

## 4 Projektivitäten in der Ebene

### Der Fundamentalsatz

**Definition 4.1** Eine bijektive inzidenttreue Abbildung zwischen zwei Ebenen heißt "Projektivität". Sie heißt genauer "Kollineation", wenn sie Punkte in Punkte und Geraden in Geraden überführt, bzw. "Korrelation", wenn sie Punkte in Geraden und Geraden in Punkte überführt.

Analog erklärt man Projektivitäten zwischen zwei Punkten aufgefaßt als Geraden-Ebenen-Bündel bzw. zwischen Ebene und Punkt ebenfalls als inzidenttreue Bijektionen. Im letzten Fall sind Schnitt und Schein wieder einfachste Projektivitäten zwischen einer Ebene und einem zu ihr nicht inzidenten Punkt. Wir beschränken uns auf die Behandlung von Projektivitäten zwischen Ebenen. Viele der abzuleitenden Ergebnisse insbesondere der Fundamentalsatz gelten sinngemäß für die anderen Situationen.

Trivialerweise bilden die Projektivitäten einer Ebene in sich eine Gruppe und darin die Kollineationen eine Untergruppe. Dagegen ist das Produkt von zwei Korrelationen eine Kollineation und jede Kollineation läßt sich als Produkt von zwei Korrelationen darstellen, wobei man noch eine der beiden beliebig vorschreiben kann.

**Fundamentalsatz 4.2** Durch je vier Paare (Punkt / Punkt) oder (Gerade / Gerade) in allgemeiner Lage ist genau eine Kollineation, beziehungsweise durch vier Paare (Punkt / Gerade) in allgemeiner Lage genau eine Korrelation festgelegt, für die dies Paare einander zugeordneter Elemente sind.

Zum Beweis dieses Satzes stützen wir uns auf Eigenschaften von Projektivitäten zwischen Grundgebilden erster Stufe. Der entscheidende Zusammenhang wird hergestellt von

**Lemma 4.3** Die Einschränkung einer Projektivität zwischen Ebenen auf eine Gerade (als Punktreihe) oder einen Punkt (als Büschel) ist wieder projektiv.

**Beweis:** Es seien  $\pi$  eine Korrelation zwischen Ebenen,  $g$  eine Gerade,  $G = \pi(g)$  deren Bild. Aus Definition 4.1 folgt direkt, daß dabei sich  $g$  als Punktreihe und  $G$  als Büschel bijektiv entsprechen. Wir haben also nur zu zeigen, daß harmonische Lage erhalten bleibt. Dies ist aber ebenfalls trivial, da die Inzidenttreue sichert, daß  $\pi$  ein vollständiges Viereck in ein vollständiges Vierseit überführt.

Analog schließt man für Kollineationen, bzw. die übrigen Fälle.  $\square$

Hieraus folgt sofort

**Lemma 4.4** Hat eine Kollineation  $\kappa$  einer Ebene in sich 4 Fixpunkte oder 4 Fixgeraden in allgemeiner Lage, so ist sie die Identität.

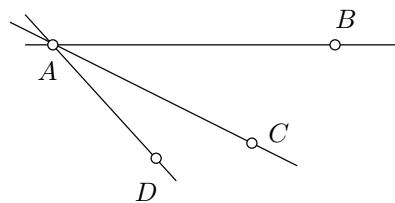


Abbildung 4.1

**Beweis:** (Siehe Abbildung 4.1) Die Büschel  $A, B, C, D$  werden jeweils auf sich selbst abgebildet, womit dann insbesondere die drei verschiedenen Geraden  $AB, AC, AD$  Fixstrahlen sind und wegen Lemma 4.3 dann das Büschel  $A$  nur aus Fixstrahlen besteht. Ebenso schließt man für die Büschel  $B, C, D$ . Jeder Punkt läßt sich als Schnitt von zwei Strahlen solcher Büschel festlegen und muß damit selbst Fixpunkt sein. Analog schließt man für Geraden.  $\square$

Dies liefert uns die Eindeutigkeitsaussage im Fundamentalsatz 4.2:

Sind nämlich  $\pi_1$  und  $\pi_2$  zwei Korrelationen oder zwei Kollineationen zu den selben vier Paaren, so ist  $\pi_2^{-1} \circ \pi_1$  eine Kollineation der Urbildebene in sich, die die vier Grund-Punkte bzw. -Geraden als Fixelemente hat. Nach Lemma 4.4 ist also  $\pi_2^{-1} \circ \pi_1 = \text{id}$ , d.h.  $\pi_1 = \pi_2$ .

