C, D auf einer Punktreihe g gibt es genau eine Projektivität η mit

$$\eta : g(A, B, C, D) \bar{\wedge} g(B, A, D, C).$$

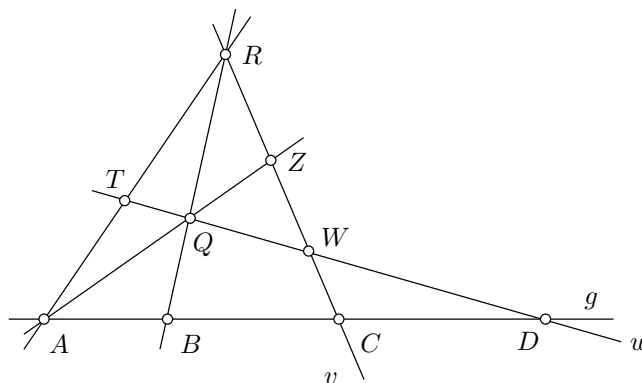


Abbildung 2.2

Beweis: Die aus Abbildung 2.2 ablesbare Kette von Perspektivitäten

$$g(A, B, C, D) \stackrel{Q}{\bar{\wedge}} v(Z, R, C, W) \stackrel{A}{\bar{\wedge}} w(Q, T, D, W) \stackrel{R}{\bar{\wedge}} g(B, A, D, C)$$

zeigt die Existenz, die Eindeutigkeit folgt aus dem Fundamentalsatz.

Die Situation in der Abbildung 2.2 ist dabei allgemein genug, um mit allen möglichen Anordnungen der vier Punkte fertig zu werden. \square

Dieses Lemma liefert uns den zentralen Satz über Involutionen.

Satz 2.5

1. Gibt es zu einer Projektivität $\varphi : g(X) \bar{\wedge} g(X')$ ein Paar (A, A') mit $A \neq A'$, für das $\varphi : g(A, A') \bar{\wedge} g(A', A)$, so ist φ eine Involution.
2. Zu zwei Paaren $(A, A'), (B, B')$ mit $A \neq A', B \neq B'$ gibt es genau eine Projektivität, die beide Paare als Involutionenpaare hat. Sie ist eine Involution.
3. Hat eine Involution η zwei Involutionenpaare (A, A') und (B, B') , die sich nicht trennen, so hat sie zwei Fixpunkte, ist also hyperbolisch und je zwei Involutionenpaare trennen sich nicht. Sie ist die harmonische Spiegelung an den beiden Fixpunkten. Sie ist ungleichsinnig.

Hat eine Involution η zwei Involutionspaare (A, A') und (B, B') , die sich trennen, so hat sie keine Fixpunkte, ist also elliptisch und je zwei Involutionspaare trennen sich. Die Involution ist gleichsinnig.

Parabolische Involutionen, also solche mit genau einem Fixpunkt, gibt es nicht.

Diese Aussagen gelten sinngemäß für die anderen Grundgebilde.

Beweis:

1. Der Punkt X sei verschieden von A und A' , sonst beliebig, ferner sei $X' := \varphi(X)$. Dann gibt es nach Lemma 2.4 eine Projektivität

$$\eta : g(A, A', X, X') \bar{\wedge} g(A', A, X', X).$$

Sie stimmt auf drei Punkten mit φ überein, ist somit φ , sodaß insbesondere $\varphi^2(X) = \varphi(X') = X$. Da X (fast) beliebig war, folgt $\varphi^2 = \text{id}$, d.h. φ ist Involution.

2. Die Existenz folgt aus Lemma 2.4, die Eindeutigkeit aus dem Fundamentalsatz und 1. zeigt, daß es sich um eine Involution handelt.
3. Zu den beiden sich nicht trennenden η -Paaren (A, A') und (B, B') gibt es nach Satz 1.44 ein Paar (P, Q) , das beide harmonisch trennt. Dann stimmen aber η und die harmonische Spiegelung σ_{PQ} auf (mindestens) drei Punkten überein, sind also identisch. Je zwei Involutionspaare werden dann von (P, Q) harmonisch getrennt, trennen sich also gegenseitig nicht.

Hat eine Involution η ($\neq \text{id}$) einen Fixpunkt P , so wähle man ein beliebiges Involutionspaar (X, X') und bestimme Q so, daß sich (P, Q) und (X, X') harmonisch trennen. Dann stimmen η und die harmonische Spiegelung σ_{PQ} auf P, X, X' überein, sodaß also $\eta = \sigma_{PQ}$ sein muß. Involutionen mit genau einem Fixpunkt gibt es also nicht.

Damit folgt die die Aussage über elliptische Involutionen allein aus der Negation der schon behandelten Fälle. \square

Insbesondere ist mit diesem Satz auch die Existenz elliptischer Projektivitäten, speziell elliptischer Involutionen gezeigt.

Ein weiterer wichtiger Satz über Involutionen ist der folgende

Satz 2.6 (Involutionssatz am vollständigen Viereck) *Die drei Paare von Gegenseiten eines vollständigen Vierecks schneiden eine Gerade, die durch keine Ecke des Vierecks geht, in den Punktepaaren einer Involution.*

Beweis: Aus Abbildung 2.3 liest man die folgende Kette von Perspektivitäten ab:

$$g(X, X', Y, Y', Z) \xrightarrow{C} \bar{\wedge} v'(R, D, S, Y', A) \xrightarrow{X} \bar{\wedge} v(C, T, S, Y, B) \xrightarrow{D} \bar{\wedge} g(X', X, Y', Y, Z').$$

Die dargestellte Projektivität besitzt ein involutorisches Paar, ist also selbst eine Involution. \square

Bemerkung 2.7 *Geht die Gerade g durch zwei Nebenecken des Vierecks, so ergibt sich die harmonische Spiegelung.*

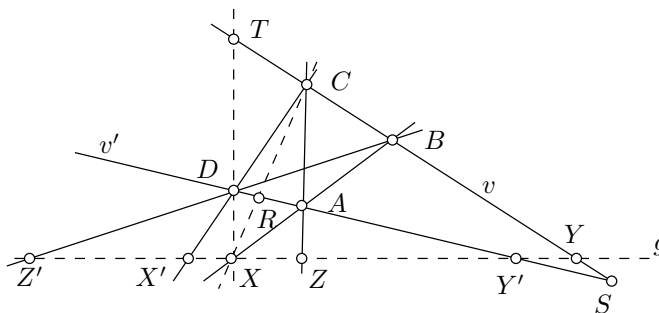


Abbildung 2.3

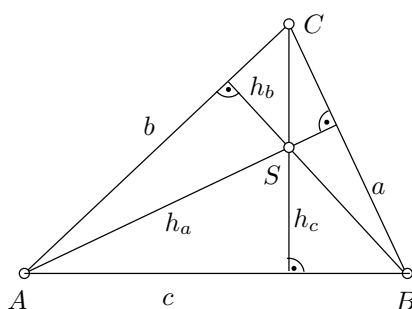


Abbildung 2.4

Dieser Satz zusammen mit dem *Satz über den Höhenschnittpunkt im Dreieck* aus der elementaren Euklidischen Geometrie kann nun zu folgender Betrachtung in der um die Ferngerade zur projektiven Ebene erweiterten Euklidischen Ebene dienen: Wir gehen aus von einem Euklidischen Dreieck ABC mit Seiten a, b, c und Höhen h_a, h_b, h_c , die sich im Punkt S schneiden. (Siehe Abbildung 2.4). Im vollständigen Viereck $ABCS$ sind Paare von Gegenseiten jeweils

$$a = BC \text{ und } h_a = AS$$

und ebenso

$$b \text{ und } h_b, \quad c \text{ und } h_c.$$

Deren Fernpunkte sind also Paare einer Involution ρ auf der Ferngeraden und diese drei Paare gehören zu orthogonalen Richtungen.

Fixiert man nun etwa A, B und a , dann sind gegeben die Geraden a und c , ferner die Höhe h_a und die Richtung von h_c , somit durch deren Fernpunkte also zwei Paare von ρ , wodurch ρ bestimmt ist. Eine in beliebiger Richtung durch A gelegte dritte Seite b erzeugt dann ein weiteres Paar b, h_b zu ρ . Damit ist gezeigt, daß *alle* Paare der Involution ρ auf der Ferngeraden eben zu orthogonalen Richtungen gehören: *Ein sich drehender rechter Winkel schneidet die Ferngerade in den Paaren der "Rechtwinkel" - Involution ρ .*

Dieser Sachverhalt wird später, wenn wir die Euklidische Geometrie aus der projektiven zurückgewinnen wollen, eine wichtige Rolle spielen.

Der Kreuzlinien - und Kreuzpunktsatz

Es sei daran erinnert, daß wir nur Punkte und Geraden einer festgewählten Ebene betrachten.

Wir hatten festgelegt

Fakt 2.8

1. Zwei projektive Punktreihen mit verschiedenen Trägern g, g' sind genau dann perspektiv, wenn die Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte durch einen festen Punkt Z gehen, dem "Zentrum der Perspektivität".
2. Zwei projektive Strahlenbüschel mit verschiedenen Trägern G, G' sind genau dann perspektiv, wenn die Schnittpunkte zugeordneter Geraden auf einer festen Geraden z liegen, der "Achse der Perspektivität".

Für projektive aber nicht perspektive Punktreihen bzw. Büschel bilden also die Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte *kein* Büschel durch einen Punkt bzw. die Schnittpunkte zugeordneter Strahlen *keine* Punktreihe auf einer Geraden. Die hier entstehenden Gebilde werden eine wichtige Rolle bei den weiteren Überlegungen spielen.

Ob eine Projektivität zwischen zwei Punktreihen oder zwei Büscheln mit jeweils verschiedenen Trägern sogar eine Perspektivität ist, kann man an dem Verhalten des beiden Trägern gemeinsamen Elementes ablesen.

Satz 2.9

1. Zwei projektive Punktreihen mit verschiedenen Trägern g, g' sind genau dann perspektiv, wenn der gemeinsame Punkt S von g und g' sich selbst entspricht.
2. Zwei projektive Strahlenbüschel mit verschiedenen Trägern G, G' sind genau dann perspektiv, wenn der gemeinsame Strahl s von G und G' sich selbst entspricht.

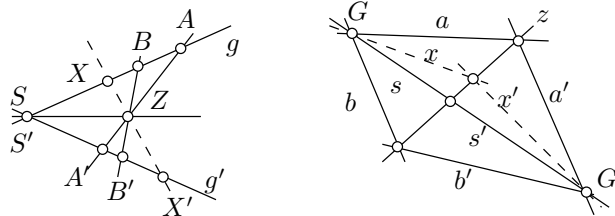


Abbildung 2.5

Beweis: Siehe Abbildung 2.5.

1. *Punktreihen:*

Der Schnittpunkt S entspreche sich selbst: $S = S'$. Wähle auf g zwei beliebige weitere Punkte A, B . Die zugeordneten Punkte auf g' seien A', B' . Die Geraden AA' und BB' schneiden sich in einem Punkt Z . Das Büschel Z definiert eine Perspektivität von g und g' . Diese ordnet zu A, A' , dito B, B' und $S, S' = S$, stimmt also in drei Paaren mit der gegebenen Projektivität überein, somit nach dem Fundamentalsatz überall.

Es liege eine Perspektivität vor: Dann haben wir die in Abbildung 2.5 gezeichnete Situation und der Schnittpunkt muß sich selbst entsprechen.

2. *Büschel:* Der Beweis geht analog. □

Dieser Satz ist ein wichtiges Hilfsmittel für die weiteren Untersuchungen. Zunächst betrachten wir die sog. Kreuzlinien bzw. Kreuzpunkte:

Definition 2.10 (Kreuzlinie, Kreuzpunkt)

1. $g(A, B, C, \dots) \bar{\wedge} g'(A', B', C', \dots)$ seien projektive Punktreihen mit verschiedenen Trägern. Dann heißen die beiden Geraden AB' und $A'B$, ... jeweils ein Paar sich entsprechender Kreuzlinien.
2. $G(a, b, c, \dots) \bar{\wedge} G'(a', b', c', \dots)$ seien projektive Büschel mit verschiedenen Trägern. Dann heißen die beiden Schnittpunkte ab' und $a'b$, ... jeweils ein Paar sich entsprechender Kreuzpunkte.

