

3 Koordinaten und Skalen

Möbius-Koordinaten

Harmonisch geordnete Folgen

Definition 3.1 Eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ von Elementen eines Grundgebildes g erster Stufe heißt "harmonisch geordnet bezüglich eines Elementes F ", wenn für alle $n \in \mathbb{Z}$ stets $(A_{n-1}, A_n, A_{n+1}, F)$ ein harmonischer Wurf ist.

Deutet man dies auf einer Euklidischen Geraden, wobei man F als den Fernpunkt wählt, so ist in einer solchen Folge stets A_n die Mitte zwischen A_{n-1} und A_{n+1} , sodaß die ganze Gerade in lauter Euklidisch gleich große Intervalle unterteilt wird. Die bezüglich eines Elementes harmonisch geordnete Folge ist also ein projektiver Ersatz für eine äquidistante Teilung auf Punktreihen.

Wir gewinnen die sogenannten MÖBIUS-Koordinaten auf Grundgebilden erster Stufe, also etwa auf einer Punktreihe g , indem wir von einer solchen Teilung ausgehen, den dabei benutzten Punkten ihren (ganzzahligen) Index zuordnen, dann die Teilung verfeinern, bis wir für alle rationalen Zahlen Punkte bezeichnet haben und schließlich mit einem Stetigkeitsschluß dies zu einer Bijektion zwischen der Punktreihe und $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ ausbauen.

Zunächst seien solche harmonisch geordneten Folgen betrachtet. Um konkret zu sein, gehen wir meist von einer Punktreihe aus, für Strahlen- bzw. Ebenenbüschel gilt alles sinngemäß.

Lemma 3.2 Es sei g eine Punktreihe.

1. Zu je drei Punkten O, E, F auf g gibt es genau eine bezüglich F harmonisch geordnete Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $A_0 = O, A_1 = E$.

Ist $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine bezüglich F harmonisch geordnete Folge, so gelten:

2. Für jedes $k \geq 2$ und alle n ist $(A_n, A_{n+1}, \dots, A_{n+k}, F)$ zyklisch. Insbesondere sind je zwei Folgenglieder untereinander und von F verschieden.
3. Ist $\varphi : g(F, A_n) \bar{\wedge} g'(F', A'_n)$ projektiv, so ist die Folge $(A'_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ harmonisch geordnet bezüglich F' .
4. Für jedes $s \in \mathbb{Z}$ sind auch die Folgen $(A_{n+s})_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(A_{-n+s})_{n \in \mathbb{Z}}$ harmonisch geordnet bezüglich F .

Beweis:

1. Zu zwei Punkten A_m, A_{m+1} gibt es eindeutig bestimmte Punkte A_{m-1}, A_{m+2} , sodaß $(A_{m-1}, A_m, A_{m+1}, F)$ bzw. $(A_m, A_{m+1}, A_{m+2}, F)$ harmonische Würfe sind. Dies legt beginnend mit $A_0 = O, A_1 = E$ die Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ rekursiv fest.
2. Als harmonische Würfe sind $(A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, F)$ und $(A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}, F)$ beide zyklisch und nach den Sätzen von Kapitel 1 dann auch

$$(A_n, A_{n+1}, A_{n+2}, A_{n+3}, F).$$

Iteration dieser Schlußweise liefert die Behauptung.

3. Dies folgt mit 1. aus der Tatsache, daß Projektivitäten harmonische Lage erhalten,

4. Setze $A'_n := A_{-n+s}$ ($n \in \mathbb{Z}$). Dann ist

$$\begin{aligned} (A'_{n-1}, A'_n, A'_{n+1}, F) &= (A_{-n+1+s}, A_{-n+s}, A_{-n-1+s}, F) \\ &= (A_{-n+s+1}, A_{-n+s}, A_{-n+s-1}, F) \end{aligned}$$

und dies ist ein harmonischer Wurf.

Für die andere Folge schließt man analog. \square

Für eine Punktreihe g können wir aus drei Punkte O, E, F eine bezüglich F harmonisch geordnete Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ mit $A_0 = O, A_1 = E$ über folgende in Abbildung 3.1 dargestellte Konstruktion gewinnen.

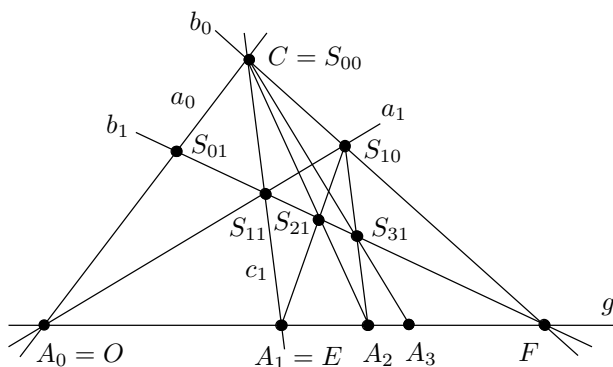


Abbildung 3.1

Konstruktion 3.3 Wähle einen Punkt C nicht auf g , bilde die Verbindungsgerade $c_1 := CE$ und wähle darauf einen weiteren Punkt $S_{1,1}$. Ferner sei $a_0 := CO$ sowie $b_0 := CF$. $a_1 := OS_{1,1}$ schneide b_0 in $S_{1,0}$, $b_1 := FS_{1,1}$ schneide a_0 in $S_{0,1}$. Nun konstruiere rekursiv: Setze $S_{n+1,1}$ als den Schnittpunkt von b_1 mit $A_n S_{1,0}$ und A_{n+1} als Schnittpunkt von $CS_{n+1,1}$ mit g .

Überlegen Sie selbst, wie man “rückwärts” aus A_n den Punkt A_{n-1} bekommt. Zum Nachweis, daß hier eine bezüglich F harmonisch geordnete Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ entsteht, betrachte das Viereck $CS_{1,0}S_{n,1}S_{n+1,1}$. Nebenecken sind

$$\begin{aligned} F &= \text{Schnitt von } CS_{1,0} \text{ und } b_1 = S_{n,1}S_{n+1,1} \\ A_n &= \text{Schnitt von } CS_{n,1} \text{ und } S_{n+1,1}S_{1,0}. \end{aligned}$$

Damit ist g Nebenseite. Deren Schnittpunkte mit den weiteren Seiten des Vierecks sind

$$\begin{aligned} A_{n-1} &\text{ auf } S_{1,0}S_{n,1} \text{ und} \\ A_{n+1} &\text{ auf } CS_{n+1,1}. \end{aligned}$$

Wir halten fest:

Fakt 3.4 In der aus Konstruktion 3.3 entstehenden Abbildung 3.1 sind stets

$$\begin{aligned} A_k, S_{k,1} \text{ und } S_{0,0} := C &\text{ sowie} \\ A_k, S_{k+1,1} \text{ und } S_{1,0} &\text{ kollinear.} \end{aligned}$$

Diese Konstruktion 3.3 liefert uns noch eine ganze Reihe weiterer harmonisch geordneter Folgen auf Punktfolgen und in Strahlenbüscheln.

Fakt 3.5 Die Folge $(S_{n,1})_{n \in \mathbb{Z}}$ auf b_1 ist harmonisch geordnet bezüglich F .

Beweis: Durch Perspektive aus C entsteht $(S_{n,1})_{n \in \mathbb{Z}}$ aus $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und die Behauptung folgt mit Lemma 3.2.3. \square

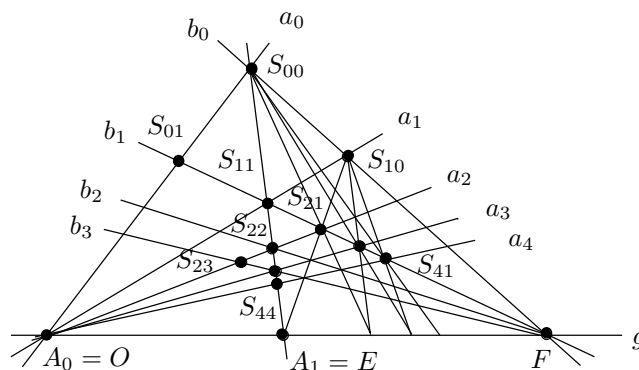


Abbildung 3.2

Fortsetzung der Konstruktion (Siehe Abbildung 3.2.) Durch Schein der Reihe $(S_{n,1})_{n \in \mathbb{Z}}$ aus A_0 entsteht im Büschel A_0 die Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, harmonisch geordnet bezüglich $g = A_0F$.

Durch Schnitt mit der Geraden $c_1 = S_{0,0}A_1$ entsteht hieraus die Folge $(S_{n,n})_{n \in \mathbb{Z}}$, harmonisch geordnet bezüglich $E = A_1$ und hieraus durch Schein aus F die Folge $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, harmonisch geordnet bezüglich $g = A_1F$.

Wir setzen im Einklang mit der bisherigen Bezeichnung

$$S_{m,n} := a_m \vee b_n.$$

Es ist damit wieder $S_{0,0} = C$.

Von diesen Punkten sind trivialerweise stets solch mit gleichem ersten oder gleichem zweitem Index kollinear und bilden damit als Schnitte mit harmonisch geordneten Strahlenfolgen selbst harmonisch geordnete Punktreihen. Es bestehen aber noch eine Vielzahl weiterer kollinear Lager, von denen wir einige benötigen.

Projiziert man die bezüglich F harmonisch geordnete Folge $(S_{n,1})_{n \in \mathbb{Z}}$ aus dem Punkt A_k auf b_0 , so haben wir nach Fakt 3.4

$$b_1(S_{k,1}, S_{k+1,1}, F) \stackrel{A_k}{\bar{\wedge}} b_0(S_{0,0}, S_{1,0}, F).$$

Folglich entsteht hierbei auf b_0 einfach die Folge $(S_{n,0})_{n \in \mathbb{Z}}$, wobei sich $S_{k+n,1}$ und $S_{n,0}$ entsprechen und damit über A_k kollinear sind. Wir haben also

Fakt 3.6 Für alle $k, n \in \mathbb{Z}$ sind jeweils $A_k, S_{k+n,1}, S_{n,0}$ kollinear.

Dies liefert insbesondere

Lemma 3.7 Ist die Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ harmonisch geordnet bezüglich F und ist $q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, s \in \mathbb{Z}$, so ist auch die Folge $(A_{qn+s})_{n \in \mathbb{Z}}$ harmonisch geordnet bezüglich F .

Beweis: Wir betrachten zunächst den Fall $q > 0, s = 0$:

Das Viereck $S_{0,0}S_{q,0}S_{q(n+1),1}S_{qn,1}$ hat die Seite $b_0 = S_{0,0}S_{q,0}$ und die Seite $b_1 = S_{q(n+1),1}S_{qn,1}$, die sich in F schneiden. Ferner sind nach Fakt 3.6 jeweils kollinear:

$$\begin{array}{lll} A_{q(n-1)}, & S_{qn,1}, & S_{q,0} \\ A_{qn}, & S_{qn,1}, & S_{0,0} \\ A_{qn}, & S_{q(n+1),1}, & S_{q,0} \\ A_{q(n+1)}, & S_{q(n+1),1}, & S_{0,0}. \end{array}$$

Also ist A_{qn} weitere Nebenecke, damit $g = A_{qn}F$ Nebenseite und $A_{q(n-1)}, A_{q(n+1)}$ sind deren Schnittpunkte mit den weiteren Viereckseiten. Somit ist für jedes $n \in \mathbb{Z}$ dann $(A_{q(n-1)}, A_{qn}, A_{q(n+1)}, F)$ harmonischer Wurf, also unsere Behauptung im Spezialfall bewiesen.

Der allgemeine Fall folgt daraus mit Lemma 3.2.4. \square

Weitere für uns interessante Beziehungen unter den $S_{m,n}$ ergeben sich über folgende Überlegungen.

Lemma 3.8 Sind $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}, (y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ zwei Folgen in verschiedenen Strahlenbüscheln X bzw. Y , beide harmonisch geordnet bezüglich des gemeinsamen Strahls $z = XY$, so liegen die Schnittpunkte $V_n := x_n y_n$ auf einer Geraden v . Die Folge $(V_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ ist harmonisch geordnet bezüglich des Schnittpunktes $V := vz$.

Beweis: Durch $\varphi : X(x_0, x_1, z) \bar{\wedge} Y(y_0, y_1, z)$ ist eine Perspektivität gegeben. Sich unter φ entsprechende Geraden schneiden sich damit auf der Perspektivitätsachse v . Nach Lemma 3.2 überführt aber φ die Folge $(x_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ in die Folge $(y_n)_{n \in \mathbb{Z}}$, sodaß deren Schnittpunkte eben auf dieser Achse liegen. \square

Dies liefert für unsere Konstruktion

Lemma 3.9 Für alle $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, r, s, \in \mathbb{Z}$ sind die Punkte $(S_{pn+r, qn+s})_{n \in \mathbb{Z}}$ kollinear und bilden eine bezüglich des Schnittpunktes der Trägergeraden mit g harmonisch geordnete Folge.