Wenden wir uns nun der Existenzfrage zu. Da sich Kollineationen als Produkte von Korrelationen darstellen lassen, genügt es die Existenzaussage für Korrelationen zu beweisen.

Es seien also zwei eventuell zusammenfallende Ebenen  $E_1^-$  und  $E_2^-$  gegeben, in  $E_1^-$  vier Punkte  $A, B, C, D$ , in  $E_2^-$  vier Geraden  $a', b', c', d'$ , jeweils in allgemeiner Lage. Wir suchen eine Korrelation  $\pi$ , für die  $(A, a'), (B, b'), (C, c'), (D, d')$  sich entsprechende Paare sind. Wir ergänzen diese Daten zunächst wie in Abbildung 4.2.

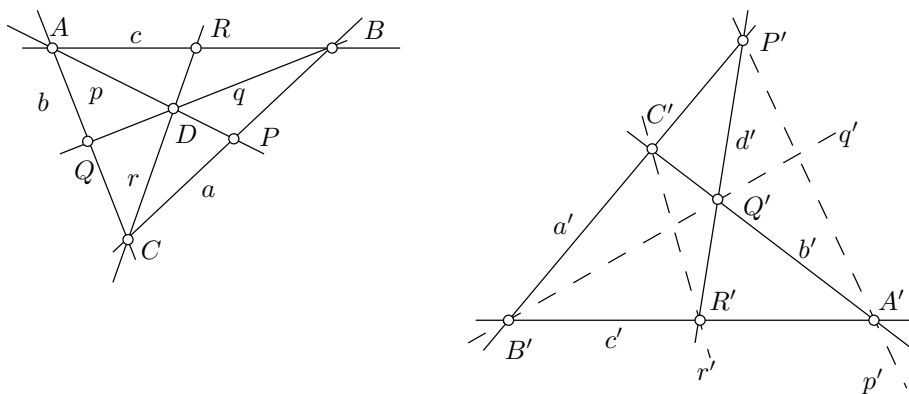


Abbildung 4.2

$\pi$  erzeugt dann nach Lemma 4.3 durch Einschränkung auf Büschel bzw. Punktreihen die eindimensionalen Projektivitäten

$$\begin{array}{ll}
 \alpha : A(b, p, c) & \bar{\lambda} \quad a'(B', P', C') \\
 \beta : B(c, q, a) & \bar{\lambda} \quad b'(C', Q', A') \\
 \gamma : C(a, r, b) & \bar{\lambda} \quad c'(A', R', B') \\
 \rho : a(B, P, C) & \bar{\lambda} \quad A'(b', p', c') \\
 \sigma : b(C, Q, A) & \bar{\lambda} \quad B'(c', q', a') \\
 \tau : c(A, R, B) & \bar{\lambda} \quad C'(a', r', b')
 \end{array}$$

Diese Projektivitäten sind nach dem Fundamentalsatz im Eindimensionalen schon durch die hier notierten Punkte und Geraden eindeutig bestimmt. Dabei gehen  $\alpha$  und  $\rho$  durch Schnitt/Scheinbildung auseinander hervor, entsprechend  $\beta$  und  $\sigma$ ,  $\gamma$  und  $\tau$ . Unser Beweis läuft darauf hinaus zu zeigen, daß umgekehrt diese Projektivitäten die Korrelation  $\pi$  völlig festlegen. Die zentrale Beziehung beschreibt

**Lemma 4.5** 1. Gehen  $x \in A, y \in B, z \in C$  durch einen Punkt, so liegen die Bilder

$$X' := \alpha(x), Y' := \beta(y), Z' := \gamma(z)$$

auf einer Geraden.