Damit gilt der wichtige

Satz 2.11 (Kreuzlinien-Kreuzpunktsatz)

1. Die Schnittpunkte sich entsprechender Kreuzlinien zu zwei projektiven Punktreihen liegen auf einer Geraden, der "Perspektivitätsachse" der Projektivität.
2. Die Verbindungsgeraden sich entsprechender Kreuzpunkte zu zwei projektiven Büscheln gehen durch einen Punkt, das "Perspektivitätszentrum" der Projektivität.

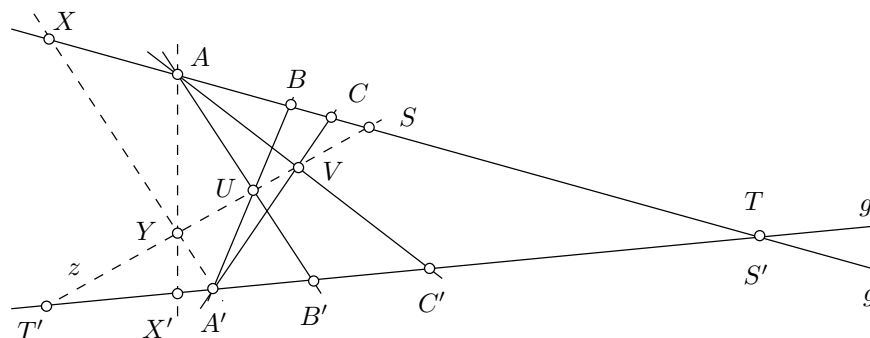


Abbildung 2.6

Beweis:

1. Siehe Abbildung 2.6. Die Punktreihen

$$g(A, B, C, \dots, X, \dots) \bar{\wedge} g'(A', B', C', \dots, X', \dots)$$

seien projektiv. Wähle ein Paar zugeordneter Punkte, etwa A, A' und betrachte den Schein von g aus A' bzw. von g' aus A . Dann sind auch die Büschel

$$A'(A'A, A'B, A'C, \dots) \stackrel{\text{Schnitt}}{\bar{\wedge}} g(A, B, C, \dots) \\ \bar{\wedge} g'(A', B', C', \dots) \stackrel{\text{Schein}}{\bar{\wedge}} A(AA', AB', AC', \dots)$$

projektiv, wobei der gemeinsame Strahl AA' sich selbst entspricht. Somit sind die Büschel nach Satz 2.9 sogar perspektiv und die Schnittpunkte einander zugeordneter Strahlen, also von $A'B$ und AB' , von $A'C$ und AC' , von $A'X$ und AX' etc. liegen auf einer Geraden z , der Perspektivitätsachse. Diese Schnittpunkte U, V, Y sind aber gerade die Schnittpunkte entsprechender von A bzw. A' ausgehender Kreuzlinien. Für diese Kreuzlinien ist also der Satz schon gezeigt. Wir zeigen nun, daß die Gerade z gar nicht von der Auswahl des Paares A, A' abhängt, sondern allein von der Projektivität bestimmt ist, womit

dann der Satz allgemein gilt. Für einen beliebigen Punkt X auf g erhalten wir den zugeordneten Punkt X' auf g' über die folgende Konstruktion (siehe Abbildung 2.6):

$$g(X) \stackrel{A'}{\wedge} z(Y) \stackrel{A}{\wedge} g'(X'),$$

da sich die Kreuzlinien AX' bzw. $A'X$ eben auf z in Y schneiden.

Seien $S := gz$, $T' := g'z$ die Schnittpunkte von z mit g bzw. g' und $T := gg'$. Dann haben wir mit $S' := T$

$$g(S, T) \stackrel{A'}{\wedge} z(S, T') \stackrel{A}{\wedge} g'(S', T').$$

Also sind die Schnittpunkte von z mit g bzw. g' gerade das Urbild S bzw. das Bild T' des Schnittpunktes $T := gg'$ unter der gegebenen Projektivität und damit unabhängig von der Wahl des Punktes A .

Die noch offenen Sonderfälle seien dem Leser überlassen.

2. Dieser Teil geht analog. □

Die eben ausgeführte Konstruktion läßt sich auch deuten als die "Drei-Paare-Konstruktion" für den Existenzsatz 1.13, wobei die speziellen Zentren $Z := A'$, $Z' := A$ gewählt sind.

Eine schöne Anwendung des Kreuzlinien - bzw. Kreuzpunktsatzes ist der

Satz 2.12 (Satz von Pappos - Pascal) (PAPPUS 4.Jahrhundert n.C., PASCAL 1623 - 1662)

1. Liegen beim Durchlaufen eines einfachen Sechsecks die Ecken abwechselnd auf zwei festen Geraden, so liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten auch in einer Geraden.
2. Gehen beim Durchlaufen eines einfachen Sechsecks die Seiten abwechselnd durch zwei feste Punkte, so gehen die Verbindungen von Gegenecken auch durch einen Punkt.

In der Abbildung 2.7 ist diese Situation skizziert.

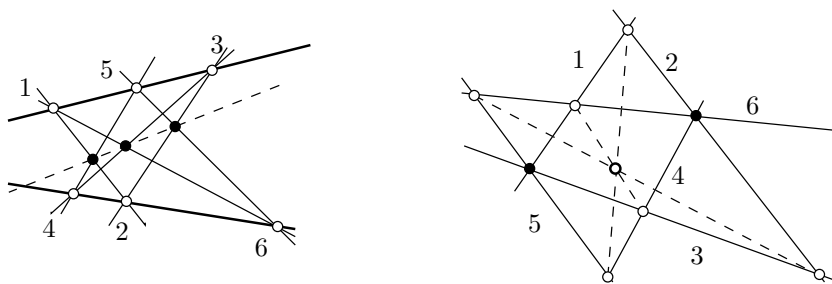


Abbildung 2.7

Beweis: Wir beweisen nur den ersten Teil, der andere geht analog über Dualisieren. Zur Bezeichnung siehe Abbildung 2.7. Gegenseiten des einfachen Sechsecks mit den Ecken 1,2,3,4,5,6 sind

$$\begin{array}{lll} a := 12 & \text{und} & a' := 45, \\ b := 23 & \text{und} & b' := 56, \\ c := 34 & \text{und} & c' := 61. \end{array}$$

Nun betrachte die Projektivität

$$g(1, 3, 5, \dots) \bar{\wedge} g'(4, 6, 2, \dots).$$

In ihr sind (a, a') , (b, b') , (c, c') Paare sich entsprechender Kreuzlinien, deren Schnittpunkte also nach dem vorigen Satz auf einer Geraden liegen. \square

Es sei vermerkt, daß der Satz 2.12 in einem gewissen Sinne äquivalent zum Fundamentalsatz ist. Die Details findet man etwa in dem Buch von ROBINSON.

Punktreihen und Büschel zweiter Ordnung

Im vorigen Abschnitt hatten wir festgestellt, daß

- zwei projektive Punktreihen (mit verschiedenen Trägern) genau dann perspektiv sind, wenn der gemeinsame Punkt sich selbst entspricht, und daß genau dann die Verbindungsgeraden sich entsprechender Punkte durch einen festen Punkt gehen, d.h. ein Strahlenbüschel bilden.
- zwei projektive Büschel (mit verschiedenen Trägern) genau dann perspektiv sind, wenn der gemeinsame Strahl sich selbst entspricht, und daß genau dann die Schnittpunkte sich entsprechender Strahlen auf einer festen Geraden liegen, d.h. eine Punktreihe bilden.

Es stellt sich die Frage, welche Gebilde aus den Verbindungsgeraden resp. Schnittpunkten sich entsprechender Elemente entstehen, wenn wir projektive aber *nicht* perspektive Punktreihen bzw. Büschel betrachten. Führen wir dazu zunächst eine Bezeichnung ein:

Definition 2.13 (Punktreihen, Büschel zweiter Ordnung)

1. Die Schnittpunkte entsprechender Strahlen zweier projektiver, aber nicht perspektiver, Büschel mit verschiedenen Trägern bilden eine "Punktreihe zweiter Ordnung".
Der bisherige Begriff der Punktreihe wird zur "Punktreihe erster Ordnung".
2. Die Verbindungsgeraden entsprechender Punkte zweier projektiver, aber nicht perspektiver Punktreihen (erster Ordnung) mit verschiedenen Trägern bilden ein "Strahlenbüschel zweiter Ordnung".
Der bisherige Begriff des Büschels wird zum "Büschel erster Ordnung".

Bemerkung 2.14 Die entsprechenden räumlichen Begriffe im zentrischen Bündel sind "Ebenenbüschel zweiter Ordnung" bzw. "Kegel zweiter Ordnung".

Die Bezeichnung "von zweiter Ordnung" erklärt sich aus folgendem Sachverhalt:

Satz und Definition 2.15 (Tangente, Berührungspunkt)

1. Eine Punktreihe zweiter Ordnung hat mit jeder Geraden höchstens zwei Punkte gemeinsam. Geraden, die mit ihr genau einen Punkt gemeinsam haben, heißen "Tangenten".
2. Ein Büschel zweiter Ordnung hat mit jedem Punkt höchstens zwei Geraden gemeinsam. Punkte, die mit ihm genau eine Gerade gemeinsam haben, heißen "Berührungspunkte".

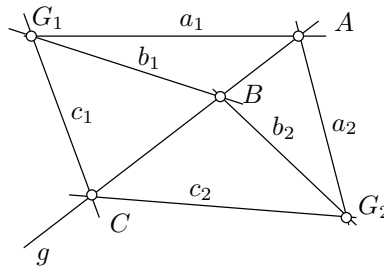


Abbildung 2.8

Beweis: Wir beweisen wieder nur den Teil 1. Siehe auch Abbildung 2.8. Die Punktreihe \mathcal{Q} zweiter Ordnung sei durch eine Projektivität

$$\varphi : G_1(a_1, b_1, c_1, \dots) \bar{\wedge} G_2(a_2, b_2, c_2, \dots)$$

erzeugt. Angenommen, eine Gerade g ginge nicht durch G_1 oder G_2 und träfe \mathcal{Q} in drei Punkten A, B, C . Dies wären dann Schnittpunkte sich unter φ entsprechender Strahlen der beiden Büschel, sodaß φ damit die Perspektivität über die Gerade g sein müßte, was aber ja ausgeschlossen war.

Die Diskussion des Falls, daß g durch G_1 oder G_2 geht, sei als Übung gestellt. \square

Punktreihen und Büschel zweiter Ordnung gehen durch Dualisieren in der Ebene auseinander hervor, weshalb wir uns im weiteren auf die Betrachtung von Punktreihen beschränken.

Zunächst eine Existenzaussage:

Satz 2.16 Zu fünf Punkten G_1, G_2, A, B, C , von denen nicht drei kollinear sind, gibt es eine Punktreihe \mathcal{Q} zweiter Ordnung, die sie enthält.

Wir werden später sehen, daß \mathcal{Q} sogar eindeutig bestimmt ist.