Beweis: Die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(b_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ sind je harmonisch geordnet bezüglich $g = A_0F$. Nach Lemma 3.7 gilt dies dann auch für die Folgen $(a_{pn+r})_{n \in \mathbb{Z}}$ und $(b_{qn+s})_{n \in \mathbb{Z}}$ und nach Lemma 3.8 sind deren Schnittpunkte $S_{pn+r, qn+s} = a_{pn+r} \vee b_{qn+s}$ eben kollinear. Der Rest ist trivial. \square

Speziell für $r = s = 0$ liegen also die Punkte $S_{0,0}, S_{p,q}, S_{2p,2q}, \dots, S_{np,nq}, \dots$ sämtlich auf einer Geraden $c_{p,q}$, die offenbar alleine durch den Quotienten $\frac{p}{q}$ festgelegt ist. Ihr Schnittpunkt mit g sei mit $A_{\frac{p}{q}}$ bezeichnet.

Speziell für $q = 1$ trägt dann $c_{p,1}$ die Punkte $S_{0,0}$ und $S_{p,1}$ und geht damit durch A_p , sodaß diese Bezeichnung konsistent mit der bisherigen ist. Der Punkt F entspricht dem Parameter $q = 0$ und sei deshalb auch mit $F = A_\infty$ bezeichnet.

Satz und Definition 3.10 Die Menge der so zu den vorgegebenen Grundpunkten $A_0 = O, A_1 = E, A_\infty = F$ konstruierten Punkte

$$\mathcal{G} := \{A_\alpha \mid \alpha \in \mathbb{Q} \cup \{\infty\}\}$$

nennen wir das von O, E, F erzeugte "rationale Gitter" auf g .

Die durch

$$\mu : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}, A_\alpha \mapsto \mu(A_\alpha) := \alpha$$

gegebene Zuordnung ist eine Bijektion zwischen dem Gitter und den (um ∞ erweiterten) rationalen Zahlen. Sie ist ordnungstreu bezüglich der Anordnungen, die auf g axiomatisch gegeben ist und auf \mathbb{Q} durch die übliche $<$ -Relation.

Insbesondere gilt

1. Mit je zwei Punkten $A_\alpha, A_\beta \in \mathcal{G}, \neq F$ ist $(A_\alpha, A_{\frac{\alpha+\beta}{2}}, A_\beta, F)$ ein harmonischer Wurf.

2. Für alle $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}, \alpha \neq 0$ bilden die Punkte $(A_{\alpha n + \beta})_{n \in \mathbb{Z}}$ eine bezüglich F harmonisch geordnete Folge.

Beweis: Wähle $\alpha := \frac{p}{q}, p, q \in \mathbb{Z}, \neq 0$. Die Gerade $c_{n\alpha} := S_{0,0} \vee A_{n\alpha}$ schneidet b_q im Punkt $S_{np,q}$ auf a_{np} . Diese Punkte $(S_{np,q})_{n \in \mathbb{Z}}$ bilden auf b_q eine bezüglich F harmonisch geordnete Folge. Zu ihr ist die Folge $(A_{n\alpha})_{n \in \mathbb{Z}}$ über $S_{0,0}$ perspektiv, also ebenfalls bezüglich F harmonisch geordnet. Indem man die rationalen Zahlen α, β mit gemeinsamem Nenner darstellt, folgt die Behauptung 2. aus Lemma 3.9 und Lemma 3.7. Für die Behauptung 1. stelle man α, β dar als $\alpha = \frac{2k}{q}, \beta = \frac{2m}{q}$ und betrachte die Folge $X_n := A_{n \frac{m-k}{q} + \frac{m+k}{q}}$ und dies speziell bei $n = -1, 0, 1$.

Insbesondere folgt damit, daß für $\alpha, \beta \in \mathbb{Q}$ die Punkte A_α, A_β und F paarweise verschieden sind, sodaß durch obige Zuordnung μ eine Funktion definiert ist. Aus der Definition folgt dann, daß sie bijektiv ist. Die behauptete Ordnungstreue ist gerade die Aussage 1. \square

Ehe wir diese Gitter weiter studieren, sei noch die Situation von Lemma 3.9 etwas weiter untersucht. Eine Hilfsüberlegung sei vorausgeschickt.

Lemma 3.11 Ist $(X_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ eine bezüglich X harmonisch geordnete Folge und $k \in \mathbb{Z}$, so ist durch $\varphi : X_n \mapsto X_{n+k} (n \in \mathbb{Z})$ eine Projektivität bestimmt, die genau X als Fixpunkt hat.

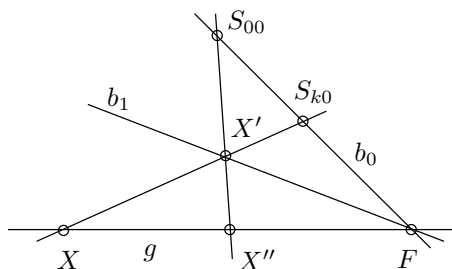


Abbildung 3.3

Beweis: (Siehe Abbildung 3.3.) Wir können die Folge (X_n) mit der Folge (A_n) aus unserer Konstruktion identifizieren. Die Perspektivitätskette (vergl. Fakt 3.6)

$$g(A_0, A_1, F, X) \overset{S_{k,0}}{\wedge} b_1(S_{k,1}, S_{k+1,1}, F, X') \overset{S_{0,0}}{\wedge} g(A_k, A_{k+1}, F, X'')$$

beschreibt offenbar die gewünschte Projektivität φ und hat offensichtlich genau F als Fixpunkt. Da φ eindeutig bestimmt ist, folgt die Behauptung. \square

Lemma 3.12 Für alle $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, r, s \in \mathbb{Z}$ sind die Punkte $(S_{pn+r, qn+s})_{n \in \mathbb{Z}}$ auf einer Geraden durch den Punkt $A_{\frac{p}{q}}$. Die Folge $(S_{pn+r, qn+s})_{n \in \mathbb{Z}}$ ist harmonisch geordnet bezüglich $A_{\frac{p}{q}}$.

Beweis: Es seien $p, q \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}, r, s \in \mathbb{Z}$ und $s \neq 0$. Nach Lemma 3.9 liegen die Punkte $(S_{pn+r, qn})_{n \in \mathbb{Z}}$ auf einer Geraden v , die Punkte $(S_{pn+r, qn+s})_{n \in \mathbb{Z}}$ auf einer Geraden w und bilden dort bezüglich der Schnittpunkte $V := vg$ bzw. $W := wg$ harmonisch geordnete Folgen.

Nun ist

$$\begin{aligned} S_{pn+r, qn} &= a_{pn+r} \vee b_{qn}, \\ S_{pn+r, qn+s} &= a_{pn+r} \vee b_{qn+s}. \end{aligned}$$

Somit erhalten wir die Projektivität

$$\varphi : F(b_{qn}) \xrightarrow{\bar{v}} A_0(a_{pn+r}) \xrightarrow{\bar{w}} F(b_{qn+s}).$$

Sie hat nach Lemma 3.11 genau ein Fixelement, nämlich die Gerade g . Ist andererseits $Z := vw$ der Schnittpunkt und sind a', b' die entsprechenden Büschelgeraden, so ist offenbar

$$\varphi : F(b') \xrightarrow{\bar{v}} A_0(a') \xrightarrow{\bar{w}} F(b').$$

Folglich ist b' Fixelement von φ , also $b' = g$ und der Schnittpunkt $Z := vw$ liegt damit auf g .

Nun wähle $r := 0$: Die Punkte $S_{pn,qn}$ liegen für alle n auf der Geraden $c_{p,q}$, die g im Punkte $A_{\frac{p}{q}}$ trifft. Folglich liegen auch die Punkte $S_{pn,qn+s}$, ($n \in \mathbb{Z}$) auf einer Geraden durch $A_{\frac{p}{q}}$ und mit symmetrischer Argumentation auch die Punkte $S_{pn+r,qn}$, ($n \in \mathbb{Z}$). Nun wende man den obigen Schluß nochmal an und erhält die Behauptung. \square

Für spätere Anwendungen notieren wir die daraus folgende Verallgemeinerung von Fakt 3.6.

Korollar 3.13 Für $r, p, q, \in \mathbb{Z}, q \neq 0$ sind die Punkte $A_{\frac{p}{q}}, S_{p+r,q}, S_{r,0}$ kollinear.

Beweis: Setze in Lemma 3.12 den Parameter $s = 0$ und betrachte die Punkte für $n = 0, 1$. \square

Wir wenden uns nun wieder dem aus den Grundpunkten O, E, F erzeugten rationalen Gitter \mathcal{G} zu.

Satz 3.14 Das rationale Gitter \mathcal{G} liegt dicht in der Punktreihe g , d.h. jedes Segment S in g enthält (mindestens) einen Gitterpunkt.

Beweis: Wir greifen auf die Überlegungen in Kapitel 1 zurück. Das Gitter sei aufgebaut zu dem “ ∞ -Punkt” F und weiteren Grundpunkten O, E . Nach Satz und Definition 3.10 erfüllt dann \mathcal{G} die in Eigenschaft 1.48 geforderten Bedingungen, woraus mit Satz 1.47 die Behauptung folgt. \square

Unter Benutzen des Vollständigkeitsaxioms können wir jetzt die in Satz und Definition 3.10 erklärte Bijektion μ zwischen dem rationalen Gitter und $\mathbb{Q} \cup \{\infty\}$ auf die ganze Punktreihe fortsetzen.

Satz und Definition 3.15 Es seien O, E, F drei Punkte einer Punktreihe g , \mathcal{G} das zugehörige rationale Gitter. Dann läßt sich die in Satz und Definition 3.10 erklärte Funktion

$$\mu : \mathcal{G} \rightarrow \mathbb{Q} \cup \{\infty\}$$

auf genau eine Weise zu einer ordnungstreuen Bijektion

$$\mu : g \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$$

fortsetzen.

Es ist $\mu(0) = 0, \mu(E) = 1, \mu(F) = \infty$. Für einen beliebigen Punkt X auf g heißt $\mu(X)$ die “MÖBIUS-Koordinate” von X bezüglich der Grundpunkte O, E, F .

Die Aussage zur Eindeutigkeit können wir auch so formulieren:

Satz 3.16 Die MÖBIUS-Koordinaten-Funktion μ zu den Grundpunkten O, E, F ist die einzige ordnungstreu Funktion $g \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ mit $\mu(O) = 0, \mu(E) = 1, \mu(F) = \infty$ und der Eigenschaft, daß

$$\mu(P) = \frac{1}{2}(\mu(X) + \mu(Y)),$$

wenn (X, P, Y, F) einen harmonischen Wurf bilden.

Beweis: Daß die MÖBIUS-Koordinaten diese Mittelpunktseigenschaft haben, folgt aus Satz und Definition 3.10 zusammen mit der Stetigkeit (bzgl. der durch die Ordnungen gegebenen Topologien.)

Umgekehrt folgt aus dieser Eigenschaft, daß die Punkte mit rationalen μ -Werten notwendig das rationale Gitter zu O, E, F bilden, womit dann über die Ordnungstreu die Behauptung folgt. Haben nämlich für ein $n \in \mathbb{Z}$ die Punkte A_{n-1} und A_n die Koordinaten $\mu(A_{n-1}) = n - 1, \mu(A_n) = n$, (für $n = 1$ sind O und E solche Punkte) und ist (A_{n-1}, A_n, X, F) harmonisch, so ist

$$\begin{aligned} \mu(A_n) &= \frac{1}{2}(\mu(A_{n-1}) + \mu(X)) \text{ also} \\ \mu(X) &= 2\mu(A_n) - \mu(A_{n-1}) = 2n - n + 1 = n + 1. \end{aligned}$$

Die Punkte mit ganzzahligen μ -Werten bilden also eine bezüglich F harmonisch geordnete Folge zu O, E , woraus sich dann die ganze Konstruktion zwangsläufig wiederholt. \square

Analoges gilt natürlich für die Bildung von MÖBIUS-Koordinaten in Strahlen - und Ebenenbüscheln.

MÖBIUS-Koordinaten und Projektivitäten.

Auf einer Punktreihe g bezeichne μ die MÖBIUS-Koordinaten zu den Grundpunkten O, E, F , entsprechend μ' die MÖBIUS-Koordinaten zu O', E', F' auf einer Punktreihe g' . Mit der Projektivität

$$\varphi : g(O, E, F) \bar{\wedge} g'(O', E', F')$$

hat die Abbildung

$$\nu := \mu' \circ \varphi, \quad \nu(X) := \mu'(\varphi(X))$$

offenbar folgende Eigenschaften:

$$\begin{aligned} \nu(O) &= \mu'(\varphi(O)) = \mu'(O') = 0 \\ \nu(E) &= \mu'(\varphi(E)) = \mu'(E') = 1 \\ \nu(F) &= \mu'(\varphi(F)) = \mu'(F') = \infty \end{aligned}$$

Liegen ferner X, P, Y, F harmonisch, so auch $\varphi(X), \varphi(P), \varphi(Y), \varphi(F)$ und, da $\varphi(F) = F'$ ist, ist dann nach Satz 3.16

$$\mu'(\varphi(P)) = \frac{1}{2}(\mu'(\varphi(X)) + \mu'(\varphi(Y))),$$

d.h.

$$\nu(P) = \frac{1}{2}(\nu(X) + \nu(Y)).$$

Da schließlich Projektivitäten ordnungstreu Bijektionen sind, folgt mit Satz 3.16, daß $\nu = \mu$. Wir haben somit

Satz 3.17 Ist

$$\varphi : g(O, E, F) \bar{\wedge} g'(O', E', F')$$

projektiv, so gilt für die MÖBIUS-Koordinaten μ zu O, E, F bzw. μ' zu O', E', F' die Relation

$$\mu = \mu' \circ \varphi.$$

Wenn wir also die Grundpunkte der Koordinatensysteme der Projektivität geeignet anpassen, ändern sich die MÖBIUS-Koordinaten unter einer Projektivität nicht.