2. Liegen  $X \in a, Y \in b, Z \in c$  auf einer Geraden, so gehen die Bilder

$$x' := \rho(X), y' := \sigma(Y), z' := \tau(Z)$$

durch einen Punkt.

3. Es gelten die Umkehrungen.

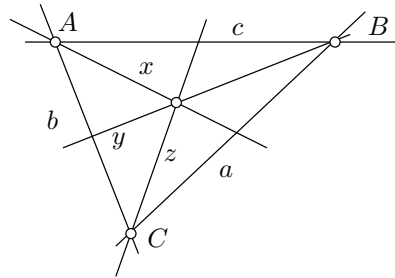


Abbildung 4.3

**Beweis:** (Siehe Abbildung 4.3.) Wir zeigen nur 1. Fixiere dazu  $z \in C, z \neq a, z \neq b$ .  $z$  bewirkt eine Perspektivität  $A(x) \bar{\wedge} B(y)$  und damit eine Projektivität

$$\omega : a'(X', B', C') \stackrel{\alpha^{-1}}{\bar{\wedge}} A(x, b, c) \stackrel{\tilde{z}}{\bar{\wedge}} B(y, a, c) \stackrel{\beta}{\bar{\wedge}} b'(Y', A', C').$$

$C'$  als gemeinsamer Punkt von  $a'$  und  $b'$  geht dabei in sich selbst über, sodaß  $\omega : a' \bar{\wedge} b'$  eine Perspektivität ist. Damit gehen also die Verbindungsgeraden sich entsprechender Punkte durch einen festen Punkt  $\tilde{Z}$ , das Zentrum der Perspektivität.  $c' = A'B'$  ist eine solche Verbindungsgerade, somit liegt  $\tilde{Z}$  auf  $c'$ . Damit haben wir zu jedem  $z \in C$  ein  $\tilde{Z} \in c'$  erhalten, sodaß, wenn  $x, y, z$  durch einen Punkt gehen, dann  $X' := \alpha(x), Y' := \beta(y)$  und  $\tilde{Z}$  auf einer Geraden liegen.

Diese Beziehung kann man auch so betrachten:

$$\eta : C(z) \stackrel{x}{\bar{\wedge}} B(y) \stackrel{\beta}{\bar{\wedge}} b'(Y') \stackrel{X'}{\bar{\wedge}} c'(\tilde{Z}),$$

wobei wieder  $X' = \alpha(x)$ . Also ist dies eine Projektivität, aber unabhängig von  $x$ . Wählen wir speziell  $x = p$ , so ergibt sich

$$\begin{aligned} \eta & : C(z) \stackrel{p}{\bar{\wedge}} B(y) \stackrel{\beta}{\bar{\wedge}} b'(Y') \stackrel{P'}{\bar{\wedge}} c'(\tilde{Z}) \\ \eta & : C(a, r, b) \stackrel{p}{\bar{\wedge}} B(a, q, c) \stackrel{\beta}{\bar{\wedge}} b'(A', Q', C') \stackrel{P'}{\bar{\wedge}} c'(A', R', B'). \end{aligned}$$

Damit ist  $\eta = \gamma$  also auch  $\tilde{Z} = Z'$ . Somit sind  $X', Y'$  und  $Z'$  kollinear. Die restlichen Überlegungen gehen analog. □

Nun ist eigentlich klar, wie wir die gesuchte Korrelation  $\pi$  gewinnen.

1. Für Geraden in den Büscheln  $A, B$  oder  $C$  sei  $\pi$  durch die Projektivitäten  $\alpha, \beta$  bzw.  $\gamma$  erklärt, analog für Punkte auf den Geraden  $a, b$  oder  $c$  entsprechend durch  $\rho, \sigma$  bzw.  $\tau$ .