Beweis: Wir wählen zwei der Punkte, etwa G_1 und G_2 als Büschelzentren und bilden darin die Geraden

$$a_i := G_i A, \quad b_i := G_i B, \quad c_i := G_i C, \quad (i = 1, 2).$$

Dann ist durch

$$\varphi : G_1(a_1, b_1, c_1) \bar{\wedge} G_2(a_2, b_2, c_2)$$

eine Projektivität zwischen den Büscheln bestimmt, für die nach Konstruktion A, B, C Schnittpunkte sich entsprechender Geraden sind. Da nicht drei der Punkte kollinear sind, ist φ nicht perspektiv. Damit ist insbesondere für die Verbindungsgerade $t := G_1 G_2$ dann $\varphi(t) \neq t \neq \varphi^{-1}(t)$. Folglich ist G_2 der (eindeutig bestimmte) Schnittpunkt von t und $\varphi(t)$, sowie G_1 der (eindeutig bestimmte) Schnittpunkt von $\varphi^{-1}(t)$ und t . Die Projektivität φ erzeugt also eine Punktreihe \mathcal{Q} zweiter Ordnung, der alle fünf vorgegebenen Punkte angehören. \square

Der eben notierte Beweis läßt sich leicht zu einem Konstruktionsverfahren zur Gewinnung weiterer Punkte von \mathcal{Q} ausbauen. (Siehe Abbildung 2.9.) Mit den eben eingeführten Geraden a_i, b_i, c_i ($i = 1, 2$) bilde zunächst den Schnittpunkt S von b_1 und c_2 . Ferner bilde die Geraden $s_1 := CA$ und $s_2 := BA$. Da keine Perspektivität

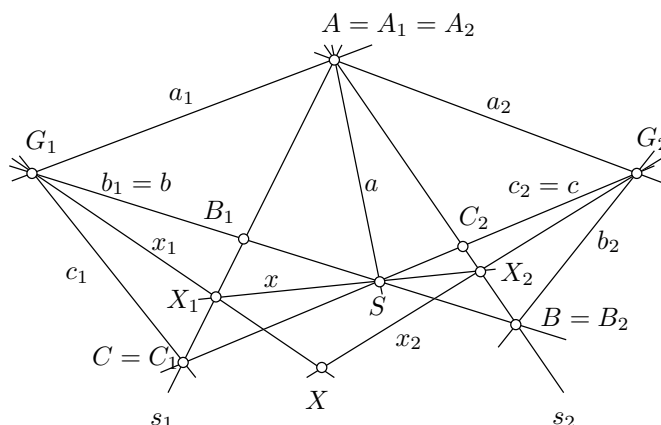


Abbildung 2.9

vorliegt, sind s_1 und s_2 verschieden und beide nicht inzident mit S . Dann wird die konstruierte Projektivität φ über die folgende Schnitt/Schein-Kette realisiert:

$$G_1(a_1, b_1, c_1, x_1) \overset{\text{Schnitt}}{\bar{\wedge}}_{s_1} (A_1, B_1, C_1, X_1) \overset{S}{\bar{\wedge}} (A_2, B_2, C_2, X_2) \overset{\text{Schein}}{\bar{\wedge}}_{s_2} G_2(a_2, b_2, c_2, x_2).$$

Für $x_1 \in G_1$ erhalten wir also das zugehörige $x_2 \in G_2$ so: Schneide x_1 mit s_1 . Dies ergibt X_1 . Perspektive über S liefert X_2 auf s_2 , daraus die Verbindung mit G_2 die gesuchte Gerade x_2 . Der Schnittpunkt $X := x_1x_2$ ist dann in \mathcal{Q} .

Bemerkung 2.17 Wählt man die Punkte C, G_1, A, G_2, B auf einem Kreis als benachbarte Ecken eines regelmäßigen Sechsecks, so wird S der Kreismittelpunkt und über den Peripheriewinkelsatz folgt einfach, daß dann der Punkt X diesen Kreis durchläuft.

Damit haben wir insbesondere

Satz 2.18 Der Euklidische Kreis ist eine Punktreihe zweiter Ordnung im Sinne der oben gegebenen Definition.

Es wird sich später ergeben, daß Euklidisch betrachtet genau alle Kegelschnitte, also Ellipse (speziell Kreis), Parabel, Hyperbel die Punktfolgen zweiter Ordnung sind.

Das Konstruktionsverfahren zu Satz 2.16 läßt sich natürlich genauso gut verwenden, wenn eine nicht perspektive Projektivität $\varphi : G_1 \bar{\wedge} G_2$ durch drei Paare sich entsprechender Geraden $(a_1, a_2), (b_1, b_2), (c_1, c_2)$ gegeben ist.

Betrachten wir zu einer so konstruierten Punktreihe \mathcal{Q} mit vier weiteren Punkten A, B, C, X das einfache Sechseck G_1XG_2CAB . (Siehe Abbildung 2.9). In ihm liegen sich gegenüber die Seiten

$$\begin{array}{lll} G_1X & \text{und} & CA & \text{mit Schnittpunkt} & X_1 \\ XG_2 & \text{und} & AB & \text{mit Schnittpunkt} & X_2 \\ G_2C & \text{und} & BG_1 & \text{mit Schnittpunkt} & S \end{array}$$

und diese Schnittpunkte sind, so hatten wir oben abgeleitet, kollinear. Da von den Punkten A, B, C, X lediglich verlangt war, daß sie zu unserer Punktreihe \mathcal{Q} gehören, haben wir

Lemma 2.19 Sind A, B, C, X vier Punkte der durch die projektiven Büschel G_1, G_2 erzeugten Punktreihe \mathcal{Q} zweiter Ordnung, so liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten des einfachen Sechsecks G_1XG_2CAB auf einer Geraden.

Bisher haben die Punkte G_1 und G_2 als Büschelzentren eine Sonderrolle, von der wir uns zunächst befreien wollen.

Dafür kehren wir zunächst die Aussage von Lemma 2.19 um.

Lemma 2.20 Liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten eines einfachen Sechsecks $P_1P_2P_3P_4P_5P_6$ auf einer Geraden, so gibt es eine Projektivität π zwischen den Büscheln in P_1 und P_3 , für die P_2, P_4, P_5, P_6 Schnittpunkte sich unter π entsprechender Geraden sind. Dies Projektivität π ist genau dann nicht perspektiv, wenn keine drei der Punkte P_1, \dots, P_6 kollinear sind.

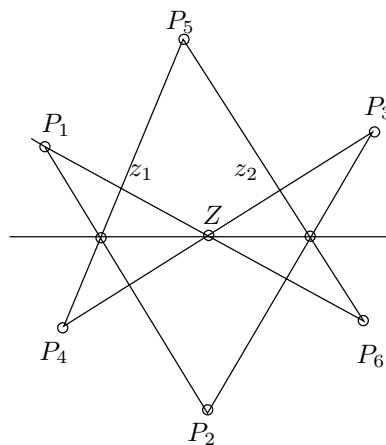


Abbildung 2.10

Beweis: Siehe Abbildung 2.10. Es bezeichne Z den Schnittpunkt der Verbindungsgeraden P_1P_6 und P_3P_4 , ferner sei $z_1 := P_4P_5$ und $z_2 := P_5P_6$. Wie oben liefert die Kette

$$\pi : P_1 \begin{matrix} \text{Schnitt} \\ \wedge \\ \bar{\wedge} \end{matrix} z_1 \begin{matrix} Z \\ \wedge \\ \bar{\wedge} \end{matrix} z_2 \begin{matrix} \text{Schein} \\ \wedge \\ \bar{\wedge} \end{matrix} P_3$$

eine Projektivität, für die P_2, P_4, P_5, P_6 Schnittpunkte sich entsprechender Strahlen sind.

Die Aussage über den Perspektivitätsfall erhält man wie bei Satz 2.16. □

Sei nun eine Punktreihe \mathcal{Q} zweiter Ordnung durch zwei projektive Büschel $\varphi : G_1 \wedge G_2$ gegeben. Es sind dann G_1 und G_2 Punkte von \mathcal{Q} . Wir fixieren drei weitere Punkte X, B, C von \mathcal{Q} . Für einen sechsten Punkt A von \mathcal{Q} gilt dann nach Lemma 2.19:

Die Schnittpunkte der Gegenseiten des einfachen Sechsecks G_1XG_2CAB sind kollinear.

Da bei zyklischer Vertauschung der Ecken das einfache Sechseck in sich selbst übergeht, haben wir damit auch

Die Schnittpunkte der Gegenseiten des einfachen Sechsecks $CABG_1XG_2$ sind kollinear.

Also gibt es nach Lemma 2.20 eine (hier nicht perspektive) Projektivität π zwischen den Büscheln C und B , für die G_1, X, G_2 und A Schnittpunkte sich entsprechender Strahlen sind. π ist nach dem Fundamentalsatz durch die Zentren C und B und

die Schnittpunkte G_1, X, G_2 von drei Paaren sich entsprechender Geraden schon bestimmt, folglich unabhängig von dem Punkt A . Andreseits liegt natürlich A auch auf der von π erzeugten Punktreihe \mathcal{P} . Also haben wir:

Jeder Punkt A von \mathcal{Q} liegt auch auf \mathcal{P} und, da die dazu symmetrische Aussage ebenfalls gilt, folgt $\mathcal{Q} = \mathcal{P}$.

Dies bedeutet

Satz und Definition 2.21 *Es seien U, V zwei Punkte einer Punktreihe \mathcal{Q} zweiter Ordnung.*

1. *Zu U und V gibt es eine Projektivität $\pi : U(x) \bar{\wedge} V(x')$ zwischen Strahlenbüscheln, sodaß die Schnittpunkte sich entsprechender Strahlen genau \mathcal{Q} ergeben.*
2. *In U und V existiert je genau eine Tangente an \mathcal{Q} . Sie ist Urbild bzw. Bild der Verbindungsgeraden UV unter π .*

Man sagt für diesen Sachverhalt kurz: "Die Scheine einer Punktreihe zweiter Ordnung aus je zwei ihrer Punkte sind projektiv."

Beweis: Die Aussage 1. haben wir eben gezeigt, 2. ist bei Satz 2.16 mitbewiesen. \square

Die "Scheinbildung" sei noch etwas erläutert.

Es sei \mathcal{Q} eine Punktreihe zweiter Ordnung, darauf U ein Punkt. Durch Schein bilden wir die Punktreihe \mathcal{Q} auf das Büschel in U ab, wobei jedem Punkt P auf \mathcal{Q} , der $\neq U$ ist, die Verbindungsgerade $p := PU$ entspricht und dem Punkt U selbst die Tangente u an \mathcal{Q} in U . Der obige Satz besagt, daß "Schein" eine Bijektion ist, und wir werden sehen, daß er wiederum ein projektiver Begriff ist. Siehe Abbildung 2.11.

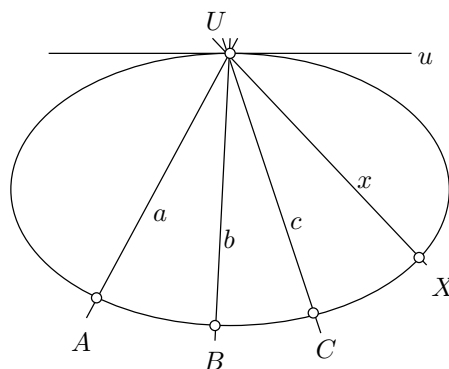


Abbildung 2.11

Die bisherigen Überlegungen können wir zusammenfassen

- Satz 2.22**
1. *Fünf Punkte in allgemeiner Lage bestimmen genau eine Punktreihe zweiter Ordnung, der sie angehören. Sie hat in jedem Punkt genau eine Tangente. Die Scheine der Punktreihe aus je zwei ihrer Punkte sind projektiv, wobei die Tangente in diesen Punkten jeweils deren Verbindungsgeraden - als Strahl durch den anderen Punkt - entspricht. Die Punktreihe besteht genau aus den Schnittpunkten zugeordneter Strahlen.*
 2. *Fünf Geraden in allgemeiner Lage bestimmen genau ein Büschel zweiter Ordnung, dem sie angehören. Jede seiner Geraden hat genau einen Berührungspunkt. Die Schnitte des Büschels mit je zwei seiner Geraden sind projektiv, wobei die Berührungspunkte dieser Geraden wechselweise deren Schnittpunkt entsprechen. Das Büschel besteht genau aus den Verbindungsgeraden zugeordneter Punkte.*

Da nun auch in Lemma 2.19 die Sonderrolle der Punkte G_1, G_2 entfallen ist, können wir dieses Lemma bzw. die dazu duale Aussage allgemeiner formulieren als

Satz 2.23 (Satz von Pascal) (B.PASCAL 1623-1662, Satz von 1639) *Liegen die Ecken eines einfachen Sechsecks auf einer Punktreihe zweiter Ordnung, so liegen die Schnittpunkte seiner Gegenseiten auf einer Geraden.*

Satz 2.24 (Satz von Brianchon) (C.J.BRIANCHON 1785- 1864, Satz von 1810) *Liegen die Seiten eines einfachen Sechsecks in einem Büschel zweiter Ordnung, so gehen die Verbindungsgeraden seiner Gegenecken durch einen Punkt.*

B.PASCAL hatte noch nicht den allgemeinen Begriff der Punktreihe zweiter Ordnung. Er hat (mit 16 Jahren) seinen Satz Euklidisch für die Kegelschnitte gezeigt. Die folgende Abbildung 2.12 ist ein Beispiel für den Satz 2.23 zu dem Sechseck $ABC'A'B'C'$ mit Paaren von Gegenseiten: AB und $A'B'$, BC und $B'C'$, CA' und $C'A$.