Interessanter ist die Frage, wie sich die MÖBIUS-Koordinaten bezüglich fest gewählter Systeme unter beliebigen Projektivitäten verhalten.

Dazu untersuchen wir zunächst folgende Aufgabe:

Es sei g eine Punktreihe, darauf μ die MÖBIUS-Koordinaten zu den Grundpunkten O, E, F , ferner

$$\varphi : g(O, E, F) \bar{\wedge} g(O', E', F')$$

projektiv. Bestimme $\mu(\varphi(X))$ als Funktion von $\mu(X)$.

Hierfür behandeln wir drei besonders einfache Projektivitäten.

Lemma 3.18 (Vertauschen von O und F) Für die Projektivität

$$\sigma : g(O, E, F) \bar{\wedge} g(F, E, O)$$

ist

$$\mu(\sigma(X)) = \frac{1}{\mu(X)}.$$

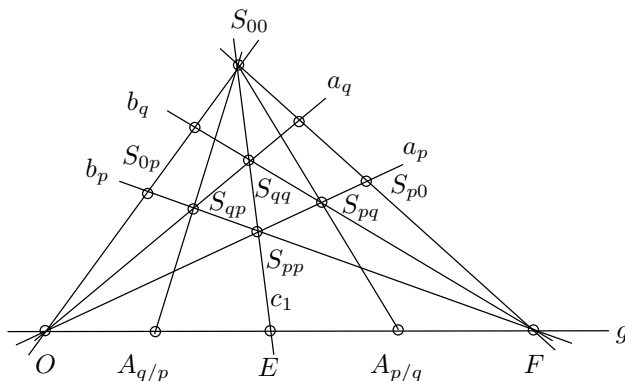


Abbildung 3.4

Beweis: Siehe Abbildung 3.4. Die Projektivität σ ist die harmonische Spiegelung an $E = A_1$ und A_{-1} . Für beliebiges $p, q \in \mathbb{Z}, \neq 0$ läßt sie sich durch folgende Schnitt/Schein Kette realisieren:

$$\begin{aligned} g(O, E, F, A_{\frac{q}{p}}) & \stackrel{S_{0,0}}{\bar{\wedge}} a_p(O, S_{p,p}, S_{p,0}, S_{p,q}) \\ & \stackrel{F}{\bar{\wedge}} c_1(E, S_{p,p}, S_{0,0}, S_{q,q}) \\ & \stackrel{O}{\bar{\wedge}} b_p(F, S_{p,p}, S_{0,p}, S_{q,p}) \\ & \stackrel{S_{0,0}}{\bar{\wedge}} g(F, E, O, A_{\frac{q}{p}}). \end{aligned}$$

Damit ist $\sigma(A_{\frac{q}{p}}) = A_{\frac{q}{p}}$ und, da p, q ja beliebig waren, somit für alle Punkte des rationalen Gitters

$$\mu(\sigma(X)) = \frac{1}{\mu(X)}.$$

Über die Ordnungstreue folgt dann die Behauptung für beliebige Punkte. \square

Lemma 3.19 (Verändern der Eins) Für die Projektivität

$$\lambda : g(O, E, F) \bar{\wedge} g(O, E', F)$$

ist

$$\mu(\lambda(X)) = \mu(E')\mu(X).$$

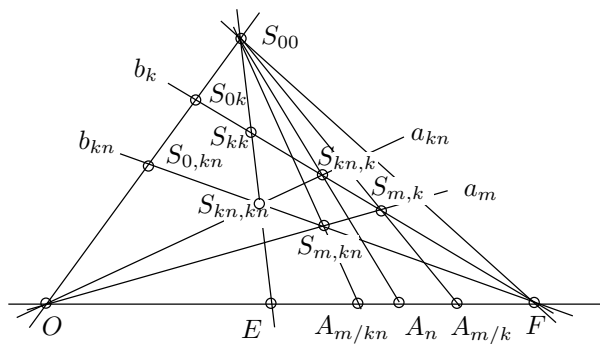


Abbildung 3.5

Beweis: Siehe Abbildung 3.5. Zunächst betrachten wir den Fall, daß $n := \mu(E') \in \mathbb{Z} (\neq 0)$, d.h. $E' = A_n$. Eine beliebige rationale Zahl $\alpha \in \mathbb{Q}, \neq 0$ stellen wir dar als $\alpha = \frac{m}{kn}$ mit $m, k \in \mathbb{Z}$. Dann läßt sich λ über folgende Kette realisieren:

$$g(O, E, F, A_{\frac{m}{kn}}) \xrightarrow{S_{0,0}} \bar{\wedge} b_{kn}(S_{0,kn}, S_{kn,kn}, F, S_{m,kn})$$

$$\xrightarrow{O} \bar{\wedge} b_k(S_{0,k}, S_{kn,k}, F, S_{m,k})$$

$$\xrightarrow{S_{0,0}} \bar{\wedge} g(O, A_n, F, A_{\frac{m}{k}}).$$

Für beliebige Gitterpunkte X bewirkt also λ in Koordinaten die Multiplikation mit $n \in \mathbb{Z}$. Mit dem "Stetigkeitsargument" wie oben folgt dies dann auch für beliebige Punkte von g .

Wendet man λ^{-1} an, so bewirkt dies offenbar die Division mit n , sodaß also durch Kombination unsere Behauptung für beliebige Gitterpunkte E' bewiesen ist. Mit dem Stetigkeitsargument folgt dann die Behauptung allgemein. \square

Lemma 3.20 (Translation) Für die Projektivität

$$\tau : g(O, E, F) \bar{\wedge} G(O', E', F),$$

wobei $\mu(E') = \mu(O') + 1$ ist, gilt

$$\mu(\tau(X)) = \mu(X) + \mu(O').$$

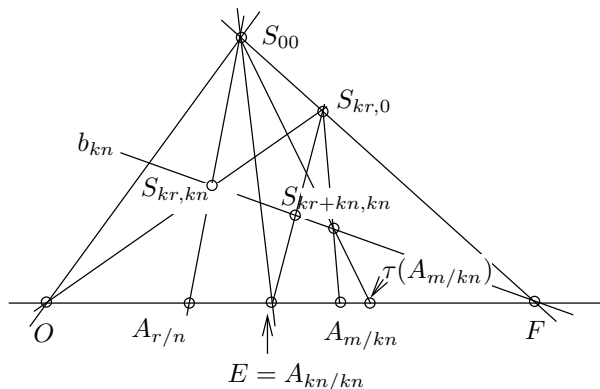


Abbildung 3.6

Beweis: Siehe Abbildung 3.6. Zunächst sei $O' = A_{\frac{r}{n}}$ und damit $E' = A_{\frac{r+n}{n}}$. Eine beliebige rationale Zahl α stellen wir wieder dar als $\alpha = \frac{m}{kn}$ mit $m, k \in \mathbb{Z}$. Dann kann man unter Benutzen von Korollar 3.13 die Projektivität τ folgendermaßen realisieren:

$$\begin{aligned}
 g(O, E, F, A_{\frac{m}{kn}}) &\stackrel{S_{kr,0}}{\bar{\wedge}} b_{kn}(S_{kr,kn}, S_{kr+kn,kn}, F, S_{m+kr,kn}) \\
 &\stackrel{S_{0,0}}{\bar{\wedge}} g(A_{\frac{r}{n}}, A_{\frac{r+n}{n}}, F, A_{\frac{m}{kn} + \frac{r}{n}}) \\
 &= g(O', E', F, A_{\frac{m}{kn} + \frac{r}{n}}).
 \end{aligned}$$

Also ist für beliebige Gitterpunkte

$$\mu(\tau(A_{\frac{m}{kn}})) = \mu(A_{\frac{m}{kn} + \frac{r}{n}}) = \frac{m}{kn} + \frac{r}{n} = \mu(A_{\frac{m}{kn}}) + \mu(O').$$

Mit dem Stetigkeitschluß überträgt sich dies wieder auf alle Punkte von g . □

Für diese drei in Lemma 3.18, Lemma 3.19 und Lemma 3.20 behandelten speziellen Projektivitäten φ haben wir also jeweils

$$\mu(\varphi(X)) = f(\mu(X)),$$

wobei f eine “gebrochen lineare” Funktion ist, d.h. vom Typ

$$f(x) = \frac{ax + b}{cx + d} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0.$$

Dafür zeigt man leicht durch Nachrechnen

Fakt 3.21 Die gebrochen linearen Funktionen bilden bezüglich des Hintereinanderausführens eine Gruppe.

Nun können wir allgemeine Projektivitäten behandeln.

Eine Projektivität φ sei gegeben durch

$$\varphi : g(O, E, F) \bar{\wedge} g(O', E', F').$$

Wir zerlegen φ in mehrere Teilabbildungen

$$\begin{aligned} \varphi : g(O, E, F) & \stackrel{\tau_1}{\bar{\wedge}} g(O', E_1, F) \\ & \stackrel{\sigma_1}{\bar{\wedge}} g(F, E_1, O') \\ & \stackrel{\tau_2}{\bar{\wedge}} g(F', E_2, O') \\ & \stackrel{\sigma_2}{\bar{\wedge}} g(O', E_2, F') \\ & \stackrel{\lambda}{\bar{\wedge}} g(O', E', F'). \end{aligned}$$

(Überlegen Sie selbst, was man tun kann, wenn Sonderfälle wie $O' = F$ etc. auftreten.)

Hierbei sind jeweils $\tau_i, \sigma_i, \lambda$ von den in den vorigen Lemmata behandelten Typen, sodaß sie in Koordinaten durch gebrochen lineare Funktionen beschrieben werden. Nach Fakt 3.21 gilt dies dann auch für φ selbst. Damit haben wir schon die Hauptarbeit für den Beweis des folgenden Satzes gezeigt:

Satz 3.22 *Projektivitäten werden in MÖBIUS-Koordinaten genau durch gebrochen lineare Funktionen (mit nicht verschwindender Determinante) dargestellt. Dies bedeutet:*

1. Sind g, g' Grundgebilde erster Stufe mit MÖBIUS-Koordinaten μ bzw. μ' , so besitzt jede Projektivität

$$\varphi : g(O, E, F) \bar{\wedge} g'(O', E', F')$$

eine Darstellung

$$\mu'(\varphi(X)) = \frac{a\mu(X) + b}{c\mu(X) + d} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0.$$

2. Bei gegebenen Koordinaten μ, μ' bestimmt jede Formel

$$\mu'(\varphi(X)) = \frac{a\mu(X) + b}{c\mu(X) + d} \text{ mit } a, b, c, d \in \mathbb{R}, \quad ad - bc \neq 0$$

eine Projektivität $\varphi : g \bar{\wedge} g'$.

Beweis:

1. Für den Fall, daß $g = g'$ und $\mu = \mu'$ ist, haben wir oben schon 1. gezeigt. Sind im allgemeinen Fall O, E, F die Grundpunkte zu μ und O', E', F' die zu μ' , so betrachte man zunächst die Projektivität $\varphi_1 : g(O, E, F) \bar{\wedge} g'(O', E', F')$. Dafür ist nach Satz 3.17 dann $\mu'(\varphi_1(X)) = \mu(X)$. Dann zerlege man $\varphi = \varphi_2 \circ \varphi_1$, wobei man nun auf φ_2 den Spezialfall anwenden kann.
2. Wegen $ad - bc \neq 0$ sind die Größen $\frac{b}{d}, \frac{a+b}{c+d}, \frac{a}{c}$ paarweise verschieden. Als Werte von MÖBIUS-Koordinaten unter μ' legen sie damit drei Punkte O', E', F' fest und diese wiederum eine Projektivität

$$\varphi : g(O, E, F) \bar{\wedge} g'(O', E', F').$$

Nun rechnet man leicht nach, daß diese Projektivität gerade die vorgegebene Funktion als Darstellung besitzt. \square

Mit diesem Satz ist auch die Frage nach Koordinatentransformation gelöst.

Satz und Definition 3.23 (Doppelverhältnis) Sind O, E, F sowie O', E', F' jeweils Grundpunkte für MÖBIUS-Koordinaten μ bzw. μ' , so gilt für jeden Punkt X :

$$\mu'(X) = \frac{\mu(X) - \mu(O')}{\mu(X) - \mu(F')} : \frac{\mu(E') - \mu(O')}{\mu(E') - \mu(F')}.$$

Der rechtsstehende Ausdruck heißt das “Doppelverhältnis” der vier Punkte X, O', E', F' . Man schreibt dafür $DV(X, O', E', F')$.

Beweis: Nach Satz 3.17 gilt für die Projektivität

$$\varphi : g(O, E, F) \bar{\wedge} g'(O', E', F')$$

die Darstellung

$$\mu'(X) = \mu(\varphi^{-1}(X))$$

und diese ist nach Satz 3.22 von der Gestalt

$$\mu(\varphi^{-1}(X)) = f(\mu(X))$$

mit einer gebrochen linearen Funktion f .