2. Ein allgemein liegender Punkt  $U$  korrespondiert eindeutig zu den drei in  $U$  zentrierten Strahlen  $AU, BU, CU$ , denen die drei Punkte

$$U'_a := \alpha(AU), \quad U'_b := \beta(BU), \quad U'_c := \gamma(CU)$$

zugeordnet sind, die nach Lemma 4.5 auf einer Geraden  $u'$  liegen.

Wir setzen  $\pi(U) := u'$ .

3. Eine allgemeine Gerade  $v$  korrespondiert eindeutig zu den drei kollinearen Schnitt-Punkten  $av, bv, cv$ , denen die drei Geraden

$$v'_A := \rho(av), \quad v'_B := \sigma(bv), \quad v'_C := \tau(cv)$$

zugeordnet sind, die nach Lemma 4.5 durch einen Punkt  $V'$  gehen.

Wir setzen  $\pi(v) := V'$ .

Damit ist eine Bijektion  $\pi$  zwischen den beiden Ebenen  $E_1^-$  und  $E_2^-$  gegeben, die Punkte in Geraden und Geraden in Punkte überführt.

Um die Inzidenztreue zu zeigen, betrachten wir eine feste Gerade  $v$  und lassen darauf einen Punkt  $U$  variieren. (Siehe Abbildung 4.4.)

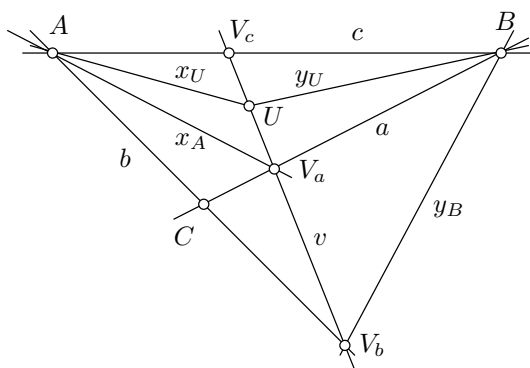


Abbildung 4.4

Dann ist  $u' := \pi(U)$  die Verbindungsgerade von

$$X' := \pi(x_U) := \alpha(x_U) \quad \text{und} \quad Y' := \pi(y_U) := \beta(y_U)$$

Ferner ist  $V' := \pi(v)$  der Schnittpunkt von

$$\pi(V_a) := \rho(V_a) \quad \text{und} \quad \pi(V_b) := \sigma(V_b),$$

wobei sich darstellen

$$\rho(V_a) \text{ als Verbindung von } A' \text{ und } \alpha(x_A),$$

$$\sigma(V_b) \text{ als Verbindung von } B' \text{ und } \beta(y_B).$$

Somit ist  $V'$  der Schnittpunkt der Verbindungsgeraden von

$$A' \text{ mit } \alpha(x_A) \text{ und } B' \text{ mit } \beta(y_B).$$

Andrerseits vermittelt der auf  $v$  laufende Punkt  $U$  eine Perspektivität

$$A(x_U) \stackrel{v}{\bar{\lambda}} B(y_U),$$

die eine Projektivität

$$a'(X', \alpha(x_A), B', C') \stackrel{\alpha^{-1}}{\wedge} A(x_U, x_A, b, c) \stackrel{v}{\wedge} B(y_U, a, y_B, c) \stackrel{\beta}{\wedge} b'(Y', A', \beta(y_B), C')$$

stiftet, die - siehe  $C'$  - selbst perspektiv ist.