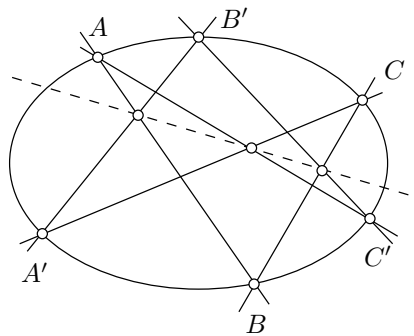


Abbildung 2.12

Wenn wir vorausnehmen, daß die Tangenten an eine Kurve zweiter Ordnung ein Büschel zweiter Ordnung bilden, können wir auch leicht Beispiele für den Satz 2.24 zeichnen, etwa in Abbildung 2.13 zum Sechseck $abca'b'c'$.

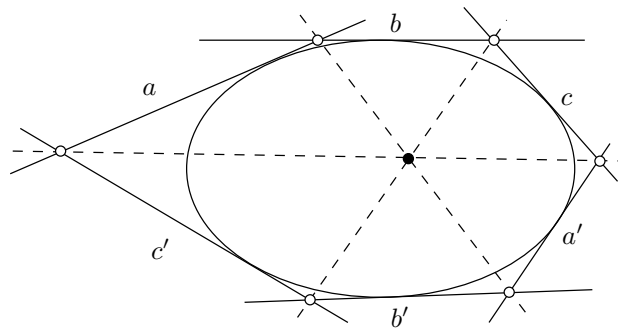


Abbildung 2.13

Der Satz 2.23 ist ja eigentlich das Lemma 2.19, was unmittelbar aus der Standard-Konstruktion für Projektivitäten zwischen Büscheln folgt, betrachtet unter dem Aspekt von Satz und Definition 2.21, wonach es für die Konstruktion der Punktreihe keine ausgezeichneten Punkte gibt. Bei der Standard-Konstruktion für Projektivitäten zwischen Büscheln kommt es aber nur auf die richtige Zuordnung von drei

Paaren von Strahlen an, und darunter dürfen auch solche sein, die Tangenten an die fertige Punktreihe sind.

Dies bedeutet, daß der Satz 2.23 richtig bleibt, wenn man ein Paar benachbarter Sechseck-Ecken zusammen fallen läßt und dann etwa unter der Seite AB für $B = A$ die Tangente in A versteht. (Siehe Abbildung 2.14.)

Man bekommt dann etwa für die Tangente in A folgende

Tangentenkonstruktion 2.25 *Bilde die PASCAL-Figur für $A = B$. Hier legen die Schnittpunkte von BC und $B'C'$ sowie von CA' und $C'A$ die PASCAL-Gerade fest, sodaß die Tangente AB durch den Schnittpunkt der PASCAL-Geraden mit $A'B'$ geht.*

Analoges gilt natürlich für den Satz 2.24.

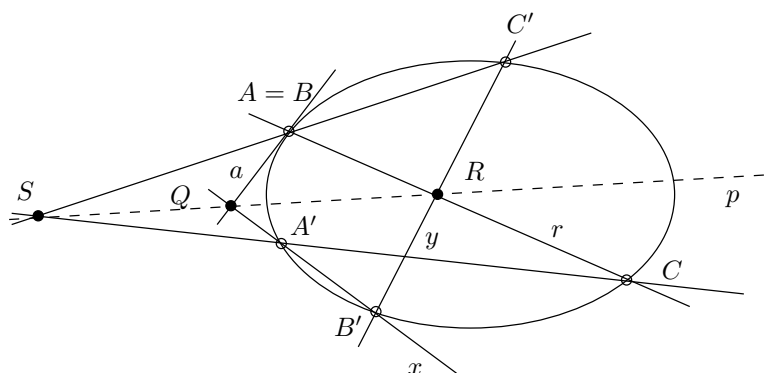


Abbildung 2.14

Dies gilt noch allgemeiner.

Satz 2.26 *Die Aussage des PASCAL-Satzes bleibt richtig, wenn man bis zu dreimal Paare benachbarter Ecken zusammenfallen läßt und als Verbindungsgeraden die Tangente nimmt.*

Analoges gilt für den Satz von BRIANCHON.

Beweis: Siehe Abbildung 2.14. Für das Sechseck $ABCA'B'C'$ mit $A = B$ und die Tangente a bei A ist die Aussage bewiesen, d.h. die Schnittpunkte Q von a und der Geraden $A'B'$, ferner R von $r := BC$ und $B'C'$, sowie S von CA' und $C'A$ liegen auf einer Geraden p . Denken wir uns nun alle Punkte außer B' fixiert, so liegen auch S und die Geraden a, r fest und wir haben eine Projektivität zwischen den Büscheln in A' und C' :

$$\pi : A'(x) \bar{\wedge} a(Q) \stackrel{S}{\bar{\wedge}} r(R) \bar{\wedge} C'(y),$$

wobei sich die zugeordneten Strahlen x, y im Punkt B' der Punktreihe Q schneiden und dabei nach Konstruktion die Punkte S, Q, R stets kollinear sind. Dies bleibt dann auch richtig, wenn x oder y Tangenten (in A' oder C') sind, d.h. wenn $B' = A'$ oder $B' = C'$.

Mit analogen Schlüssen folgt auch der Fall mit drei Tangenten. \square

Die Kurve zweiter Ordnung

Bisher stehen Punktreihe und Büschel zweiter Ordnung als duale Gebilde nebeneinander. Tatsächlich sind sie aber eng verbunden über

Satz und Definition 2.27 1. Die Tangenten einer Punktreihe zweiter Ordnung bilden ein Strahlenbüschel zweiter Ordnung.

2. Die Berührungspunkte eines Strahlenbüschels zweiter Ordnung bilden eine Punktreihe zweiter Ordnung.

Dabei bilden die Berührungspunkte des nach 1. zu einer Punktreihe gehörenden Tangentenbüschels genau die ursprüngliche Punktreihe, ebenso die Tangenten an die nach 2. zu einem Büschel gehörende Berührungspunkte genau das ursprüngliche Büschel. Ein so zusammengehöriges Paar von Punktreihe und Büschel heißt "Kurve zweiter Ordnung."

Zum Beweis haben wir noch etwas Vorarbeit zu leisten.

Zunächst lassen wir entsprechend Satz 2.26 in der PASCAL- bzw. BRIANCHON-Figur zweimal 2 benachbarte Ecken (Seiten) zusammenfallen, wobei dann deren Verbindungsgeraden (Schnittpunkte) durch die Tangenten (Berührungspunkte) zu ersetzen sind. Dies liefert etwa den

Satz 2.28 1. Zu jedem einfachen Viereck, dessen Ecken einer Punktreihe zweiter Ordnung angehören, schneiden sich deren Tangenten in Gegenecken auf der Geraden durch die beiden Schnittpunkte der beiden Paare von Gegenseiten.

2. Zu jedem einfachen Vierseit, dessen Seiten einem Büschel zweiter Ordnung angehören, geht die Verbindung der Berührungspunkte von Gegenseiten durch den Schnittpunkt der beiden Verbindungsgeraden der beiden Paare von Gegenecken.

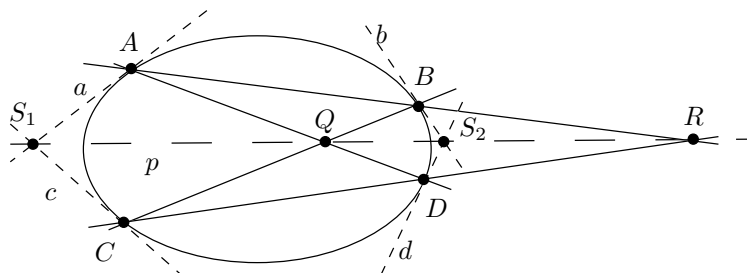


Abbildung 2.15

Beweis: Siehe Abbildung 2.15.

1. Betrachte das Sechseck $AABCCD$. Paare von Gegenseiten sind

$$\begin{array}{lll} AA = a & \text{und} & CC = c \quad \text{mit Schnittpunkt } S_1, \\ AB & \text{und} & CD \quad \text{mit Schnittpunkt } R, \\ BC & \text{und} & AD \quad \text{mit Schnittpunkt } Q. \end{array}$$

Nach dem Satz 2.26 liegen diese Schnittpunkte auf der PASCAL-Geraden p . In dem einfachen Viereck $ABCD$ sind A und C Gegenecken, dito AB und CD sowie BC und AD Paare von Gegenseiten. Damit ist gezeigt, daß der Tangentenschnittpunkt S_1 auf $p = QR$ liegt. Liest man das Viereck $ABCD$ als Sechseck $ABBCDD$, so folgt die analoge Aussage für den anderen Tangentenschnittpunkt S_2 .

2. Der Beweis ist analog zu führen. Wie hat man Abbildung 2.15 zu ergänzen? \square

Ein einfaches Viereck oder Vierseit enthält noch die Angabe, in welcher Reihenfolge die Ecken bzw. Kanten zu durchlaufen sind. Dies entfällt bei der vollständigen Figur.

- Satz 2.29**
1. Das Nebendreieck eines vollständigen Vierecks, dessen vier Ecken einer Punktreihe zweiter Ordnung angehören, fällt zusammen mit dem Nebendreieck des vollständigen Vierseits aus den Tangenten in jenen Ecken.
 2. Das Nebendreieck eines vollständigen Vierseits, dessen vier Seiten einem Büschel zweiter Ordnung angehören, fällt zusammen mit dem Nebendreieck des vollständigen Vierecks aus den Berührungspunkten jener Seiten.

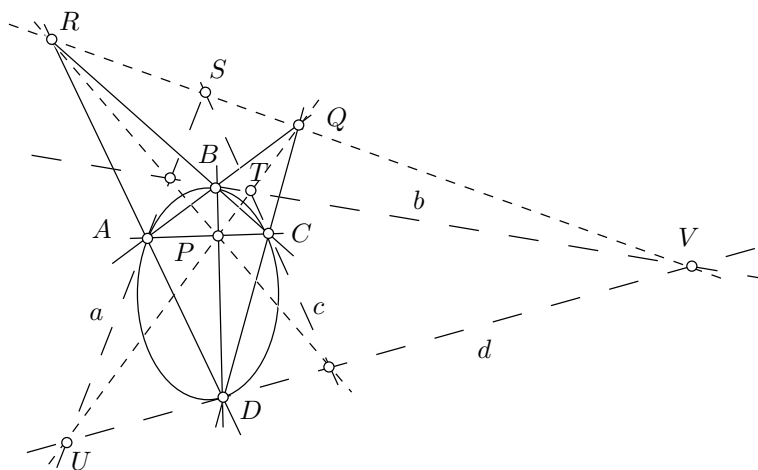


Abbildung 2.16

Beweis: (Siehe Abbildung 2.16.) Ein vollständiges Viereck (Vierseit) enthält genau drei einfache Vierecke (Vierseite), für die wir jeweils den Satz 2.28 anwenden können. Die dort nachgewiesenen speziellen Geraden bzw. Punkte bilden genau das Nebendreieck bzw. Nebendreieck. \square

Damit können wir nun den Satz und Definition 2.27 beweisen. (Siehe Abbildung 2.16.) Wir halten drei Ecken A, B, C mit Tangenten a, b, c des vollständigen Vierecks auf unserer Punktreihe fest und lassen den vierten Punkt D die Punktreihe zweiter Ordnung durchlaufen. Die mitbewegte Tangente d schneidet die festen Tangenten a, b in den laufenden Punkten U, V . Wir zeigen nun: Die Zuordnung $a(U) \leftrightarrow b(V)$ ist projektiv. Sei dazu $S := ac$, $T := bc$ und $Q := SV \cap TU$. Nach Satz 2.29 (es genügt schon Satz 2.28) liegt Q auf der festen Geraden AB . Somit haben wir über die festen Punkte S, T und die feste Gerade AB die in Abbildung 2.17 skizzierte Zuordnung:

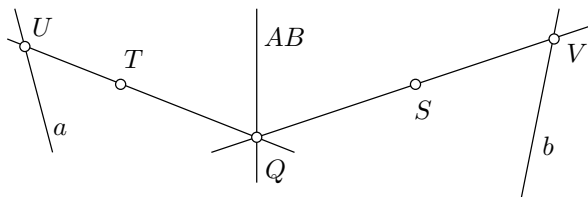


Abbildung 2.17

Damit ist $a(U) \bar{\wedge} b(V)$ als Projektivität nachgewiesen und unsere Tangente d verbindet also zugeordnete Punkte zweier projektiver Punktreihen, d.h. durchläuft ein Strahlenbüschel 2-ter Ordnung.