Das Doppelverhältnis ist ein Ausdruck von dieser Form und liefert für die Punkte O', E', F' die richtigen Werte für die MÖBIUS-Koordinaten μ' . Damit muß es der richtige Ausdruck sein. \square

In dem Ausdruck für das Doppelverhältnis steht links die Möbius-Koordinate eines Punktes bezogen auf die Grundpunkte O', E', F' , während die MÖBIUS-Koordinaten μ zu den Grundpunkten O, E, F nur rechts auftauchen. Folglich ist der rechts stehende Ausdruck, also das Doppelverhältnis, gar nicht von der konkreten Wahl der MÖBIUS-Koordinaten μ , d.h. von deren Grundpunkten O, E, F abhängig. Damit haben wir

Satz 3.24 *Das Doppelverhältnis von vier Punkten ist unabhängig von den verwendeten MÖBIUS-Koordinaten und damit invariant unter Koordinatentransformation und invariant unter Projektivitäten.*

Schließlich erhalten wir damit eine Charakterisierung harmonischer Würfe durch ihr Doppelverhältnis:

Satz 3.25 *Vier Punkte A, B, C, D bilden genau dann einen harmonischen Wurf, wenn für ihr Doppelverhältnis gilt:*

$$DV(A, B, C, D) = -1.$$

Beweis: Mit $-E := \mu^{-1}(-1)$ bilden bekanntlich die Punkte $-E, O, E, F$ einen harmonischen Wurf und da bezüglich der Grundpunkte O, E, F der Punkt $-E$ die Koordinate -1 hat, (so ist er ja definiert!) ist also $DV(-E, O, E, F) = -1$. Vier Punkte bilden aber genau dann einen harmonischen Wurf, wenn sie sich projektiv auf einen gegebenen harmonischen Wurf, also etwa $-E, O, E, F$ beziehen lassen. Da das Doppelverhältnis unter Projektivitäten invariant ist, ist damit die Behauptung gezeigt. \square

Für spätere Verwendung rechnen wir noch folgendes

Beispiel 3.26 *Auf einer Geraden g seien μ MÖBIUS-Koordinaten zu O, E, F , ferner zu Punkten $A, B (\neq F)$ jeweils σ_{AF}, σ_{BF} die zu diesen Fixpunkten gehörenden harmonischen Spiegelungen und $\tau := \sigma_{AF}\sigma_{BF}$. Dann ist für X auf g*

$$\begin{aligned} \mu(\sigma_{AF}(X)) &= -\mu(X) + 2\mu(A), \\ \mu(\tau(X)) &= \mu(X) + 2(\mu(A) - \mu(B)) \end{aligned}$$

d.h. $\tau(X)$ ist eine “Translation”.

Beweis: Zur Bestimmung von $\mu(\sigma_{AF}(X))$ setze man nach Satz 3.22 an

$$\mu(\sigma_{AF}(X)) = \frac{a\mu(X) + b}{c\mu(X) + d}.$$

Die Forderung, daß F ein Fixpunkt sei, liefert $c = 0$ und dann ohne Einschränkung $d = 1$. Die Forderung, daß A Fixpunkt sei, liefert $\mu(A) = a\mu(A) + b$ und mit Satz 3.25 über das Doppelverhältnis bei harmonischen Würfeln berechnet man daraus a und b . Hintereinanderschalten liefert die Aussage über $\mu(\tau(X))$. \square

Daß bei der Bildung der MÖBIUS-Koordinaten der Koordinatenwert ∞ auftaucht, ist ein Spiegel davon, daß die projektive Gerade eben noch einen (Fern-) Punkt "mehr" hat, als die Euklidische Gerade. Dieses Auftreten von uneigentlichen Zahlen als Koordinaten kann man vermeiden durch Benutzen der sog. "homogenen Koordinaten".

In Kapitel 1 hatten wir die reelle projektive Gerade dargestellt als die Gesamtheit aller eindimensionalen linearen Unterräume des \mathbb{R}^2 . Jeder projektive Punkt entspricht dann einem solchen Unterraum und der ist wieder festgelegt durch ein beliebiges seiner Elemente $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$, sofern es nur $\neq (0, 0)$ ist. Damit spannen (ξ_1, ξ_2) und (η_1, η_2) den selben Unterraum auf, d.h. stellen also den selben projektiven Punkt dar, genau wenn beide $\neq (0, 0)$ sind und mit einem Faktor $\lambda \neq 0$ gilt, daß $(\xi_1, \xi_2) = (\lambda\eta_1, \lambda\eta_2)$. Dafür schreiben wir auch

$$(\xi_1 : \xi_2) = (\eta_1 : \eta_2),$$

wobei eben diese Schreibweise ausdrückt, daß es sich um "homogene" Vektoren handelt, deren Komponenten nur bis auf einen gemeinsamen Faktor $\neq 0$ festgelegt sind. Wir gewinnen die homogenen Koordinaten direkt aus den MÖBIUS-Koordinaten und zwar auf eine Weise, wie sie für die Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen besonders geeignet ist. Bleiben wir dazu wieder auf einer Punktreihe g , von der ja alles direkt auch auf Büschel übertragen werden kann.

Gegeben seien 3 Punkte A, E, B . Es bezeichne dazu μ_{AB} bzw. μ_{BA} die MÖBIUS-Koordinaten mit

$$\begin{aligned} \mu_{AB}(A) = 0 & \quad , \quad \mu_{AB}(E) = 1 & \quad , \quad \mu_{AB}(B) = \infty & \quad \text{beziehungsweise} \\ \mu_{BA}(A) = \infty & \quad , \quad \mu_{BA}(E) = 1 & \quad , \quad \mu_{BA}(B) = 0. \end{aligned}$$

Bei beiden ist also E der Einheitspunkt, während die im Index stehenden Punkte in der dortigen Reihenfolge den 0-Punkt und den ∞ -Punkt bezeichnen.

Da wir nur eine 1-dimensionale Punktmenge zu charakterisieren haben, muß zwischen den Werten von $\mu_{AB}(X)$ und $\mu_{BA}(X)$ eine Relation bestehen, und in der Tat haben wir in Lemma 3.18 schon die Formel

$$\mu_{AB}(X) \cdot \mu_{BA}(X) = 1$$

abgeleitet.

Definition 3.27 Ein homogener Vektor $(\xi_A : \xi_B)$ heißt "homogener Koordinatenvektor" für einen Punkt X bezüglich eines Koordinatensystems A, E, B , wenn

$$\frac{\xi_B}{\xi_A} = \mu_{AB}(X), \quad \frac{\xi_A}{\xi_B} = \mu_{BA}(X).$$

Wegen der eben festgestellten Reziprozität von μ_{AB} und μ_{BA} folgt hier natürlich jeweils die eine Formel aus der anderen, für die Verallgemeinerung auf höhere Dimensionen ist diese symmetrische Darstellung aber der richtige Ausgangspunkt. Für Punkte $X \neq A, B$ ist etwa

$$(1 : \mu_{AB}(X)) = (\mu_{BA}(X) : 1)$$

eine solche Darstellung, ferner erhält man die homogenen Koordinaten

$$\begin{aligned} (1 : 0) & \text{ für } A, \\ (0 : 1) & \text{ für } B, \\ (1 : 1) & \text{ für } E. \end{aligned}$$

Projektivitäten werden in MÖBIUS-Koordinaten durch gebrochen lineare Funktionen dargestellt. In homogenen Koordinaten wird dies bequemer.

Satz 3.28 *In homogenen Koordinaten werden Projektivitäten dargestellt durch reguläre 2×2 -Matrizen, wobei zwei Matrizen genau dann die selbe Projektivität darstellen, wenn sie sich nur um einen skalaren Faktor unterscheiden.*

Beweis: Es sei φ eine Projektivität, ferner seien A, E, B die Grundpunkte des Systems, und

$$\begin{aligned} A' & := \varphi(A) & \text{ mit homogenen Koordinaten } & (\alpha_A : \alpha_B), \\ E' & := \varphi(E) & \text{ mit homogenen Koordinaten } & (\epsilon_A : \epsilon_B), \\ B' & := \varphi(B) & \text{ mit homogenen Koordinaten } & (\beta_A : \beta_B). \end{aligned}$$

A' und B' sind verschiedene Punkte, also sind ihre homogenen Koordinatenvektoren linear unabhängig. Damit gibt es - bis auf einen gemeinsamen Faktor $\lambda \neq 0$ - eindeutig bestimmte Zahlen λ_1, λ_2 , sodaß

$$(\epsilon_A, \epsilon_B) = \lambda_1(\alpha_A, \alpha_B) + \lambda_2(\beta_A, \beta_B).$$

Die Matrix

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} \lambda_1 \alpha_A & \lambda_2 \beta_A \\ \lambda_1 \alpha_B & \lambda_2 \beta_B \end{pmatrix}$$

leistet dann das Gewünschte; denn durch Einsetzen sieht man sofort, daß sie die homogenen Koordinaten für die Grundpunkte A, E, B in solche für deren Bilder A', E', B' transformiert. Ferner ist für einen allgemeinen Punkt X mit homogenen Koordinaten $(\mu_{BA}(X) : 1)$ dann

$$\mathcal{A} \cdot \begin{pmatrix} \mu_{BA}(X) \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \alpha_A \mu_{BA}(X) + \lambda_2 \beta_A \\ \lambda_1 \alpha_B \mu_{BA}(X) + \lambda_2 \beta_B \end{pmatrix},$$

sodaß der Quotient dieser beiden Komponenten eine gebrochen lineare Funktion in der MÖBIUS-Koordinate $\mu_{BA}(X)$ ist, also die MÖBIUS-Koordinate eines projektiven Bildes von X . Da aber bei drei Punkten der gewünschte Wert herauskommt, muß es sich um die "richtige" Projektivität handeln.

Aus der ganzen Ableitung geht hervor, daß die Matrix \mathcal{A} bis auf einen Faktor $\lambda \neq 0$ eindeutig bestimmt ist.

Beginnt man umgekehrt mit einer regulären Matrix

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

und setzt

$$\begin{pmatrix} \alpha_A \\ \alpha_B \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_A \\ \beta_B \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \epsilon_A \\ \epsilon_B \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \alpha_{11} + \alpha_{12} \\ \alpha_{21} + \alpha_{22} \end{pmatrix}$$

und verfährt dann wie eben, so erhält man offenbar die Ausgangsmatrix wieder zurück, womit unser Satz vollständig gezeigt ist. \square

Die volle Bedeutung der homogenen Koordinaten wird sich erst im mehrdimensionalen Fall deutlich erweisen.

Messen und Skalen

Messen

Zur euklidischen Geometrie gehört untrennbar der Begriff des Messens von Strecken und Winkeln durch Vergleichen mit einer Einheitsstrecke (Stab) bzw. einem Einheitswinkel (Keil) .

Eine Strecke AB hat dann die Länge 3, wenn ich durch dreifaches Abtragen der Einheitsstrecke von A nach B komme, d.h. Anlegen an A bringt mich nach A_1 , Anlegen an A_1 nach A_2 und Anlegen an A_2 nach B . (Siehe Abbildung 3.7.)

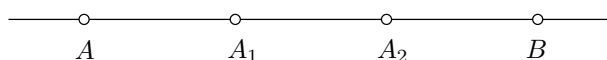


Abbildung 3.7

Daß sich der Maßstab beim Bewegen in die verschiedenen Positionen nicht ändert, scheint so selbstverständlich, daß man nicht darüber redet.

Denken wir uns folgende Situation: Von einem festen erhöhten Standpunkt aus beobachten wir einen Meßtrupp, der die lange gerade Trasse für eine neue Eisenbahn ausmisst. Nach obigen Überlegungen müßten wir eigentlich energisch protestieren; denn je weiter sich der Trupp von uns entfernt, umso kürzer wird die Meßlatte, mit der sie arbeiten - wir gehen einmal davon aus, daß die moderne Technik hier noch nicht angekommen sei. Das selbe Phänomen gilt für Winkel, etwa die Speichen eines Fahrrades perspektivisch betrachtet.

Wir protestieren aber nicht, sondern erst dann, wenn etwa uns der Stab plötzlich krumm erschiene oder bei einem mitgeführten Meßgerät aus Stangen sich plötzlich die Verbindungen ändern würden etc.

Fazit: Wir akzeptieren trotz beobachtbarer Veränderungen das Meßgerät als konstant bleibend, wenn bei den mit ihm ausgeführten *Bewegungen*

- *Gerades gerade bleibt,*
- *Inzidenz von Punkten und Geraden (evtl. Ebenen) erhalten bleibt und*
- *alles perspektivisch richtig erscheint.*

Dies führt dazu den Begriff Messen so zu verstehen:

Messen bedeutet:

- *Festlegen einer Einheitsstrecke bzw. eines Einheitswinkels*
- *Abtragen dieser Einheitsgröße an dem zu messenden Objekt, d.h. diese Größe sukzessive geeignet an neue Orte zu "bewegen".*

Bewegen bedeutet:

- *Abbilden mittels einer Projektivität, die gewisse Objekte festläßt (etwa den Fluchtpunkt unserer Eisenbahntrasse.)*

Die hierbei verwendeten Bewegungen sollen natürlich eine Gruppe bilden; denn das Hintereinanderausführen von zwei solchen Bewegungen soll offenbar wieder eine solche sein und ebenso das Rückgängigmachen einer Bewegung.