Somit gehen die Verbindungsgeraden von  $X'$  mit  $Y'$ ,  $\alpha(x_A)$  mit  $A'$  und  $B'$  mit  $\beta(y_B)$  durch einen Punkt. Der ist dann notwendig  $V' = \pi(v)$  und, da die erste Gerade eben  $\pi(U)$  ist, haben wir die Inzidenztreue gezeigt und damit den Fundamentalsatz 4.2 bewiesen.  $\square$

### Polaritäten

Die in Kapitel 2 behandelte Zuordnung von Pol und Polare an einer Kurve zweiter Ordnung ist ein Beispiel für eine Korrelation  $\pi$  innerhalb *einer* Ebene, die zudem noch involutorisch ist, d.h.  $\pi^2 = \text{id}$  erfüllt. Wir verallgemeinern:

**Definition 4.6** Eine involutorische Korrelation  $\pi$  in einer Ebene heißt "Polarität", ihre einander entsprechenden Punkte und Geraden "polar", bzw. "Pol" und "Polare".

Unabhängig von Kurven zweiter Ordnung kann man die Existenz von Polaritäten aus dem Fundamentalsatz direkt bekommen.

**Bezeichnung 4.7** Ein Dreieck  $ABC$  mit Gegenseiten  $abc$  heißt "Polardreieck" für eine Korrelation  $\pi$ , wenn

$$\pi(A) = a, \quad \pi(B) = b, \quad \pi(C) = c.$$

**Satz 4.8** Besitzt eine Korrelation  $\pi$  ein Polardreieck, so ist sie eine Polarität.

Wir werden später sehen, daß auch die Umkehrung gilt.

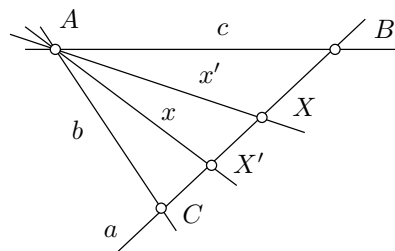


Abbildung 4.5

**Beweis:** Siehe Abbildung 4.5. Das Dreieck  $ABC$  mit Gegenseiten  $a, b, c$  sei Polardreieck für  $\pi$ .

Die Inzidenztreue von  $\pi$  liefert zunächst

$$\pi(a) = \pi(BC) = \pi(B)\pi(C) = bc = A$$

und analog  $\pi(b) = B, \quad \pi(c) = C$ . Sei nun  $X \in a, x := \pi(X) \in A$ . Dann ist (siehe Abbildung 4.5)

$$\pi(x') = \pi(AX) = \pi(A)\pi(X) = ax = X'.$$

Damit bekommen wir die aus  $\pi$  abgeleiteten Projektivitäten

$$\begin{aligned}\alpha_1 &: A(x', b, c) \stackrel{\pi}{\wedge} a(X', B, C) \stackrel{\text{Schein}}{\bar{\wedge}} A(x, c, b), \\ \alpha_2 &: a(X, B, C) \stackrel{\pi}{\wedge} A(x, b, c) \stackrel{\text{Schnitt}}{\bar{\wedge}} a(X', C, B),\end{aligned}$$

die also beide Involutionen sind, sodaß auch  $\alpha_1(x) = x'$  und  $\alpha_2(X') = X$ .  
Für ein  $x' \in A$  ist dann unter  $\pi^2$ :

$$\pi^2 : A(x') \stackrel{\pi}{\wedge} a(X') \stackrel{\pi}{\wedge} A(x'').$$

Da  $X' = ax$  ist, ist aber

$$\pi(X') = \pi(ax) = \pi(a)\pi(x) = \alpha_1(x) = x'.$$

Also ist  $\pi^2(x) = x$  sofern  $x \in A$ .

Analog erhält man in den anderen Büscheln  $B, C$  bzw. auf den Kanten  $b, c$  Involutionen, woraus dann über die Inzidenztreue allgemein  $\pi^2 = \text{id}$  folgt.  $\square$

Richtet man im Fundamentalsatz die Daten entsprechend ein, so erhält man also Polaritäten, d.h.

**Satz 4.9** *Ein Polardreieck und ein weiteres allgemeines Paar bestimmen genau eine Polarität.*

Studieren wir Polaritäten genauer.