Der Beweis der dualen Aussage von Satz und Definition 2.27 geht analog. \square

Unser Beweis hat aber noch mehr erbracht. Nach Satz 2.29 liegen in Abbildung 2.16 die Punkte D, C, Q auf einer Geraden, d.h. die Punktreihe $AB(Q)$ und das Büschel $C(CD)$ sind als Schnitt/Schein projektiv. Da wir eben (siehe Abbildung 2.17) die Projektivität $AB(Q) \bar{\wedge} a(U)$ nachgewiesen haben, sind also auch $a(U) \bar{\wedge} C(CD)$ projektiv, d.h. wir haben

- Satz 2.30**
1. Sei C ein fester Punkt, a eine feste Tangente einer Punktreihe zweiter Ordnung, die von einem Punkt D mit Tangente d durchlaufen wird. Dann ist die Zuordnung $C(CD) \bar{\wedge} a(da)$ projektiv.
 2. Sei c ein fester Strahl, A ein fester Berührungspunkt eines Büschels zweiter Ordnung, das von einer Geraden d mit Berührungspunkt D durchlaufen wird. Dann ist die Zuordnung $c(cd) \bar{\wedge} A(DA)$ projektiv.

Siehe auch Abbildung 2.18.

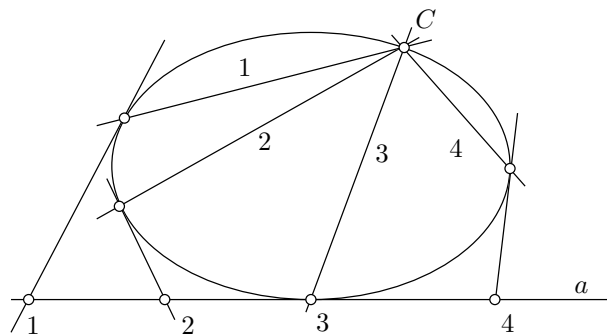


Abbildung 2.18

Projektivitäten auf Kurven zweiter Ordnung

Bei dem zuletzt gezeigten Satz 2.30.1 ist natürlich der Strahl CD alleine durch den Kurvenpunkt D bestimmt und die Zuordnung

$$Q \ni D \mapsto \text{Schnittpunkt von Tangente } d \text{ mit } a$$

sieht "irgendwie projektiv" aus. Dies macht zwar wörtlich genommen noch keinen Sinn, es lassen sich aber die in Kapitel 1 eingeführten Grundbegriffe so auf Kurven zweiter Ordnung übertragen, daß wir diese im wesentlichen gleichberechtigt neben Punktreihe und Büschel (erster Ordnung) stellen können.

Grundlage für alle diese Überlegungen ist Satz und Definition 2.21, der besagt, daß durch Schnitt/Schein zwischen einer Kurve zweiter Ordnung als Punktreihe und dem Büschel in einem Kurvenpunkt eine Bijektion hergestellt wird, und zudem die Scheine zu zwei Kurvenpunkten jeweils projektiv sind.

Dies erlaubt es, Begriffe wie *sich trennen*, *harmonische Lage*, *etc.* von Büscheln in einem Kurvenpunkt auf die Punktreihe zu übertragen. Sinngemäß geht dies natürlich auch alles für die Tangentenbüschel, ohne daß wir dies detailliert betrachten wollen.

Lemma 2.31 *Es sei \mathcal{Q} eine Kurve 2-ter Ordnung, P, P' seien zwei Punkte von \mathcal{Q} . Zu Punkten A, B, C, D, \dots auf \mathcal{Q} seien a, b, c, d, \dots bzw. a', b', c', d', \dots die durch Schein aus P bzw. P' daraus gebildeten Geraden. Dann gelten*

1. $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$ trennen sich genau dann, wenn sich $\{a', b'\}$ und $\{c', d'\}$ trennen.
2. $\{a, b\}$ und $\{c, d\}$ trennen sich genau dann harmonisch, wenn sich $\{a', b'\}$ und $\{c', d'\}$ harmonisch trennen.

(Siehe Abbildung 2.19.)

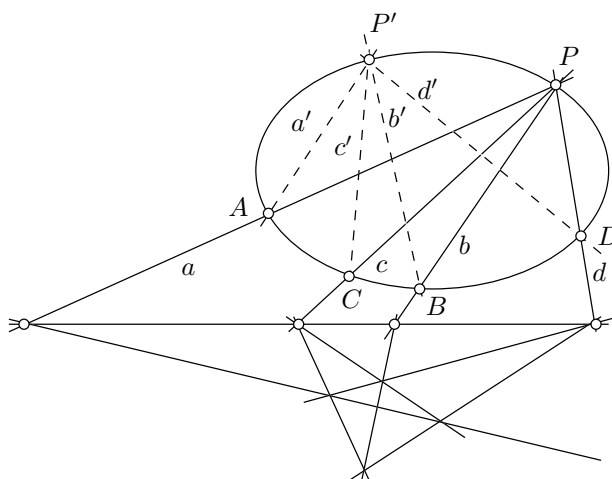


Abbildung 2.19

Beweis: Nach Satz und Definition 2.21 stiftet die Kurve eine Projektivität π zwischen den beiden Büscheln, für die gerade

$$P(a, b, c, d) \stackrel{\pi}{\wedge} P'(a', b', c', d')$$

gilt. Dabei bleiben Trennrelation und harmonische Lage erhalten. \square

Analoges gilt natürlich im Tangentenbüschel.

Dies rechtfertigt insbesondere die folgende

Definition 2.32 (harmonische Lage auf Kurve zweiter Ordnung) *Es sei \mathcal{Q} eine Kurve zweiter Ordnung.*

1. Zwei Punktepaare auf \mathcal{Q} trennen sich genau dann, wenn sich die über den Schein aus einem beliebigen Kurvenpunkt dazugehörigen Strahlenpaare trennen.
2. Zwei Tangentenpaare von \mathcal{Q} trennen sich genau dann, wenn sich die durch Schnitt mit einer beliebigen Kurventangente entstehenden Punktepaare trennen.
3. Vier Punkte von \mathcal{Q} bilden einen harmonischen Wurf, wenn ihre Scheine aus einem beliebigen Kurvenpunkt einen harmonischen Strahlenwurf bilden.
4. Vier Tangenten von \mathcal{Q} bilden einen harmonischen Wurf, wenn ihre Schnitte mit einer beliebigen Tangente einen harmonischen Punktwurf bilden.

Über Satz 2.30 hängen natürlich diese Begriffe für Punkte und für Tangenten projektiv zusammen und es gilt somit

- Satz 2.33** 1. Trennen sich zwei Punktepaare auf \mathcal{Q} , so trennen sich auch die entsprechenden Paare der zugehörigen Tangenten.
 2. Bilden vier Punkte auf \mathcal{Q} einen harmonischen Wurf, so auch die zugehörigen Tangenten.

Ebenso lassen sich auch die Begriffe *Orientierung*, *Segment* auf natürliche Weise von Strahlenbüscheln auf die Punktreihe zweiter Ordnung übertragen, womit dann auch auf der Kurve zweiter Ordnung die Aussage des Vollständigkeitsaxioms gilt. Schließlich können wir nun auch Projektivitäten zwischen Kurven zweiter Ordnung, insbesondere der Kurve in sich selbst erklären.

Definition und Satz 2.34 (Projektivitäten von Kurven zweiter Ordnung)
 Eine Zuordnung der Punkte zweier Kurven zweiter Ordnung \mathcal{Q} und \mathcal{Q}' ist eine Projektivität, wenn sie bijektiv ist und harmonische Lage erhält. Drei Paare $(A, A'), (B, B'), (C, C')$ einander zugeordneter Punkte legen genau eine Projektivität fest.

Analoges gilt natürlich für Zuordnungen zwischen den Tangenten bzw. zwischen Punkten und Tangenten.

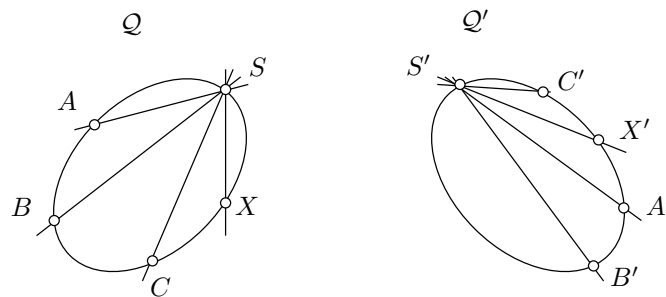


Abbildung 2.20

Beweis: (Siehe Abbildung 2.20.) Fixiere auf \mathcal{Q} bzw. \mathcal{Q}' zwei beliebige Punkte S und S' . Dann definieren die Zuordnungen $SA \mapsto S'A', SB \mapsto S'B', SC \mapsto S'C'$ genau eine Projektivität zwischen den Büscheln S, S' , die harmonische Strahlenwürfe in solche überführt. Indem wir auf beiden Seiten noch die Schnitte mit den Punktreihen anfügen, erhalten wir eine Zuordnung der Punkte von \mathcal{Q} bzw. \mathcal{Q}' , bei der die vorgegebenen Paare richtig zugeordnet werden und harmonische Lage erhalten bleibt, also eine Projektivität zwischen den Punktreihen \mathcal{Q} und \mathcal{Q}' .