Diese Anschauung von Messen wurde vorbereitet etwa durch CH.V.STAUDT (1798 - 1867), dann klar gefaßt von FELIX KLEIN in seinem *Erlanger Programm* (1872). Er hat folgenden Weg eingeschlagen:

Wähle eine Untergruppe \mathcal{B} aller Projektivitäten und nenne diese ausgewählten Projektivitäten "Bewegungen" oder "Kongruenzabbildungen". Erkläre zwei Gebilde als "kongruent", wenn sie durch eine Kongruenzabbildung ineinander überführt werden können. Kongruente Strecken und Winkel, d.h. Segmente auf Punktreihen und in Büscheln nennen wir "gleich groß".

Dies ist ein gegenüber der Schulgeometrie radikal anderer Ansatz. Dort sind Längen und Winkel als Maß-Größen vorausgesetzt und daraus wird Kongruenz eingeführt.

Hier entsteht Messen aus dem Kongruenzbegriff, den wir durch Wahl einer Gruppe festlegen. Ob wir mit diesem Verfahren einen sinnvollen Begriff von Messen und Kongruenz erreichen, hängt natürlich von der gewählten Gruppe ab: Nehmen wir z.B. als Bewegungen *alle* Projektivitäten einer Geraden in sich, so kann man nach dem Fundamentalsatz sicher jedes Segment in jedes überführen, d.h. je zwei Strecken sind gleich groß - eine nicht sehr sinnvolle Angelegenheit. Wir haben also insbesondere zunächst geeignete Gruppen von Projektivitäten aufzusuchen.

Orientieren wir uns zunächst an der Situation im Euklidischen, den üblichen Abstands begriff voraussetzend.

Die für unser Konzept von Messen typische Bewegung ist die Translation τ_d , die angewendet auf ein Meßgerät dieses um eine Distanz d weiterschiebt, unabhängig davon, wo wir angesetzt haben.

In Lemma 3.11 und Lemma 3.20 sind solche Abbildungen schon als Projektivitäten aufgetreten. Wir wissen, daß diese Translationen eine abelsche Gruppe bilden, wobei noch $\tau_a\tau_b = \tau_{a+b}$.

Offenbar kann man jede Translation aus zwei Spiegelungen auf der Euklidischen Geraden zusammensetzen, deren Zentren gerade um $\frac{d}{2}$ auseinander sind, (siehe Abbildung 3.8), also $\tau_d = \sigma_B\sigma_A$, wobei B um $\frac{d}{2}$ rechts von A .

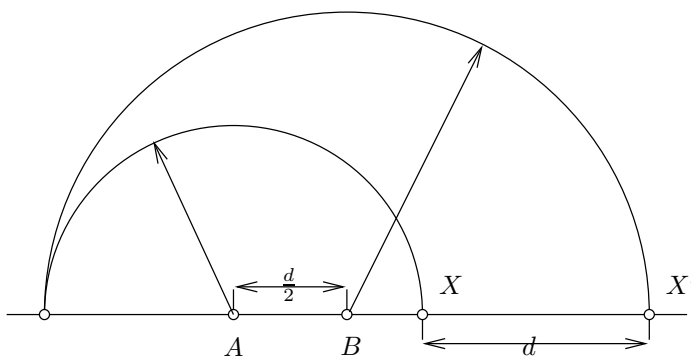


Abbildung 3.8

Das Analoge im Büschel ist die Drehung τ_ψ um einen Winkel ψ . (Siehe Abbildung 3.9.) Auch diese bilden eine abelsche Gruppe, für die wieder $\tau_\varphi\tau_\psi = \tau_{\varphi+\psi}$. Auch jede Drehung kann man aus zwei Spiegelungen zusammensetzen.

Was steht projektiv gedacht dahinter?

Die bei den Translationen auf der Geraden benutzte euklidische Spiegelung σ_A mit Zentrum A ist die harmonische Spiegelung an dem Paar (A, F) , wobei F der Fernpunkt der Geraden g ist. Damit können wir sagen:

Translationen sind die Produkte von je zwei harmonischen Spiegelungen, von deren Fixpunkten (A, F) der Fixpunkt F für alle gleich fest fixiert ist. Dies steht nach Beispiel 3.26 im Einklang mit den bisher eingeführten projektiven Begriffen.

Im Büschel ist die Euklidische Spiegelung an einer Geraden a dasselbe wie die harmonische Spiegelung an dem Paar (a, a') , wobei a' die auf a senkrecht stehende Büschel-Gerade ist. Ferner wissen wir, daß das "Aufeinandersenkrechtstehen" eine elliptische Involution η in diesem Büschel beschreibt. Somit können wir sagen:

Drehungen sind Produkte von je zwei harmonischen Spiegelungen, deren Fixstrahlen (a, a') ein Paar einer auf dem Büschel festgewählten elliptischen Involution η sind. Offensichtlich ist, daß wir bei η nicht auf die "Rechtwinkel-Involution" beschränkt sind, sondern allgemeiner von irgendeiner elliptischen Involution ausgehen können. Aber was geschieht, wenn man η hyperbolisch wählt? Wir werden sehen, daß dies ebenfalls zu einem vernünftigen Begriff von "Messen" führt, den wir zwar in der

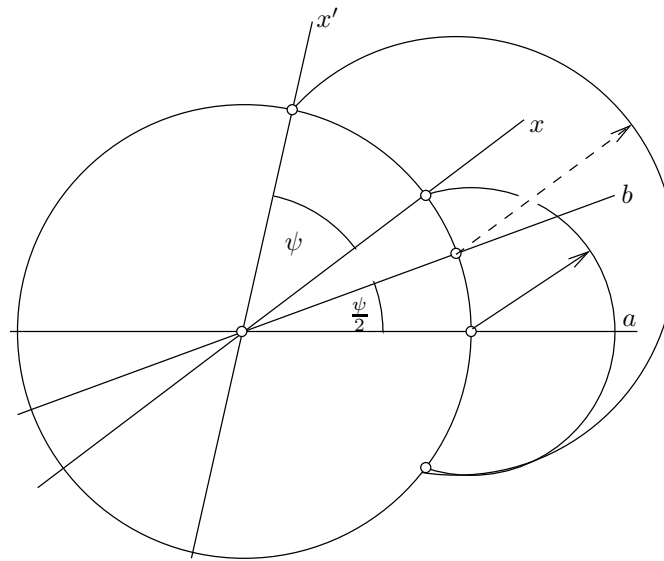


Abbildung 3.9

Euklidischen Welt nicht unmittelbar anzuwenden pflegen, der aber etwa für das Messen relativistischer Geschwindigkeiten taugt.

Wenn man diese Gedanken systematisch verfolgt, erhält man 6 Fälle, je drei auf Punktreihen und drei auf Büscheln. Eine weitgehend einheitliche und elegante Behandlung gelingt, wenn wir zunächst als Grundgebilde eine Kurve Q zweiter Ordnung heranziehen. Involutionspaare auf Q lassen sich simpel über das Zentrum darstellen und dies wollen wir zunächst nutzen.

Skalen

Zunächst haben wir also nach dem KLEINSchen Ansatz geeignete Gruppen von Projektivitäten festzulegen, die als Kongruenzabbildungen taugen. Nach unseren Vorüberlegungen werden wir sie aus gewissen harmonischen Spiegelungen erzeugen.

Vereinbarung 3.29 Für das Weitere bezeichne Q eine Kurve zweiter Ordnung und dazu (G, g) ein polares Paar. Dabei darf G auf g liegen.

Bezeichnung 3.30 Zwei Punkte X, X' auf Q heißen “konjugiert bezüglich G ” oder kurz “ G -konjugiert”, wenn X, X' und G kollinear sind. Wenn nötig unterscheiden wir die drei Fälle:

- G liegt auf Q : “parabolisch”,
- G ist innerer Punkt von Q : “elliptisch”,
- G ist äußerer Punkt von Q : “hyperbolisch”.

Ist G nicht auf Q , so sind G -konjugierte Punkte X, X' offenbar genau die Paare der Involution η_G auf Q zum Zentrum G . Ist G auf Q , so ist jeder Punkt $X \in Q (\neq G)$ zu G konjugiert.

Satz 3.31 Zwei Punkte A, A' auf Q sind genau dann G -konjugiert, wenn das Zentrum P der harmonischen Spiegelung $\sigma_{AA'}$ auf Q ein Punkt der Polaren g ist. Als Zentrum einer hyperbolischen Involution ist P ein äußerer Punkt bezüglich Q .

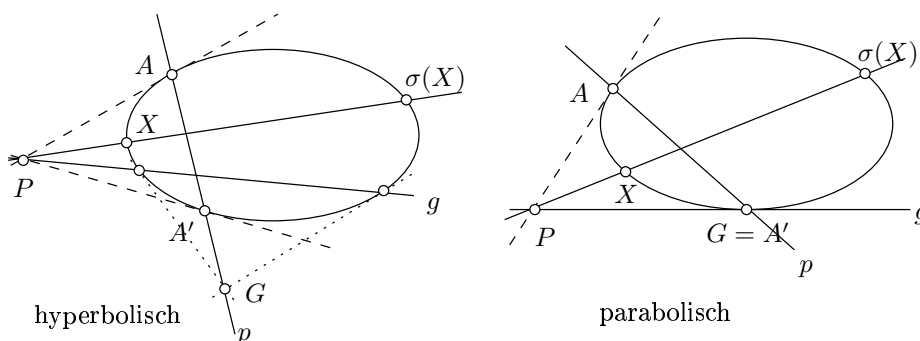


Abbildung 3.10

Beweis: Abbildung 3.10 zeigt die Situation im hyperbolischen und im parabolischen Fall. Für einen äußeren Punkt P trifft die Polare p die Kurve \mathcal{Q} in zwei Punkten A, A' und dies sind die Fixpunkte der entsprechenden Involution, d.h. von $\sigma_{AA'}$. Da P auf g liegt, geht p durch G , sodaß A, A' eben G -konjugiert sind. Die Umkehrung geht analog. \square

Dieses Spiegeln an G -konjugierten Punkten nehmen wir nun, um die Kongruenzabbildungen zu erzeugen.

Bezeichnung 3.32 Wir nennen

- die Spiegelungen an G -konjugierten Punkten kurz “ G -Spiegelungen”,
- die Produkte von je zwei G -Spiegelungen kurz “ G -Translationen”,
- die von den G -Spiegelungen erzeugte Gruppe \mathcal{K} von Projektivitäten die Gruppe der “ G -Kongruenzen”, darin
- die von den G -Translationen erzeugte Untergruppe \mathcal{B} die Gruppe der “ G -Bewegungen”.

Dafür gilt

Satz 3.33 1. G -Spiegelungen sind ungleichsinnig, G -Bewegungen, insbesondere G -Translationen sind gleichsinnig.

2. Jede G -Bewegung, insbesondere jede G -Translation hat die Polare g als Perspektivitätsachse.
3. Jede G -Bewegung hat die Schnittpunkte von g mit \mathcal{Q} als Fixpunkte. Im hyperbolischen Fall werden die beiden von diesen Fixpunkten erzeugten Segmente durch Bewegungen jeweils auf sich abgebildet.
4. Zu je zwei Punkten X, X' auf \mathcal{Q} , die nicht auf g und im hyperbolischen Fall im selben der in 3. genannten Segmente liegen, gibt es genau eine G -Translation τ , für die $\tau(X) = X'$.
5. Zu einer G -Translation τ und einer G -Spiegelung σ_1 gibt es stets eine G -Spiegelung σ_2 , sodaß $\tau = \sigma_2\sigma_1$.
6. Die Gruppe \mathcal{B} der Bewegungen besteht genau aus den Translationen. Sie ist abelsch.

Beweis:

1. Trivial

2. Es seien σ_1, σ_2 zwei G -Spiegelungen mit Zentren P_i auf g und $\tau := \sigma_2\sigma_1$. Dies bewirkt mit den Bezeichnungen aus Abbildung 3.11

$$\tau : \mathcal{Q}(X, Y) \xrightarrow{\sigma_1} \mathcal{Q}(X_1, Y_1) \xrightarrow{\sigma_2} \mathcal{Q}(X', Y').$$

Zum Kurven-Sechseck $X'X_1XY'Y_1Y$ liegen nach PASCAL die Schnittpunkte von Gegenseiten auf einer Geraden und dazu gehören insbesondere

$$\begin{aligned} X'X_1 \vee Y'Y_1 &= P_2 \\ X_1X \vee Y_1Y &= P_1. \end{aligned}$$

Somit ist diese PASCAL-Gerade eben die Gerade g und auf ihr schneiden sich dann auch XY' und YX' . Dies ist aber ein Kreuzlinienpaar.

Damit hat jede Translation die Gerade g als Perspektivitätsachse. Nach Satz 2.36 ist damit die von den Translationen erzeugte Gruppe der Bewegungen abelsch und alle Bewegungen haben ebenfalls g als Achse.