**Satz 4.10** *Sind  $(P, p)$  und  $(Q, q)$  jeweils polar bzgl. einer Polarität  $\pi$ , so sind  $P$  und  $q$  genau dann inzident, wenn  $Q$  und  $p$  es sind.*

**Beweis:**  $P$  auf  $q$  ist äquivalent zu  $\pi(P) = p$  durch  $\pi(q) = Q$ .  $\square$

**Bezeichnung 4.11**  *$(P, p)$  und  $(Q, q)$  seien jeweils polar unter  $\pi$ . Liegt  $P$  auf  $q$  - und dann auch  $Q$  auf  $p$  -, so heißen  $P$  und  $Q$  sowie  $p$  und  $q$  "konjugiert" bzgl.  $\pi$ . Liegt  $P$  auf  $p$ , so heißen  $P$  und  $p$  "singulär", sonst "regulär".*

Die singulären Elemente zu einer Polarität  $\pi$  seien nun weiter untersucht. Nach Definition geht durch einen singulären Punkt  $P$  eine singuläre Gerade, nämlich seine Polare  $p$ , dito liegt auf einer singulären Geraden  $p$  ein singulärer Punkt, nämlich ihr Pol  $P$ . Dies sind aber jeweils auch schon alle:

**Satz 4.12** *Durch einen singulären Punkt  $P$  gibt es genau eine singuläre Gerade, die Polare  $p$ , und auf einer singulären Geraden  $p$  liegt genau ein singulärer Punkt, der Pol  $P$ .*

**Beweis:** Es sei  $(P, p)$  ein singuläres Paar und  $Q \neq P$ , auf  $p$ , ebenfalls singulär. Die Polare  $q$  geht durch  $Q$ , da singulär; ferner durch  $P$ , da  $Q$  auf  $p$ . Dann wäre aber  $q = QP = p$ . Widerspruch.  $\square$

*Es gibt also reguläre Punkte und Geraden.*

**Satz 4.13** *Jede Polarität  $\pi$  induziert auf einer für sie regulären Geraden  $g$  eine Involution konjugierter Punkte, deren Fixpunkte genau die singulären Punkte von  $g$  sind. Analoges gilt für die regulären Punkte als Büschel.*

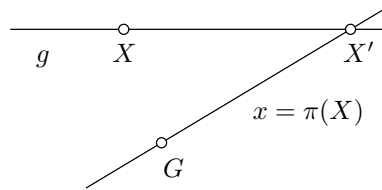


Abbildung 4.6

**Beweis:** (Siehe Abbildung 4.6.)  $g$  sei reguläre Gerade mit Pol  $G$ . Betrachte

$$\gamma: g(X) \xrightarrow{\pi} G(x) \xrightarrow{\text{Schnitt}} g(X').$$

Da  $g$  regulär ist, liegt  $G$  nicht auf  $g$ . Da für  $X \in g$  stets  $\pi(X) \in G$  ist, ist dann auch stets  $\pi(X) \neq g$ , sodaß  $\gamma$  wohldefiniert ist, also projektiv. Es ist

$$\gamma(X) = X' = g\pi(X),$$

somit

$$\pi(X') = \pi(g\pi(X)) = G\pi^2(X) = GX,$$

d.h.  $\pi(X')$  geht durch  $X$  und damit ist  $\gamma(X') = X$ . Also ist  $\gamma$  eine Involution. Ist  $Y \in g$  Fixpunkt von  $\gamma$ , so geht  $\pi(Y)$  durch  $Y = Y'$ , also ist  $Y$  singulär. Ist umgekehrt  $Y \in g$  singulär, so geht  $\pi(Y)$  durch  $Y$  und somit ist  $\gamma(Y) = Y$ , d.h.  $Y$  ist Fixpunkt.  $\square$

Als Involution ist  $\gamma$  entweder elliptisch, d.h. ohne Fixpunkte, oder hyperbolisch, d.h. mit genau 2 Fixpunkten, oder die uneigentliche Involution  $\gamma = \text{id}$ . Letzteres kann jedoch nicht eintreten, denn es gilt

**Satz 4.14** Jede reguläre Gerade  $g$  trägt entweder keinen oder genau zwei singuläre Punkte, die Involution konjugierter Punkte ist also entweder elliptisch oder hyperbolisch. Analoges gilt für Büschel.