Sie ist aber auch die einzige dieser Art. Denn sind

$$\pi_1 : \mathcal{Q}(A, B, C, X) \bar{\wedge} \mathcal{Q}'(A', B', C', X'_1)$$

und

$$\pi_2 : \mathcal{Q}(A, B, C, X) \bar{\wedge} \mathcal{Q}'(A', B', C', X'_2)$$

zwei Projektivitäten, die jeweils $(A, A'), (B, B'), (C, C')$ richtig zuordnen, so betrachten wir zu einem beliebigen Zentrum S'_1 auf \mathcal{Q}' die folgende Zuordnung im Büschel S'_1 , wobei x'_1 ein beliebiger Strahl von S'_1 sei:

$$S'_1(x'_1) \xrightarrow{\text{Schnitt}} \mathcal{Q}'(X'_1) \xrightarrow{\pi_1^{-1}} \mathcal{Q}(X) \xrightarrow{\pi_2} \mathcal{Q}'(X'_2) \xrightarrow{\text{Schein}} S'_1(x'_2).$$

Da alle Zuordnungen harmonische Lage erhalten, ist dies eine Projektivität, für die sogar

$$S'_1(S'_1A', S'_1B', S'_1C') \bar{\wedge} S'_1(S'_1A', S'_1B', S'_1C'),$$

die also drei Fixstrahlen hat und damit die Identität ist. Dann ist aber notwendig auch $\pi_1 = \pi_2$. \square

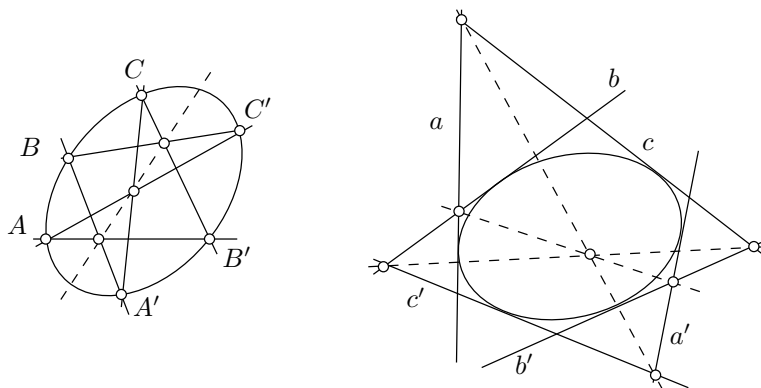


Abbildung 2.21

Für Projektivitäten zwischen Punktreihen bzw. Büscheln erster Ordnung hatten wir den Satz 2.11 gezeigt. Der gilt analog auch hier:

Satz 2.35 (Kreuzlinien-Kreuzpunktsatz für Kurven zweiter Ordnung) *Es sei Q eine Kurve zweiter Ordnung.*

1. Für jede Projektivität

$$Q(A, B, C, \dots) \bar{\wedge} Q(A', B', C', \dots)$$

zwischen den Punkten der Kurve Q liegen die Schnittpunkte entsprechender Kreuzlinien auf einer festen Geraden, der "Perspektivitätsachse" der Projektivität.

2. Für jede Projektivität

$$Q(a, b, c, \dots) \bar{\wedge} Q(a', b', c', \dots)$$

zwischen den Tangenten der Kurve Q gehen die Verbindungsgeraden entsprechender Kreuzpunkte durch einen festen Punkt, dem "Perspektivitätszentrum" der Projektivität.

Für die Identität liegt ein Sonderfall vor. Es ist zweckmäßig hier jede Gerade bzw. jeden Punkt als Achse bzw. Zentrum anzusehen.

Beweis: (Siehe Abbildung 2.21.) Betrachte die Projektivität

$$A'(A'A, A'B, A'C) \stackrel{\text{Schnitt}}{\bar{\wedge}} Q(A, B, C) \bar{\wedge} Q(A', B', C') \stackrel{\text{Schein}}{\bar{\wedge}} A(AA', AB', AC')$$

zwischen den Büscheln A' und A . Da der gemeinsame Strahl sich selbst entspricht, sind sie perspektiv, d.h. entsprechende Strahlen $A'B$ und AB' bzw. $A'C$ und AC' etc. schneiden sich auf einer Geraden p . Nach dem Satz von PASCAL für das einfache Sechseck $AB'CA'BC'$ liegt auch der weitere Kreuzpunkt, etwa der Schnitt von $B'C$ und BC' darauf. \square

Dieser Satz hat eine Reihe nützlicher Konsequenzen.

Satz 2.36 *Es sei $\pi \neq \text{id}$ eine Projektivität auf einer Punktreihe Q zweiter Ordnung, g die zugehörige (Perspektivitäts-)Achse. Dann gelten*

1. Genau die Schnittpunkte von g und \mathcal{Q} sind die Fixpunkte von π .
2. π ist durch die Achse und ein Paar X, X' verschiedener nicht auf g liegender Urbild/Bild-Punkte bestimmt.
3. Die Projektivitäten auf \mathcal{Q} mit der selben Achse bilden eine abelsche Gruppe.

Bemerkung 2.37 Vertauschbare Projektivitäten auf \mathcal{Q} brauchen nicht dieselbe Achse zu haben.

Beweis: (zu Satz 2.36)

1. Für je zwei Kurvenpunkte X und Y schneiden sich die Geraden $X\pi(Y)$ und $Y\pi(X)$ auf g . Damit ist F genau dann Fixpunkt, wenn sich für alle X die Geraden XF und $F\pi(X)$ auf g schneiden, woraus sofort die Behauptung folgt.
2. Für einen beliebigen Kurvenpunkt Y trifft $X'Y$ die Gerade g in einem Punkt S , die Gerade XS die Kurve in einem Punkt Y' . Diese Zuordnung $Y \mapsto Y'$ ist projektiv und beschreibt genau die Situation aus dem Kreuzliniensatz.
3. Entsprechend der oben gemachten Bemerkung rechnen wir die Identität zu den Projektivitäten mit Achse g . Daß π und π^{-1} dieselbe Achse haben, ist trivial.

Seien nun π_1, π_2 zwei Projektivitäten mit Achse g , X, Y Punkte auf \mathcal{Q} . Betrachte auf \mathcal{Q} das einfache Sechseck $X, \pi_1(Y), \pi_2\pi_1(X), Y, \pi_1(X), \pi_2\pi_1(Y)$. Nach dem Satz von PASCAL liegen die Schnittpunkte der Gegenseiten $X \pi_1(Y)$ und $Y \pi_1(X)$, ferner $\pi_1(Y) \pi_2\pi_1(X)$ und $\pi_1(X) \pi_2\pi_1(Y)$, sowie $\pi_2\pi_1(X) Y$ und $\pi_2\pi_1(Y) X$ auf einer Geraden. Da g Achse für π_1 und π_2 ist, liegen die ersten beiden Schnittpunkte auf g , somit auch der letzte, und dies zeigt, daß g auch Perspektivitätsachse für $\pi_2\pi_1$ ist.

Kommutativität: Sind π_1, π_2 Projektivitäten mit Achse g und ist X ein beliebiger Punkt auf \mathcal{Q} , so schneiden sich $X\pi_2(\pi_1(X))$ und $\pi_2(X)\pi_1(X)$ auf der Achse g von π_2 , ferner $X\pi_1(\pi_2(X))$ und $\pi_1(X)\pi_2(X)$ auf der Achse g von π_1 . Diese beiden Schnittpunkte auf g stimmen trivialerweise überein, also auch die \mathcal{Q} -Punkte $\pi_2(\pi_1(X))$ und $\pi_1(\pi_2(X))$. \square

Ist π eine Projektivität auf einer Kurve \mathcal{Q} , g eine beliebige Gerade, Z ein fester Punkt auf \mathcal{Q} (nicht auf g), so kann man einen allgemeinen Punkt P von g zunächst über das feste Zentrum Z auf \mathcal{Q} projizieren, den erhaltenen Punkt mit π abbilden und den Bildpunkt wieder aus Z auf g projizieren. Man erhält so eine Projektivität auf g , und sagt, daß man π aus Z auf g projiziert habe. Im allgemeinen ist diese Konstruktion von Z abhängig. Es gilt jedoch

Satz 2.38 Projiziert man eine Projektivität π einer Kurve \mathcal{Q} zweiter Ordnung auf ihre Perspektivitätsachse g , so ist die entstehende Projektivität unabhängig von der Wahl des Projektionszentrums. Ihre Fixpunkte sind genau die Schnittpunkte von g und \mathcal{Q} .

Beweis: X und $X' := \pi(X)$ sei ein Paar zu π auf \mathcal{Q} . Durch Projektion aus einem Kurvenpunkt S entstehe daraus auf der Perspektivitätsachse g das Paar U, U' . Wir projizieren dies aus einem beliebigen Kurvenpunkt T zurück auf \mathcal{Q} und erhalten Y, Y' . Wenn wir zeigen, daß $Y' = \pi(Y)$ ist, ist offenbar die erste Behauptung bewiesen. (Siehe Abbildung 2.22).

Dazu konstruiere zunächst den Punkt $T' = \pi(T)$ über die Kreuzlinien TX' und $T'X$, die sich auf g (in einem Punkt V) treffen. Dann betrachte das Kurvensechseck $X'TYT'XS$ und konstruiere die PASCAL-Gerade. $X'T$ und $T'X$ schneiden sich in

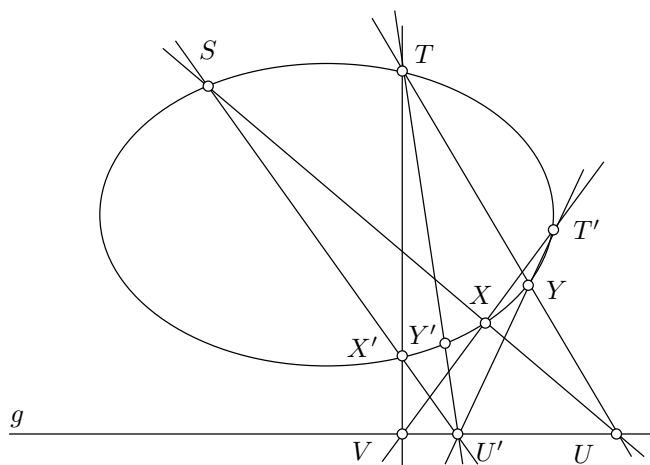


Abbildung 2.22

V , TY und XS schneiden sich in U , und beide Schnittpunkte liegen auf g . Also ist dies die PASCAL-Gerade und es schneiden sich auch YT' und SX' auf g , damit notwendig in dem Punkt U' , durch den auch $Y'T$ geht. Über den Kreuzliniensatz ist dann $Y' = \pi(Y)$, was wir zeigen wollten.

Fixpunkte der auf g induzierten Projektivität entsprechen offenbar durch Schein genau den Fixpunkten von π selbst und diese sind die Schnittpunkte von g und \mathcal{Q} , woraus die zweite Behauptung direkt folgt. \square

Pol und Polare an Kurven zweiter Ordnung

In Satz 2.29 hatten wir gezeigt:

Das Nebendreieck eines vollständigen Vierecks, dessen vier Ecken einer Punktreihe zweiter Ordnung angehören, fällt zusammen mit dem Nebendreieck des vollständigen Vierseits aus den Tangenten in jenen Ecken. (Siehe Abbildung 2.16.)

Dieses Nebendreieck spielt eine so zentrale Rolle, daß wir es genauer untersuchen.

Definition 2.39 (Pol, Polare) *Es sei \mathcal{Q} eine Kurve zweiter Ordnung. Das Nebendreieck eines vollständigen Vierecks mit Ecken auf \mathcal{Q} oder das Nebendreieck eines vollständigen Vierseits aus Tangenten an \mathcal{Q} , heißt "Polardreieck" zu \mathcal{Q} . Ein Paar aus gegenüberliegender Ecke und Seite (P, p) heißt "Pol, Polare", genauer " P Pol zu p ", " p Polare zu P ".*

Vier Punkte und ihre Tangenten, resp. vier Tangenten und ihre Berührungspunkte zu einer Kurve zweiter Ordnung bilden also vollständige Vierecke und Vierseite mit einem Polardreieck als gemeinsamem Neben-Drei-Eck(-Seite).

Nach der Definition hängen Pol und Polare von einem Viereck oder Vierseite ab. Es gilt jedoch

Satz 2.40 *Durch eine Kurve \mathcal{Q} zweiter Ordnung bestimmen sich Pol und Polare gegenseitig eindeutig.*

Beweis:

1. *Pol bestimmt Polare:* (Siehe Abbildung 2.23.)