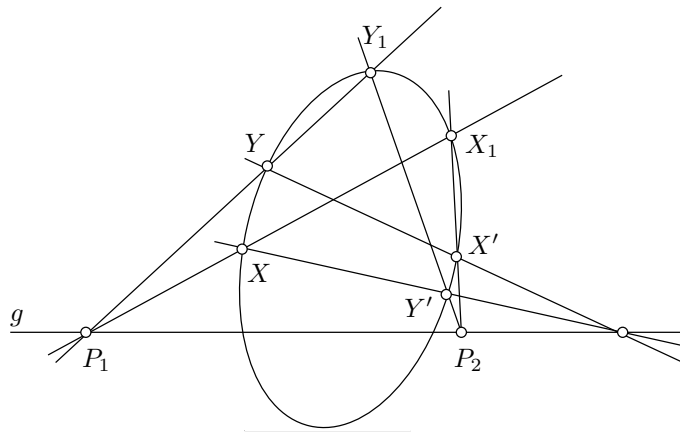


Abbildung 3.11

3. Die Aussage über die Fixpunkte folgt wieder aus Satz 2.36, die über die Segmente mit der Gleichsinnigkeit.

4. *Existenz:* Wähle einen äußeren Punkt $P_1 \in g$ und setze

$$X_1 := XP_1 \vee \mathcal{Q}, P_2 := X_1X' \vee g.$$

Sind dann σ_i die G -Spiegelungen mit den Zentren P_i , so ist $\tau := \sigma_2\sigma_1$ eine G -Translation, für die nach Konstruktion $\tau(X) = X'$ ist.

Eindeutigkeit: Da für jede infrage kommende Translation stets g die Achse ist, folgt die Behauptung aus Satz 2.36.

5. Dies haben wir bei 4. mitbewiesen.
6. Ist $\tau = \sigma_2\sigma_1$ eine Translation, so ist $\tau^{-1} = \sigma_1^{-1}\sigma_2^{-1} = \sigma_1\sigma_2$, also ebenfalls eine Translation. Sind $\tau' = \sigma_2\sigma_1$ und $\tau'' = \sigma_4\sigma_3$ Translationen, so kann man nach 5. die Translation τ'' darstellen als $\tau'' = \sigma'_4\sigma_2$ und damit ist dann

$$\tau''\tau' = \sigma'_4\sigma_2\sigma_2\sigma_1 = \sigma'_4\sigma_1,$$

also selbst wieder eine Translation. Die Vertauschbarkeit haben wir schon in 2. gezeigt. \square

Für die G -Translationen haben wir dabei nach dem Kreuzliniensatz folgende

Konstruktion 3.34 *Es sei τ die unter den Bedingungen von Satz 3.33.4. eindeutig bestimmte G -Translation mit $\tau(X) = X'$. Dann erhält man für jeden Punkt $Y \in \mathcal{Q}$ den Bildpunkt $Y' := \tau(Y)$ auf folgende Weise (siehe Abbildung 3.12): Die Gerade $X'Y$ schneide g in S , dann schneidet XS die Kurve \mathcal{Q} noch in Y' .*

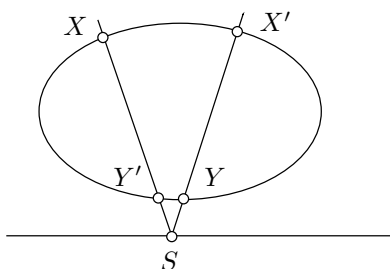


Abbildung 3.12

Diese genau aus den Translationen bestehende Gruppe der Bewegungen nehmen wir nun als Grundlage für unsere Maßbestimmung nach dem von F. KLEIN vorgezeichneten Weg. Wir konstruieren uns dazu ein “Meßgerät”, genannt “Skala”, wobei also Punkten reelle Zahlen zugeordnet sind, sodaß man an ihnen “Abstände” ablesen kann. Im parabolischen Fall werden wir dabei wieder auf die schon bekannte MÖBIUS-Skala stoßen. Im hyperbolischen Fall hatten wir schon beim vorigen Satz Einschränkungen zu machen, wie “ X, X' sollen im selben Segment liegen”. Dies hat zur Konsequenz, daß sich hier die Skala nicht auf die ganze Kurve \mathcal{Q} erstrecken wird.

Vereinbarung 3.35 *Wir bezeichnen*

- im “elliptischen Fall” mit \mathcal{E} die ganze Kurve,
- im “parabolischen Fall” mit \mathcal{E} die ganze Kurve ohne den Punkt G ,
- im “hyperbolischen Fall” mit \mathcal{E} eines der beiden Segmente, die durch die beiden Schnittpunkte F_1, F_2 von g mit \mathcal{Q} gebildet werden.

Unser Ziel ist es nun, eine solche Skala zu konstruieren, d.h. eine surjektive Abbildung $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$, die in folgendem Sinn mit Translationen verträglich ist.

Bezeichnung 3.36 *Es sei $O \in \mathcal{E}$ ein einmalig fixierter Punkt. Zu $X \in \mathcal{E}$ sei dann τ_X die durch*

$$\tau_X(O) = X$$

eindeutig bestimmte Translation.

Wir nennen eine Abbildung $s : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E}$ eine “translationsinvariante Skala”, wenn

- $s(0) = O$,
- s surjektiv,
- s lokal ordnungstreu und
- für alle $\alpha, \delta \in \mathbb{R}$ gilt, daß

$$\tau_{s(\delta)}(s(\alpha)) = s(\alpha + \delta).$$

Die letzte Forderung sagt insbesondere, daß eine Translation, die *einen* Punkt auf der Skala um δ verschiebt, dies mit *jedem* Punkt macht. Berechnet man also den "Abstand" zweier Punkte $X = s(\alpha)$ und $Y = s(\beta)$ aus $\beta - \alpha$, so ist dies jedenfalls eine unter Translationen invariante Größe, wie wir eingangs postuliert hatten.

Für die Konstruktion von solchen Skalen ist es zweckmäßig, auf \mathcal{Q} eine Orientierung vorzugeben.

Vereinbarung 3.37 Auf \mathcal{Q} sei eine Orientierung vor gegeben, die wir als "positiv orientiert" ansprechen. Im hyperbolische Fall seien die Randpunkte F_1, F_2 von \mathcal{E} (d.h. die Schnittpunkte von g mit \mathcal{Q}) so numeriert, daß

$$\mathcal{E} = \{X \in \mathcal{Q} \mid (F_1, X, F_2) \text{ ist positiv orientiert} \}.$$

Die Konstruktion einer Skala geschieht nun ähnlich wie bei den MÖBIUS-Koordinaten in mehreren Schritten:

- Festlegen von Punkten für die ganzen Zahlen,
- Verfeinern,
- Stetigkeitschluß.

Als Leitfaden kann uns dabei folgende Eigenschaft einer translationsinvarianten Skala dienen.

Lemma 3.38 Für eine translationsinvariante Skala s gelten

1. $\tau_{s(\gamma)}\tau_{s(\delta)}(s(\alpha)) = s(\alpha + \delta + \gamma)$.
2. Für beliebige $m \in \mathbb{Z}$ ist

$$(\tau_{s(\delta)})^m(s(\alpha)) = s(\alpha + m\delta).$$

Beweis:

1. $\tau_{s(\gamma)}\tau_{s(\delta)}(s(\alpha)) = \tau_{s(\gamma)}(s(\alpha + \delta)) = s(\alpha + \delta + \gamma)$.
2. Mit 1. per Induktion. □

Die letzte Aussage enthält insbesondere für $\alpha = 0, \delta = 1$ und $m \in \mathbb{Z}$ die Formel

$$s(m) = (\tau_{s(1)})^m(s(0)),$$

d.h. wir erhalten so eine ganzzahlige Teilskala, indem wir iterativ einen Punkt ($O = s(0)$) mittels einer festen Translation verschieben.

Ferner brauchen wir ein Werkzeug zum Verfeinern.

Satz und Bezeichnung 3.39 Es seien A, B zwei Punkte von \mathcal{E} , sodaß

- im parabolischen Fall dabei (A, B, G) positiv orientiert ist,
- im hyperbolischen Fall dabei (F_1, A, B, F_2) zyklisch und damit positiv orientiert ist.

Dann existiert genau ein geordnetes Paar (M, M') auf \mathcal{Q} , sodaß M, M' G -konjugiert sind und (A, M, B, M') ein harmonischer Wurf und positiv orientiert ist.

Wir nennen M die G -Mitte von A und B .

Beweis: Die Voraussetzungen implizieren, daß A, B Paar der G -Spiegelung mit den Fixpunkten M, M' sein muß, deren Zentrum damit der Schnittpunkt U der Geraden AB mit g ist. M, M' liegen damit notwendig auf der Polaren u von U und sind damit bis auf die Numerierung eindeutig bestimmt. Die Orientierungsforderung legt dann auch noch die Numerierung fest. Siehe auch Abbildung 3.13. □

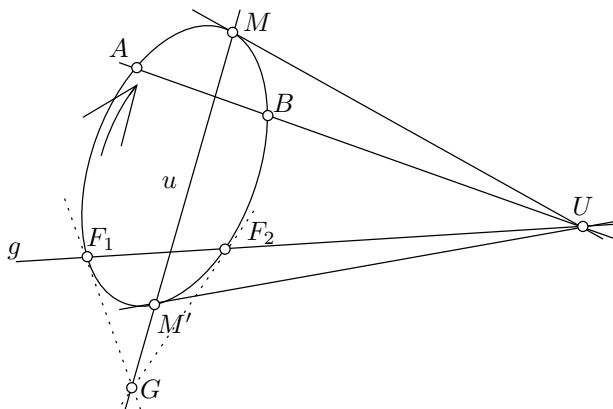


Abbildung 3.13

Lemma 3.40 Sind $A, B \in \mathcal{E}$ gemäß den Forderungen in Satz und Bezeichnung 3.39 gewählt, dazu M die G -Mitte von A, B , so gilt für die durch $\tau(A) = B$ und $\omega(A) = M$ definierten G -Translationen

$$\omega^2 = \tau.$$

Man nennt ω auch die Quadratwurzel von τ .

Beweis: Als Translationen haben beide g als Perspektivitätsachse. Dann liegt nach dem Kreuzliniensatz für jeden Punkt $X \in \mathcal{Q}$ der Schnittpunkt von $A\omega(X)$ und $X\omega(A)$ auf g . Nun ist $\omega(A) = M$ und für $X := M$ ist dann $X\omega(A)$ die Tangente an \mathcal{Q} in M , die g im Punkt U schneidet. (Siehe auch Abbildung 3.13.) Durch ihn geht auch die Gerade AB , sodaß damit $\omega(M) = B$. Also ist $\omega^2(A) = \omega(\omega(M)) = B$ und damit auch $\omega^2 = \tau$. \square

Mit dieser Mitte-Bildung kann man nun eine ganzzahlige Skala beliebig verfeinern und dann über einen Stetigkeitsschluß zur endgültigen Skala kommen.

Satz 3.41 Es seien $O, E \in \mathcal{E}$ gegeben, sodaß

- im parabolischen Fall (O, E, G) positiv orientiert ist,
- im hyperbolischen Fall (F_1, O, E, F_2) zyklisch und damit positiv orientiert ist.

Ferner sei $\epsilon > 0$. Dann gibt es genau eine translationsinvariante Skala s , mit

$$s(0) = O, \quad s(\epsilon) = E,$$

für die noch für jedes $k \in \mathbb{N}$ die Punkte

$$\left(O, s\left(\frac{1}{2}\epsilon 2^{-k}\right), s(\epsilon 2^{-k})\right)$$

positiv orientiert sind.

Bemerkung 3.42 Im parabolischen und im hyperbolischen Fall würde es ausreichen $\epsilon = 1$ zu betrachten, d.h. E als "Einheitspunkt" zu wählen. Im elliptischen Fall ist es zweckmäßig, den Parameter ϵ noch nachträglich anpassen zu können.

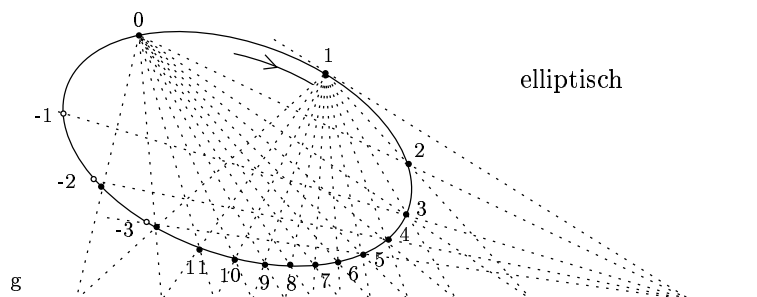


Abbildung 3.14

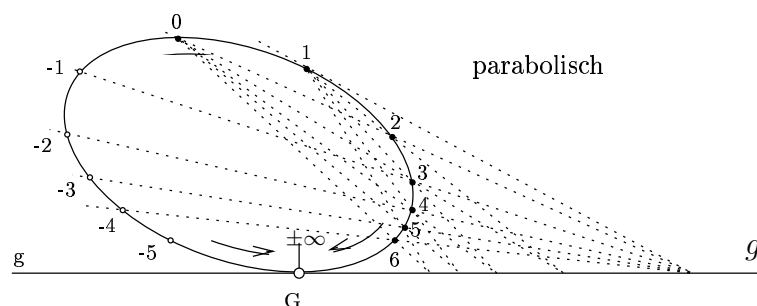


Abbildung 3.15

Beweis: Mit der durch $\tau(O) = E$ bestimmten Translation muß nach Lemma 3.38 notwendigerweise gelten

$$(\tau_E)^m(O) = (\tau_{s(\epsilon)})^m(s(0)) = s(m\epsilon) \quad (m \in \mathbb{Z}).$$

Dies nutzen wir –von rechts nach links gelesen– zur Festlegung der Punkte $s(m\epsilon)$ für $m \in \mathbb{Z}$. Abbildung 3.14, Abbildung 3.15 und Abbildung 3.16 illustrieren dies für die verschiedenen Fälle.