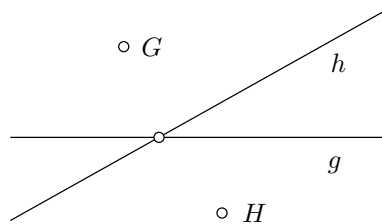


Abbildung 4.7

**Beweis:** (Siehe Abbildung 4.7.) Es genügt zu zeigen, daß die Identität nicht als induzierte Involution auftreten kann, und daß somit nicht alle Punkte von  $g$  singulär sein können. Wir nehmen an, für ein reguläres Paar  $(G, g)$  sei jeder Punkt von  $g$  singulär. Damit folgt: Jeder Punkt  $H \notin g$  ist regulär; denn wäre  $H \notin g$  singulär, so wäre auch seine Polare  $h$  singulär und trüge in  $H$  und dem dazu verschiedenen Schnittpunkt mit  $g$  zwei singuläre Punkte, was nach Satz 4.12 unmöglich ist. Dann ist aber auch jede Gerade  $h \notin G, \neq g$  regulär. Nun wähle  $h \notin G, \neq g$ . Es ist regulär und hat mit  $g$  genau einen Punkt gemeinsam und der ist der einzige singuläre Punkt von  $h$ . Dies ist wegen Satz 4.13 unmöglich, da Involutionen mit genau einem Fixpunkt nicht existieren.  $\square$

Nun können wir den Satz 4.8 über das Polardreieck umkehren.

**Satz 4.15** *Jede Polarität besitzt ein Polardreieck.*

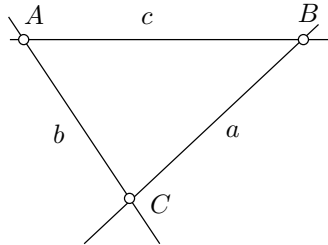


Abbildung 4.8

**Beweis:** (Siehe Abbildung 4.8.) Nach Satz 4.12 gibt es einen regulären Punkt  $A$ . Seine Polare  $a$  geht nicht durch  $A$ , ist selbst regulär und trägt somit nach Satz 4.14 mindestens einen regulären Punkt  $B$ , dessen Polare  $b$  dann durch  $A$ , aber nicht durch  $B$  geht. Dies wird durch  $C := ab$  und  $\pi(C) = \pi(ab) = AB =: c$  zu einem Polardreieck vervollständigt.  $\square$

Nach Satz 4.8 und Satz 4.15 ist eine Korrelation  $\pi$  genau dann eine Polarität, wenn sie ein Polardreieck besitzt. Nach dem Fundamentalsatz ist dann aber immer noch die Vorgabe eines weiteren Paares  $(D, d)$  notwendig um  $\pi$  eindeutig festzulegen. Hierbei entscheidet sich auch ob  $\pi$  singuläre Elemente besitzt oder nicht.

**Definition und Satz 4.16** *Eine Polarität mit singulären Elementen heißt "hyperbolisch", eine ohne singuläre Elemente "elliptisch". Beide Typen kommen vor.*