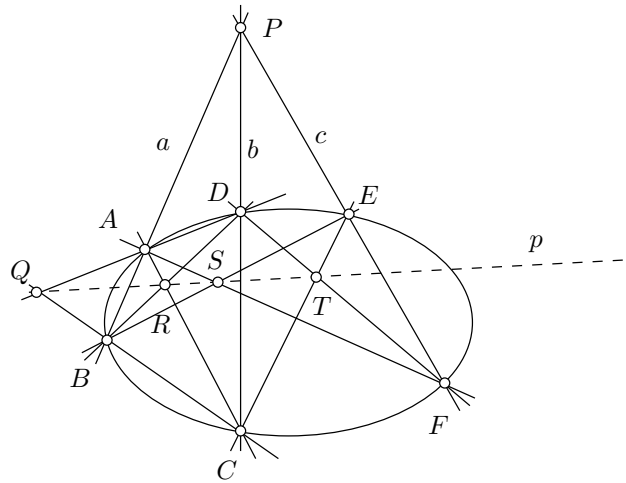


Abbildung 2.23

Sei Q eine feste Kurve zweiter Ordnung, P ein fester Punkt nicht auf Q . Wir legen von P aus zwei Geraden a, b so, daß sie Q in je zwei Punkten schneiden. Dies ergibt ein Viereck $ABCD$, dessen eine Nebenecke P ist. Nach Definition liefern dann die anderen Nebenecken Q, R mit P ein Polardreieck, in dem $p := QR$ die P gegenüberliegende Seite ist. Somit sind P, p ein polares Paar. Wir zeigen nun, daß p nicht von der konkreten Konstruktion abhängt, sondern allein durch P und Q bestimmt ist.

Dazu legen wir durch P eine weitere Gerade c , die Q in E und F schneidet. Das einfache Sechseck $ACEBDF$ liegt auf Q und somit liegen die Schnittpunkte von Gegenseiten, $R := AC \vee BD$, $S := EB \vee AF$, $T := CE \vee DF$ auf einer PASCAL-Geraden p' .

Nun bilden wir die Dreiecke ADF und BCE . Nach Konstruktion gehen die Verbindungen entsprechender Ecken durch P . Die Dreiecke sind also zentriert und somit nach DESARGUES auch liniert, d.h. die Schnittpunkte entsprechender Seiten liegen auf einer Geraden. Dies sind die Punkte $AD \vee BC = Q$, $DF \vee CE = T$, $AF \vee EB = S$. Zwei davon liegen auf der PASCAL-Geraden p' , somit ist sie auch die DESARGUES-Gerade, und alle vier Punkte Q, R, S, T liegen auf einer Geraden, eben $p = p'$.

Damit ist gezeigt, daß die PASCAL-Gerade p' gar nicht von der Geraden c abhängt - denn p ist ja allein durch a, b bestimmt - und (Rollentausch!) dito nicht von a, b , sondern allein vom Punkt P , in dessen Büschel alle diese Geraden liegen. Wegen $p = p'$ gilt dasselbe für p .

2. *Polare bestimmt Pol*: Man beginne mit der Geraden p und zwei Punkten darauf, bilde dazu das Tangentenvierseit und argumentiere dual zu eben weiter. \square

Wir sind nun berechtigt bezüglich einer Kurve Q von *der* Polaren zu einem Punkt, bzw. *dem* Pol zu einer Geraden zu sprechen. Falls P auf der Kurve liegt, ist die Polare die Tangente durch P , falls p Tangente ist, ist der Pol der Berührungspunkt. Dies wird sich aus dem Weiteren ergeben.

Pol und Polare stehen mit den Punkten und Tangenten einer Kurve zweiter Ordnung in einer Reihe von eigentümlichen Beziehungen, von denen wir einige notieren als

Satz 2.41 Es sei Q eine Kurve zweiter Ordnung, (P, p) ein dazugehöriges Paar von Pol und Polare. Dann gelten:

1. Ist $ABCD$ ein Viereck auf Q mit einer Nebenecke P , so liegen die anderen Nebenecken auf p .
2. Ist x ein Strahl durch P , der Q in X und X' schneidet, so schneiden sich die Tangenten in X und X' auf p .
3. Ist x ein Strahl durch P , der Q in X und X' schneidet, $S := xp$ sein Schnittpunkt mit p , so bilden $PXSX'$ einen harmonischen Wurf.
4. Ist T ein Schnittpunkt von p und der Kurve Q , so ist $t := TP$ die Tangente an Q in T .

Sämtliche Aussagen gelten auch (eben) dualisiert.

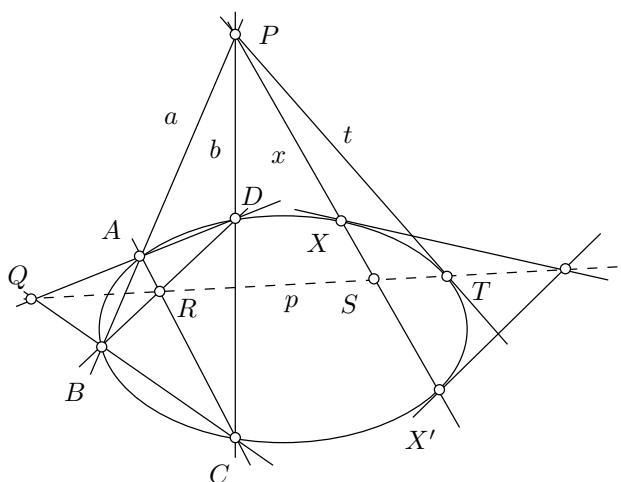


Abbildung 2.24

Beweis: Siehe Abbildung 2.24.

1. Dies folgt unmittelbar aus der Definition.
2. Wähle irgend einen weiteren Strahl y durch P , der Q in Y, Y' schneide, und betrachte das Vierseit aus den Tangenten in X, X', Y, Y' . Nach Satz 2.29 fällt sein Nebendreieck mit dem Nebendreieck zu $XX'YY'$ zusammen, d.h. die Tangenten in X und X' (dito in Y, Y') schneiden sich auf p .
3. Betrachte in Abbildung 2.24 das Viereck $AQBR$. Es hat C und D als Nebenecken, ferner P und den Schnittpunkt von CD mit p als Schnitte weiterer Seiten mit der Nebenseite CD . Somit bilden diese Punkte einen harmonischen Wurf.
4. Die Gerade $t := TP$ hat mit Q einen Punkt gemeinsam, nämlich ihren Schnittpunkt T mit p . Da Q eine Kurve zweiter Ordnung ist, gibt es höchstens noch einen weiteren Schnittpunkt von t mit Q . Falls T' ein solcher ist, bilden also $PTT'T'$ einen harmonischen Wurf, was unmöglich ist. \square

Bemerkung 2.42 Teil 1 des obigen Satzes beschreibt die Standard-Konstruktion für die Polare zu einem Punkt P .

Schließlich notieren wir noch den

Satz 2.43 (Hauptsatz der Polarentheorie) *Es sei (P, p) ein Paar Pol, Polare an eine feste Kurve \mathcal{Q} , und dabei P nicht auf \mathcal{Q} . Dann gelten*

1. Für jeden Punkt Q auf p geht seine Polare q durch P .
2. Für jeden Strahl q durch P liegt sein Pol Q auf p .
3. Die Zuordnung $p(Q) \leftrightarrow P(q)$ ist projektiv.

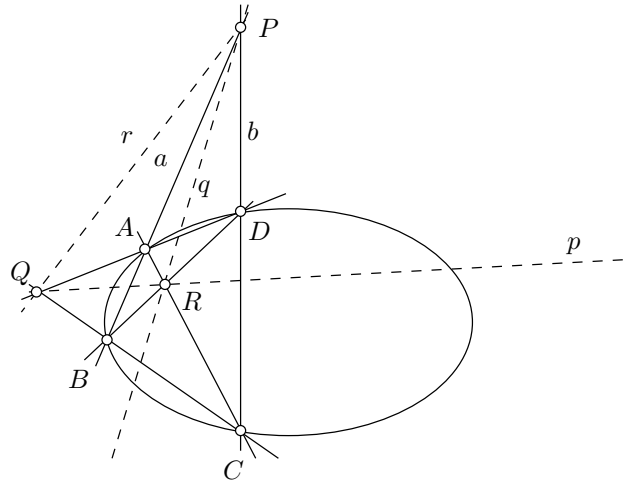


Abbildung 2.25

Beweis: Siehe Abbildung 2.25.

1. Wir wählen einen beliebigen Punkt Q auf p und eine Gerade a durch P aber nicht durch Q , die \mathcal{Q} in A, B schneide. Die Gerade QB schneide \mathcal{Q} noch in C , die Gerade $b := PC$ schneide \mathcal{Q} noch in D . Nach Konstruktion ist also $ABCD$ ein Viereck auf der Kurve mit einer Nebenecke P . Somit ist die gegenüberliegende Nebenseite die Polare p zu P . Auf ihr schneiden sich also BC und AD und, da $Q = p \vee BC$, gehen also BC und AD durch Q , d.h. Q ist auch Nebenecke zu $ABCD$. Damit ist die Polare q zu Q die gegenüberliegende Nebenseite, geht also durch P und R .
2. Dies geht analog.
3. Zum Nachweis der Projektivität $p(Q) \bar{\wedge} P(q)$ halten wir die Punkte B, A auf \mathcal{Q} fest und lassen Q die Polare p durchlaufen. Dann erhalten wir folgende Kette von Projektivitäten:

$$p(Q) \stackrel{\text{Schein}}{\bar{\wedge}} B(BQ) \stackrel{\mathcal{Q}}{\bar{\wedge}} A(AC) \stackrel{\text{Schnitt}}{\bar{\wedge}} p(R) \stackrel{\text{Schein}}{\bar{\wedge}} P(q).$$

Die ausstehenden Sonderfälle seien dem Leser überlassen. □

Aus der eben betrachteten Pol-Polare-Projektivität können wir zwei weitere wichtige Begriffe gewinnen. Sei (P, p) ein festes polares Paar an eine Kurve \mathcal{Q} , dabei $P \notin \mathcal{Q}$. Indem wir hinter die Projektivität $p(Q) \bar{\wedge} P(q)$ noch den Schnitt mit p schalten, erhalten wir eine Projektivität

$$\eta_p : p(Q) \bar{\wedge} p(R)$$

der Geraden p in sich, wobei jedem Punkt Q der Schnittpunkt R von p mit der Polaren q zu Q zugeordnet wird. (Siehe auch Abbildung 2.25). Die Punkte P, Q, R bilden ein Polardreieck, d.h. die Polare r von R ist $r = PQ$ und schneidet somit p in Q . Bei der eben konstruierten Projektivität η_p gilt also:

Wird der Punkt Q auf R abgebildet, so wird R auf Q abgebildet, d.h. zweimaliges Anwenden von η_p ist die Identität, also η_p eine Involution.

Analog können wir einem Strahl q durch P die Verbindungsgerade r seines Poles mit P zuordnen und erhalten wieder eine Involution

$$\eta_P : P(q) \bar{\wedge} P(r).$$

Definition 2.44 *Zwei Punkte oder zwei Geraden heißen konjugiert bezgl. einer Kurve Q zweiter Ordnung, wenn einer auf der Polaren des anderen liegt, bzw. eine der Geraden durch den Pol der anderen geht.*

Damit können wir den eben abgeleiteten Sachverhalt so aussprechen:

Satz und Definition 2.45 *Konjugierte Punkte auf einer Geraden $p \notin Q$ sind Paare einer Involution, der "Pol-Polare-Involution" η_p , ebenso sind konjugierte Geraden durch einen Punkt $P \notin Q$ Paare der "Pol-Polare-Involution" η_P .*

Über Satz 2.41 folgt dann leicht:

Satz 2.46 *Trifft die Gerade p die Kurve Q nicht, so ist die Pol-Polare-Involution η_p elliptisch, trifft die Gerade p die Kurve Q in zwei Punkten S, T , so ist η_p die harmonische Spiegelung an S und T .*

Ist p Tangente mit Berührungspunkt P , so ist jeder Punkt von p zu P konjugiert. Hier ist η_p nicht erklärt.

Sinngemäß gilt dies auch für konjugierte Geraden in einem Büschel.

Involutionen auf Kurven zweiter Ordnung

Mit dem Begriff der Projektivität einer Kurve Q zweiter Ordnung in sich haben wir natürlich auch den Begriff der Involution auf einer solchen Punktreihe Q . Man prüft leicht nach, daß eine Projektivität η auf Q genau dann eine Involution ist, wenn die von ihr in einem Büschel durch einen Kurvenpunkt über Scheinbildung induzierte Projektivität eine Involution ist, sodaß wieder nur *elliptische Involutionen*, d.h. Involutionen ohne Fixpunkt, und *hyperbolische Involutionen*, d.h. solche mit zwei Fixpunkten, also *harmonische Spiegelungen* in Frage kommen.