Man beobachtet an der Zeichnung

- im hyperbolischen Fall: Die Punkte $s(m\epsilon)$ häufen sich für $m \rightarrow -\infty$ bei F_1 , für $m \rightarrow +\infty$ bei F_2 ,
- im parabolischen Fall: Die Punkte $s(m\epsilon)$ häufen sich für $m \rightarrow \pm\infty$ bei G ,
- im elliptischen Fall: Die Folge $(s(m\epsilon))_{m \in \mathbb{Z}}$ durchläuft die Kurve ∞ -oft.

Zum Verfeinern nutzen wir nun die beschriebene Mitte-Bildung. Wir erklären rekursiv für $k = 0, 1, \dots$

$$s(2^{-(k+1)}\epsilon) \text{ sei der Mittelpunkt von } O = s(0) \text{ und } s(2^{-k}\epsilon).$$

Dann muß wegen Lemma 3.38 notwendig wieder

$$s(m2^{-k}\epsilon) = (\tau_{s(2^{-k}\epsilon)})^m(O)$$

sein und wegen Lemma 3.40 treten für verschiedene Darstellungen der Zahl $m2^{-k}\epsilon = n2^{-j}\epsilon$ keine Widersprüche auf. Also kann man s auf $\epsilon \frac{\mathbb{Z}}{2^{\mathbb{N}}}$, d.h. der Menge aller Zahlen der Gestalt $\epsilon \frac{m}{2^k}$ mit $m \in \mathbb{Z}$ $k \in \mathbb{N}$ so erklären.

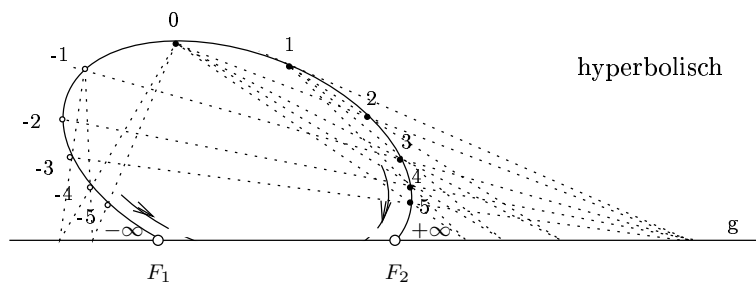


Abbildung 3.16

Für solche Zahlen gilt dann auch die Translationsinvarianz. Denn zwei Zahlen $\epsilon m 2^{-k}$ und $\epsilon n 2^{-j}$ lassen sich natürlich immer so umbauen, daß beide Exponenten gleich sind, sodaß wir also ohne Verlust von Allgemeinheit je zwei solche Zahlen als mit dem selben Exponenten dargestellt annehmen können. Dafür erhalten wir dann

$$\begin{aligned}
 \tau_{s(\epsilon m 2^{-k})} s(\epsilon n 2^{-k}) &= \tau_{s(\epsilon m 2^{-k})} \tau_{s(\epsilon n 2^{-k})} s(0) \\
 &= (\tau_{s(\epsilon 2^{-k})})^m (\tau_{s(\epsilon 2^{-k})})^n (O) \\
 &= (\tau_{s(\epsilon 2^{-k})})^{m+n} (O) \\
 &= s(\epsilon(m+n) 2^{-k}) \\
 &= s(\epsilon m 2^{-k} + \epsilon n 2^{-k}).
 \end{aligned}$$

Schließlich beweist man mit Methoden ähnlich zu den bei den MÖBIUS-Koordinaten verwendeten:

- s ist auf jedem “Intervall” $[\alpha, \alpha + \epsilon] \cap \epsilon \frac{\mathbb{Z}}{2^{\mathbb{N}}}$ ordnungstreu,
- die Menge $s(\epsilon \frac{\mathbb{Z}}{2^{\mathbb{N}}})$ liegt dicht in \mathcal{E} .

Die Eindeutigkeit ergibt sich aus der Zwangsläufigkeit der einzelnen Konstruktionschritte. \square

Die elliptische Skala übersieht man am besten, wenn man die Grundpunkte O und E als G -konjugiert wählt, wovon wir im folgenden stets ausgehen. (Siehe auch Abbildung 3.17.)

Man erhält dann aus dem Kreuzliniensatz, daß $\tau_{s(\epsilon)}(E) = O$, also

$$O = \tau_{s(\epsilon)}(E) = \tau_{s(\epsilon)}(\tau_{s(\epsilon)}) = s(2\epsilon).$$

Damit ist $\tau_{2s(\epsilon)} = \text{id}$ und folglich allgemein

$$s(\alpha) = \text{id}(s(\alpha)) = \tau_{s(\epsilon)}(s(\alpha)) = s(\alpha + 2\epsilon).$$

Also ist s periodisch mit der Periode $\omega = 2\epsilon$.

Im Hinblick auf die vertraute elliptische Skala der Winkelmessung im Büschel pflegt man

$$\epsilon := \frac{\pi}{2}$$

zu setzen.

Wir hatten die Skalen eigentlich nur deshalb auf einer Kurve \mathcal{Q} betrachtet, weil sich hier für die verschiedenen Situationen (ziemlich) einheitlich argumentieren ließ und zudem eine Reihe bequemer Sätze als Hilfsmittel vorlagen. Eigentlich sind wir

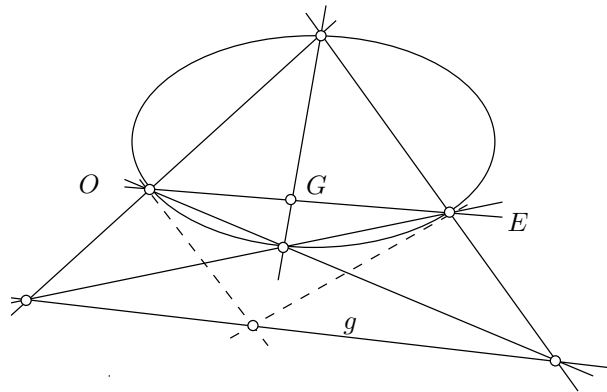


Abbildung 3.17

interessiert an Skalen auf Punktreihen oder in Strahlen- oder Ebenenbüscheln, denn wir wollen ja Strecken und Winkel messen.

Wir hatten die Skalen über die Gruppe der Translationen erhalten. Diese waren Produkte von je zwei Spiegelungen, wobei wir genau solche Spiegelungen betrachtet haben, für die

- im hyperbolischen oder elliptischen Fall die Fixpunkte ein Paar einer fest vorgegebenen Involution η (mit Involutionzentrum G) waren,
- im parabolischen Fall einer der Fixpunkte stets der selbe Punkt G war.

Dies kann man ebensogut auf einer Punktreihe g erster Ordnung bzw. sinngemäß auf einem Strahlenbüschel formulieren und man könnte versuchen nun die ganze Konstruktion für diese Situationen nachzubauen. Wir können jedoch wesentlich einfacher zum Ziel kommen.

Gegeben sei eine Gerade p und darauf eine Involution η (“elliptisch oder hyperbolischer Fall”) oder ein ausgezeichnete Punkt F (“parabolischer Fall”). Wir wählen eine beliebige Kurve Q zweiter Ordnung und darauf eine Punkt Z , der jedoch *nicht* auf p liegen darf. (Siehe Abbildung 3.18). Dann sind die Punktreihe p und Q über

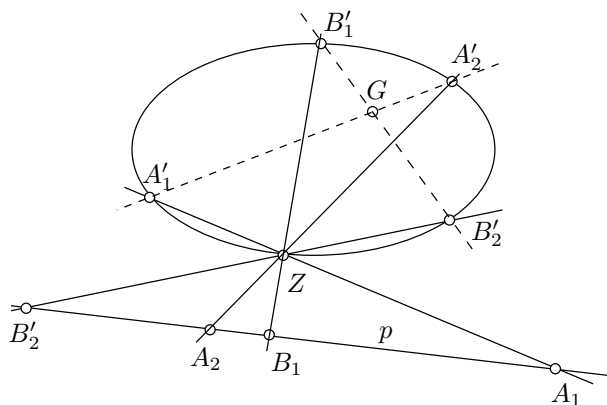


Abbildung 3.18

Z perspektiv:

$$\varphi : p(X) \xrightarrow{Z} Q(X').$$

Für eine Involution η auf g ist dann

$$\eta' := \varphi\eta\varphi^{-1}$$

selbst Involution auf \mathcal{Q} und zwar vom selben Typ wie η .

Nun wählen wir

- im elliptischen oder hyperbolischen Fall zu der gegebenen Involution η den Punkt G als das Zentrum von $\eta' := \varphi\eta\varphi^{-1}$,
- im parabolischen Fall $G := \varphi(F)$.

Zwei Punkte A_1, A_2 auf p sind damit genau dann ein Paar von η , wenn $A'_1 := \varphi(A_1), A'_2 := \varphi(A_2)$ auf \mathcal{Q} ein Paar von η_G sind, A'_1, A'_2 also G -konjugiert. (Siehe Abbildung 3.18). Im parabolischen Fall gilt natürlich trivialerweise, daß zwei Punkte auf p , von denen einer F ist durch φ in zwei Punkte von \mathcal{Q} übergehen, von denen einer $G = \varphi(F)$ ist und umgekehrt.

Es ist nun eine simple Übung, nachzuweisen, daß mit diesem Übersetzungsprozess

- die interessierenden Spiegelungen auf p genau in die G -Spiegelungen auf \mathcal{Q} übergehen und dabei
- deren Produkte, also die Translationen auf p jeweils in die G -Translationen abgebildet werden.

Dies bedeutet

Satz 3.43 *Zu einer Involution η oder einem Punkt F auf einer Geraden p erhalten wir die gesuchte translationsinvariante Skala, indem wir zunächst in der beschriebenen Weise auf eine Kurve \mathcal{Q} zweiter Ordnung übergehen, dort die entsprechende Skala erzeugen und dann alles zurückprojizieren.*

Die analoge Aufgabe im Büschel löst man etwa durch Zwischenschalten von Schnitt bzw. Schein auf eine Hilfsgerade p .

Dies ist in Abbildung 3.19, Abbildung 3.20 und Abbildung 3.21 dargestellt.

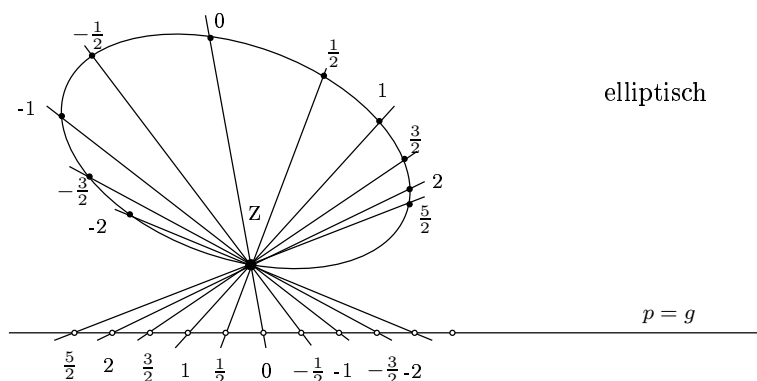


Abbildung 3.19

Wir erhalten auf der *Geraden*

- im elliptischen Fall eine periodische Skala mit Periode 2ϵ ,
- im hyperbolischen Fall eine Skala mit zwei Fixpunkten, die ein echtes Segment der Geraden bijektiv auf \mathbb{R} abbildet,

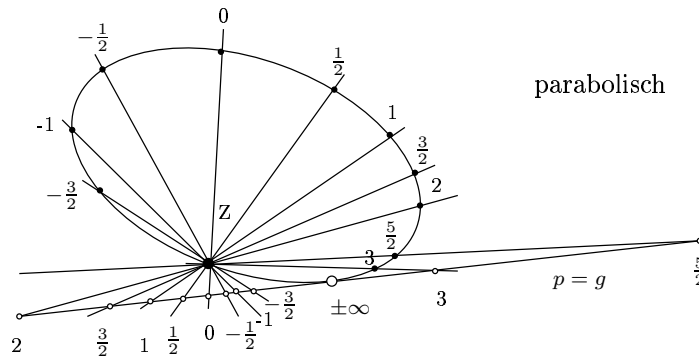


Abbildung 3.20

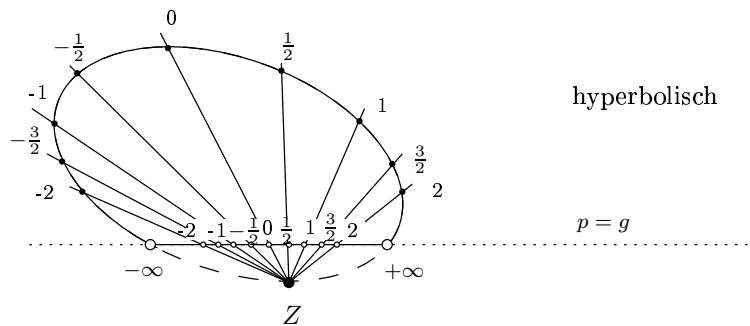


Abbildung 3.21

- im parabolischen Fall eine Skala auf der vollen Geraden mit genau einem Fixpunkt F . Sie ergibt eine Bijektion zwischen der Geraden und $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$. Wir werden sehen, daß es sich um die MÖBIUS-Skala handelt.

Im *Büschel* erhalten wir

- im elliptischen Fall eine periodische Skala, wie wir sie von der Winkelmessung her kennen. Das volle Büschel bekommt die Länge 2ϵ , was man dann wie gewohnt auf π (*nicht* 2π !, warum?) normiert.
- im hyperbolischen Fall ein Skala mit zwei Fixstrahlen, die ein echtes Segment bijektiv auf \mathbb{R} bezieht.
- im parabolischen Fall eine Skala auf dem vollen Büschel mit genau einem Fixstrahl. Sie ergibt eine Bijektion zwischen dem Büschel und $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Kehren wir noch einmal zur Skala auf der Kurve \mathcal{Q} zurück.

Satz 3.44 *Es sei $M \in \mathcal{Q}$, M' sein G -konjugierter Punkt, τ eine G -Translation. Dann bilden die Punkte*

$$(\tau^{-1}(M), M, \tau(M), M')$$

einen harmonischen Wurf.

Dies ist nur eine andere Formulierung des in Lemma 3.40 und Abbildung 3.13 behandelten Sachverhaltes, weshalb wir den Beweis übergehen.

Wählt man hier zu der Skala $s : M = s(\alpha), \tau = \tau_{s(\beta)}$, so ist dann

$$\tau(M) = \tau_{s(\beta)}(s(\alpha)) = s(\alpha + \beta),$$

und entsprechend

$$\tau^{-1}(M) = s(\alpha - \beta).$$

Also gilt das

Korollar 3.45 *Ist der Punkt $(s(\alpha))'$ G -konjugiert zu $s(\alpha)$, so bilden für jedes β die Punkte*

$$(s(\alpha - \beta), s(\alpha), s(\alpha + \beta), (s(\alpha))')$$

einen harmonischen Wurf.

Damit folgt weiter

Korollar 3.46 *Für die G -Spiegelung $\sigma_{s(\alpha)}$ an den beiden G -konjugierten Punkten $s(\alpha), (s(\alpha))'$ gilt stets*

$$\sigma_{s(\alpha)}(s(\alpha + \beta)) = s(\alpha - \beta).$$

Diese G -Spiegelung spiegelt also die Skala an $s(\alpha)$ in sich zurück.

All dies bleibt natürlich beim Übergang von der Kurve auf die Gerade oder in ein Büschel erhalten. Dies bedeutet

Satz und Bezeichnung 3.47 *Durch die Festsetzung*

$$\delta(s(\alpha), s(\beta)) := |\alpha - \beta|$$

ist über die Skala s ein Maß für die Größe von Segmenten, also Strecken oder Winkeln gegeben, welches invariant ist unter den zugehörigen Spiegelungen und Translationen, d.h. invariant unter G -Kongruenzen.

Wir sprechen je nach Typ von einer "elliptischen", "parabolischen" oder "hyperbolischen Maßbestimmung".

Im elliptischen Fall ist natürlich der obige Abstand δ wegen der Periodizität nur für "kleine" Distanzen sinnvoll. Die Details seien zu Übung gelassen.

Im parabolischen Fall ist zu jedem Punkt $X (\neq G)$ auf \mathcal{Q} stets der Punkt G konjugiert. Nach Korollar 3.45 sind hier also stets

$$(s(\alpha - \beta), s(\alpha), s(\alpha + \beta), G)$$

harmonisch. Betrachten wir alles auf der Punktreihe p und bezeichnen wir die zum Fixpunkt F gehörige parabolische Skala wieder mit s , so ist also stets

$$(s(\alpha - \beta), s(\alpha), s(\alpha + \beta), F)$$

harmonisch.

Für die Umkehrfunktion

$$\nu := s^{-1} : p \setminus \{F\} \rightarrow \mathbb{R}$$

ist dann also für einen harmonischen Wurf (X, P, Y, F) , (wobei F der ausgezeichnete Punkt ist!)

$$\nu(P) = \frac{1}{2}(\nu(X) + \nu(Y)).$$

Dies liefert mit der in Satz 3.16 gegebenen Charakterisierung der MÖBIUS-Koordinaten den

Satz 3.48 Die parabolische Skala s zu F und die MÖBIUS-Koordinaten zu den Grundpunkten $O := s(0)$, $E := s(1)$, F sind zueinander invers.

Betrachten wir noch die hyperbolische und die elliptische Skala (auf einer Geraden) unter dem Aspekt der MÖBIUS-Koordinaten.

Vorgegeben sei eine *hyperbolische Skala*

$$h : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{E},$$

deren "Welt" \mathcal{E} von den Punkte F_-, F_+ begrenzt wird und die $O_h, E_h \in \mathcal{E}$ als Null- bzw. Einheitspunkt hat:

$$h(0) = O_h, h(1) = E_h.$$

Daneben betrachten wir MÖBIUS-Koordinaten μ , gebildet zu den Grundpunkten $O := F_-, E := O_h, F := F_+$. Es ist damit

$$\mu(F_-) = 0, \mu(O_h) = 1, \mu(F_+) = \infty.$$

Zu einem beliebigen Punkt $A \in \mathcal{E}$ sei τ_A die *hyperbolische Translation* mit $\tau(O_h) = A$. Als hyperbolische Translation hat sie $O = F_-$ und $F = F_+$ als Fixpunkte, ist somit von der in Lemma 3.19 behandelten Art. Also gilt für beliebige Punkte $X \in \mathcal{E}$

$$\mu(\tau_A(X)) = \mu(A)\mu(X).$$

Setzt man nun mit der hyperbolischen Skala h :

$$A := h(\alpha), B := h(\beta),$$

so ist ja

$$\tau_A(B) = \tau_{h(\alpha)}(h(\beta)) = h(\alpha + \beta),$$

was sofort die Funktionalgleichung

$$\mu(h(\alpha + \beta)) = \mu(h(\alpha))\mu(h(\beta))$$

liefert.

Dann ist natürlich für $n \in \mathbb{N}$

$$\mu(h(n)) = \mu(h(1 + 1 + \dots + 1)) = (\mu(h(1)))^n,$$

d.h. mit $a := \mu(h(1)) = \mu(E_h)$ ist

$$\mu(h(n)) = a^n$$

und dies dehnt sich –mit den selben Techniken, wie oben angewendet– auf beliebige reelle Zahlen aus. Damit haben wir

Satz 3.49 Die hyperbolische Skala h und die entsprechend oben dazu gewählten MÖBIUS-Koordinaten μ hängen zusammen über die Formeln

$$\begin{aligned} \mu(h(\xi)) &= a^\xi \quad (\xi \in \mathbb{R}, a = \mu(h(1))) \\ \text{bzw. } h^{-1}(X) &= \gamma \ln \mu(X) \quad (X \in \mathcal{E}), \end{aligned}$$

wobei γ eine geeignete Konstante ist ($\gamma = \ln a$).

Durch das Doppelverhältnis ausgedrückt lautet dies

$$h^{-1}(X) = \gamma \ln DV(X, F_-, O_h, F_+),$$

wobei F_-, F_+ die Fixpunkte der hyperbolischen Skala sind und O_h der Nullpunkt der hyperbolischen Skala ist.

Eine *Anwendung der hyperbolischen Skala* finden wir in der Relativitätstheorie. Seien v, v_1, v_2 NEWTONSche Geschwindigkeiten für Bewegungen auf einer Geraden, c die Lichtgeschwindigkeit. In der relativistischen Mechanik “addieren” sich überlagerte Geschwindigkeiten nach der Formel

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}.$$

Diese Formel hat eine simple Deutung über die hyperbolische Skala auf einer Geraden p :

Die Punkte von p deuten wir als Geschwindigkeiten, die in dem NEWTONSchen Beobachter - System gemessenen Werte v, v_1, v_2 als die zugehörigen MÖBIUS-Koordinaten. Nun bilden wir die hyperbolische Skala zu den Fixpunkten F_-, F_+ bei $-c, +c$, und wählen als O die (Ruhe-)Geschwindigkeit des Beobachters. Ferner ordnen wir jeder NEWTON-Geschwindigkeit v die sog. “*Rapidity*”

$$h^{-1}(v) := \gamma \ln DV(v, -c, 0, c)$$

zu. (Der genaue Wert der Konstanten γ ist hier nicht weiter wichtig.)

Diese Rapidity ist also einfach der Wert des v -Punktes auf der hyperbolischen Skala. Nun “addieren” wir Geschwindigkeiten über die Rapiditäten, d.h. wir erklären

$$v = v_1 \oplus v_2 \text{ durch } h^{-1}(v) = h^{-1}(v_1) + h^{-1}(v_2).$$

Dies bedeutet, daß

$$DV(v, -c, 0, c) = DV(v_1, -c, 0, c) \cdot DV(v_2, -c, 0, c)$$

also

$$\frac{v+c}{v-c} : \frac{0+c}{0-c} = \left(\frac{v_1+c}{v_1-c} : \frac{0+c}{0-c} \right) \cdot \left(\frac{v_2+c}{v_2-c} : \frac{0+c}{0-c} \right)$$

oder

$$-\frac{v+c}{v-c} = \frac{v_1+c}{v_1-c} \cdot \frac{v_2+c}{v_2-c}.$$

Auflösen nach v ergibt

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}},$$

d.h. die aus der Physik bekannte Formel. Die hyperbolische Skala tritt also in der Relativitätstheorie ganz natürlich auf.

Für die *elliptische Skala* e auf einer Geraden p lassen sich ähnliche Aussagen wie die in Satz 3.49 gewinnen, die im wesentlichen darauf hinauslaufen, daß dieser Satz auch im elliptischen Fall gilt, wenn wir nur die Basis a komplex wählen bzw. in der Darstellung durch das Doppelverhältnis für F_-, F_+ die konjugiert komplexen Fixpunkte der die Skala regierenden elliptischen Involution η verwenden:

Für diese elliptische Involution η seien die Punkte $O_e := e(0)$ und $E_e := e(\frac{\pi}{2})$ konjugiert, (E_-, E_+) sei ein weiteres dazu harmonisch liegendes Involutionenspaar von η . Dazu betrachten wir die MÖBIUS-Koordinaten mit den Grundpunkten

$$O := O_e, E := E_+, F := E_e.$$

Über Lemma 3.18 ergibt sich dann für η die Darstellung

$$\mu(\eta(X)) = -\frac{1}{\mu(X)}$$

und für die zugehörigen elliptischen Translation τ_A :

$$\mu(\tau_A(B)) = \frac{\mu(A) + \mu(B)}{1 - \mu(A)\mu(B)}.$$

Aus der Translationsinvarianz der elliptischen Skala e folgt damit für $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$\mu(e(\alpha + \beta)) = \frac{\mu(e(\alpha)) + \mu(e(\beta))}{1 - \mu(e(\alpha))\mu(e(\beta))}.$$

Dies ist die Funktionalgleichung des Tangens. Zusammen mit der Normierung

$$\mu(e(\frac{\pi}{2})) = \mu(E_e) = \infty$$

folgt damit

Satz 3.50 Die elliptische Skala e und die entsprechend oben gewählten MÖBIUS-Koordinaten μ hängen zusammen über die Formeln

$$\begin{array}{ll} \mu(e(\xi)) & = \tan \xi & -\frac{\pi}{2} < \xi \leq \frac{\pi}{2} \\ \text{bzw. } e^{-1}(X) & = \arctan \mu(X) & X \in p. \end{array}$$

Unter Benutzung des Imaginären kann man dafür eine dem hyperbolischen Fall völlig analoge Darstellung geben:

Aus der Koordinatendarstellung der Involution η errechnen sich zwei Fixpunkte F_-, F_+ mit den imaginären Koordinaten $+i$ und $-i$. Setzt man dies in die Formel für das Doppelverhältnis ein, so erhält man die Größe

$$\delta(X) := DV(X, F_-, O, F_+) = -\frac{\mu(X) + i}{\mu(X) - i}.$$

Da $\mu(X)$ reell ist, ist dies eine Zahl vom Betrag 1, hat also die Darstellung

$$\delta(X) = \exp(i\varphi) \quad \text{d.h.} \quad \varphi = \frac{1}{i} \log \delta(X),$$

woraus sich

$$\tan \varphi = \frac{2\mu(X)}{1 - \mu^2(X)}$$

errechnet. Mit $X = e(\xi)$ und $\mu(e(\xi)) = \tan \xi$ nach Satz 3.50 ist damit

$$\tan \varphi = \tan 2\xi$$

d.h.

$$e^{-1}(X) = \frac{1}{2i} \log \delta(X) = \frac{1}{2i} \log DV(X, F_-, 0, F_+),$$

womit - zunächst formal - völlige Übereinstimmung mit dem hyperbolischen Fall erreicht ist. Durch einen Ausbau der Imaginärtheorie kann man diesen Formeln auch direkt einen geometrischen Inhalt geben. Dies würde hier zu weit führen.