Für Projektivitäten auf Q hatten wir den Satz 2.35

Ist $\pi : Q(A, B, C, X) \bar{\wedge} Q(A', B', C', X')$ projektiv, so schneiden sich Paare von Kreuzlinien auf einer Geraden, der "Perspektivitätsachse" von π .

Dies gilt natürlich auch für Involutionen. Hier gilt aber mehr:

Satz 2.47 1. *Es sei $\pi : Q(A, A', B, B') \bar{\wedge} Q(A', A, B', B)$ eine Involution. Dann gehen die Verbindungsgeraden $a := AA'$, $b := BB'$ sich entsprechender Punkte durch einen Punkt, das "Involutionzentrum" P . Es ist der Pol der Perspektivitätsachse.*

Falls vorhanden sind die Schnittpunkte der Polaren p von P mit der Kurve Q die Fixpunkte der Involution.

Für jeden Punkt $P \notin Q$ ergibt dies auch eine Involution auf Q .

2. *Entsprechendes gilt für Involutionen im Tangentenbüschel.*

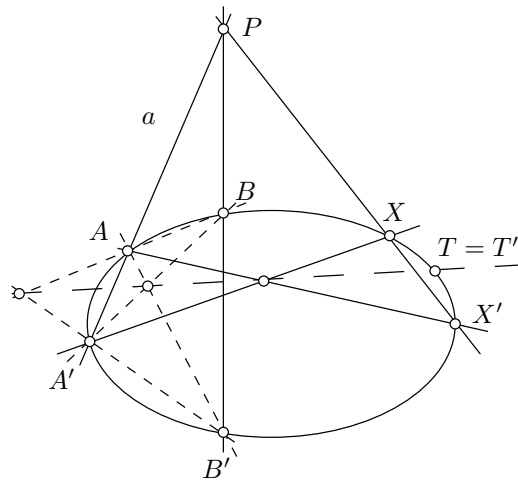


Abbildung 2.26

Beweis: (Vergleiche Abbildung 2.26.) Für die Involution

$$\eta : \mathcal{Q}(A, A', B, B') \bar{\wedge} \mathcal{Q}(A', A, B', B)$$

schneiden sich die Kreuzlinienpaare (AB', BA') bzw. $(A(B')' = AB, B'A')$ auf der Perspektivitätsachse p , die nach Konstruktion die Polare von $P := AA' \wedge BB'$ ist. Man beachte, daß p und damit P alleine durch die Involution bestimmt sind.

Der Kreuzliniensatz erweist auch sofort jeden Schnittpunkt der Polaren p mit der Kurve als Fixpunkt, und erlaubt auch den umgekehrten Schluß.

Sei nun $P \notin \mathcal{Q}$ mit Polare p beliebig vorgegeben. Durch P lege einen Strahl a , der \mathcal{Q} in zwei verschiedenen Punkten A und A' schneide. Dann definiert p eine Perspektivität zwischen den Büscheln, deren Zentren die Kurvenpunkte A bzw. A' sind. Solche perspektiven Strahlen treffen dann die Kurve in Punkten X bzw. X' , die nach der Polarentheorie mit P kollinear sind. Dabei ist also insbesondere dann $\mathcal{Q}(X) \bar{\wedge} \mathcal{Q}(X')$ als Projektivität erkannt und über das Polardreieck zum Viereck A, A', X, X' erweist sie sich als Involution. \square

Satz 2.48 *Es sei \mathcal{Q} eine Kurve zweiter Ordnung, (P, p) dazu polares Paar, dabei P nicht auf \mathcal{Q} , π sei die Involution auf \mathcal{Q} mit Zentrum P .*

1. *Projiziert man die Involution π aus einem Kurvenpunkt S auf p , so entsteht dort die Involution bzgl. \mathcal{Q} konjugierter Punkte.*
2. *Projiziert man aus einem beliebigen Kurvenpunkt S die Involution konjugierter Punkte auf p auf die Kurve \mathcal{Q} , so entsteht dort die Involution π .*

Beweis: Siehe Abbildung 2.27.

1. Betrachte die Projektivität

$$p(Y) \stackrel{S}{\bar{\wedge}} \mathcal{Q}(X) \stackrel{\pi}{\bar{\wedge}} \mathcal{Q}(X') \stackrel{S}{\bar{\wedge}} p(Y').$$

Wir zeigen, daß dabei die Polarfigur entsteht, wonach dann Y und Y' konjugiert sind. Dazu definiere S' als Schnitt von PS und \mathcal{Q} . Dann ist $XX'SS'$ ein Kurvenviereck mit Nebenecke P und somit auch mit Nebenseite p . Also treffen sich $S'X'$ und XS auf p , also in Y und analog $X'S$ und $X'S'$ in Y' , womit 1. gezeigt ist.

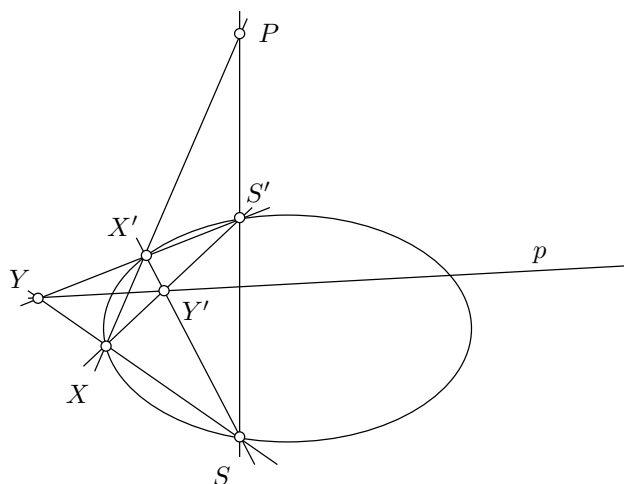


Abbildung 2.27

2. Durch Projektion aus S entstehen aus den konjugierten Punkten Y, Y' auf p die Kurvenpunkte X, X' . Ergänze zu einem Kurvenviereck $XX'SS'$ mit Nebenecke Y . Die zugehörige Polare y geht durch Y' , was auf der Seite SX' liegt. Damit ist auch Y' Nebenecke, folglich p Nebenseite und P wieder Nebenecke, d.h. XX' geht durch P . □

Dieser Satz läßt sich in folgendem Sinne umkehren:

Satz 2.49 *Es sei p eine feste Gerade, darauf $\pi \neq \text{id}$ eine Involution. Ferner seien P, A Punkte nicht auf p , sodaß der Schnittpunkt $S := p \vee AP$ kein Fixpunkt von π ist. Dann existiert eine Kurve \mathcal{Q} zweiter Ordnung mit*

- \mathcal{Q} geht durch A ,
- P, p sind polar bezgl. \mathcal{Q} ,
- \mathcal{Q} erzeugt auf p die Involution π .

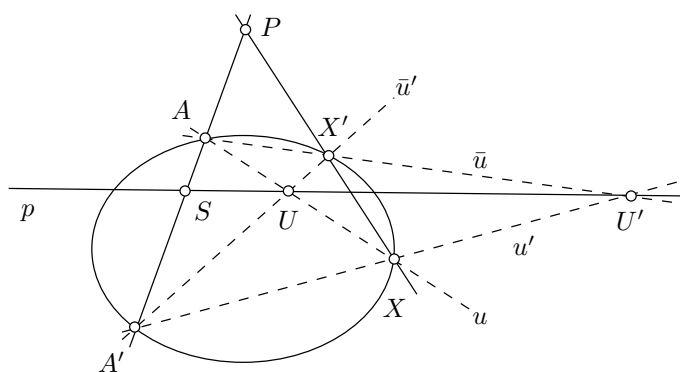


Abbildung 2.28

Beweis: Siehe Abbildung 2.28. Wir bilden $a := AP$, $S := pa$ und A' so, daß $PASA'$ ein harmonischer Wurf ist. Dann ist

$$\eta : A(u) \overset{\text{Schnitt}}{\bar{\lambda}} p(U) \overset{\pi}{\bar{\lambda}} p(U') \overset{\text{Schein}}{\bar{\lambda}} A'(u')$$

eine Projektivität. Da $S = p \vee AP$ kein Fixpunkt von π ist, ist η nicht perspektiv. Somit wird eine Kurve \mathcal{Q} zweiter Ordnung erzeugt, die A und A' enthält. Da π Involution ist, gilt für η auch $A(\bar{u}) \stackrel{\eta}{\wedge} A'(\bar{u}')$. Also ist mit X auch X' Kurvenpunkt. Das vollständige Viereck $UU'XX'$ hat A, A' als Nebenecken, S als Schnittpunkt mit einer weiteren Seite. Also muß $XX' \vee a$ den vierten harmonischen Punkt für den Wurf $A'SAP$ liefern, was bedeutet, daß XX' durch P geht. Dann haben wir aber die Polarfigur erreicht, d.h. P ist der Pol von p und U, U' sind konjugiert, womit alles gezeigt ist. \square

Über diese Darstellungen lassen sich sofort auf Kurven zweiter Ordnung eine Reihe von häufig vorkommenden Aufgaben lösen.

Aufgabe 2.50 Finde die Fixpunkte einer hyperbolischen Involution.

Lösung: Schneide die Kurve mit der Polaren des Involutionenzentrums.

Aufgabe 2.51 Finde ausgehend von einem beliebigen Punkt A auf \mathcal{Q} eine harmonische Darstellung einer elliptischen Involution π mit Zentrum P , d.h. bestimme zwei Paare der Involution, die sich harmonisch trennen und von denen eines den Punkt A enthält.

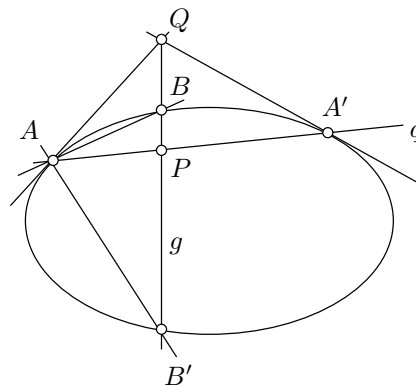


Abbildung 2.29

Lösung: Siehe Abbildung 2.29. π hat keine Fixpunkte, somit hat die Gerade $q := AP$ neben A noch einen weiteren Kurvenpunkt A' . Sei Q der Pol von q . Dann trifft $g := QP$ die Kurve in zwei Punkten B, B' . Es sind dann die Punkte $QBPB'$ ein harmonischer Wurf auf g und damit durch Schein aus A und Schnitt mit der Kurve auch $ABA'B'$ ein harmonischer Wurf auf der Kurve. Nach Konstruktion sind A, A' und B, B' je Involutionspaare.

Diese beiden Paare sind durch den Ausgangspunkt A eindeutig bestimmt.

Auf ähnliche Weise kann man die im folgenden zusammengestellten Aufgaben bearbeiten:

Aufgabe 2.52 Auf der Kurve \mathcal{Q} seien zwei sich nicht trennende Punktepaare gegeben. Finde ein Punktepaar, das beide harmonisch trennt.

Aufgabe 2.53 Auf der Kurve \mathcal{Q} seien zwei Involutionen gegeben, von denen wenigstens eine elliptisch ist. Finde ein beiden gemeinsames Paar.

Aufgabe 2.54 *Auf der Kurve \mathcal{Q} seien eine elliptische Involution π und ein Punktepaar A, B gegeben. Finde ein π -Paar, das A, B harmonisch trennt.*

Alle diese Aufgaben lassen sich auf Kurven zweiter Ordnung simpel lösen. Analoge Aufgaben für Punktreihen oder Büschel erster Ordnung löst man am einfachsten, indem man eine beliebige Kurve zweiter Ordnung heranzieht, das gegebene Problem dort hinauf projiziert, löst und dann wieder zurückgeht.