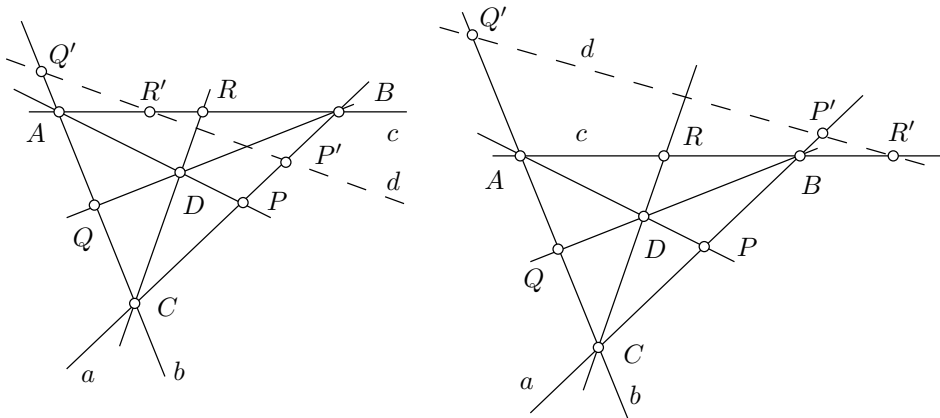


Abbildung 4.9

Ist eine Polarität  $\pi$  durch ein Polardreieck und ein weiteres Paar  $(D, d)$  gegeben, so kann man an der Lage von  $(D, d)$  zum Polardreieck den Typ von  $\pi$  ablesen.

In Abbildung 4.9 sind zwei mögliche Lagen gezeichnet. Die Punkte  $A, B, C$  teilen die Geraden  $c, a, b$  jeweils in zwei Segmente, das weitere Paar  $(D, d)$  erzeugt die Paare konjugierter Punkte  $(P, P')$ ,  $(Q, Q')$  und  $(R, R')$ . In der linken Figur liegen  $P$  und  $P'$  sowie  $R$  und  $R'$  im selben solchen Segment, dagegen  $Q$  und  $Q'$  in verschiedenen



Segmenten. In der rechten Figur gehören stets  $P$  und  $P'$ ,  $Q$  und  $Q'$ ,  $R$  und  $R'$  je zu verschiedenen Segmenten. Im linken Fall sind die Involutionen konjugierter Punkte auf  $a$  und  $c$  also jeweils hyperbolisch, die auf  $b$  ist dagegen elliptisch. Im rechten Fall sind alle elliptisch.

Diskutiert man alle möglichen Lagen durch, so zeigt sich, daß genau diese beiden dargestellten Fälle auftreten - natürlich nur bis auf Umbenennung. (Um dies aus den Axiomen zu rechtfertigen, siehe LOCHER, Projektive Geometrie.)

Tritt bei einer Polarität eine hyperbolische Involution auf, so hat sie nach Satz 4.13 singuläre Elemente, ist also selbst hyperbolisch. Es gilt aber auch die Umkehrung: Ist nämlich  $D$  ein singulärer Punkt, so geht seine Polare  $d$  ja durch  $D$  selbst und kann folglich nicht wie in Abbildung 4.9, rechts, liegen. Sind also alle Involutionen auf einem Polardreieck elliptisch, so ist die Polarität selbst elliptisch. Wir haben damit

**Satz 4.17** Die durch ein weiteres polares Paar auf den Seiten eines Polardreiecks induzierten Involutionen bestimmen den Typ der Polarität:

Entweder sind zwei Involutionen hyperbolisch und die dritte elliptisch, dann ist die Polarität selbst hyperbolisch, oder alle drei Involutionen sind elliptisch, dann ist auch die Polarität selbst elliptisch.

Die elliptischen Polaritäten lassen wir zunächst beiseite und untersuchen genauer das Gebilde aus den singulären Punkten und Geraden einer hyperbolischen Polarität, was sich als Kurve zweiter Ordnung erweisen wird.

Für den Rest dieses Abschnitts sei also  $\pi$  eine hyperbolische Polarität und  $\mathcal{Q}$  die Menge der singulären Punkte.

**Satz 4.18** 1.  $P$  sei regulärer Punkt. Dann existiert ein Viereck  $ABCD$  in  $\mathcal{Q}$ , zu dem  $P$  Nebenecke ist.

2. Jedes Nebendreieck zu einem Viereck  $ABCD$  in  $\mathcal{Q}$  ist Polardreieck für  $\pi$ .

3. Das Nebendreieck an das Viereck aus den Polen  $abcd$  zu einem Viereck  $ABCD$  in  $\mathcal{Q}$  stimmt mit dem Nebendreieck zu  $ABCD$  überein.

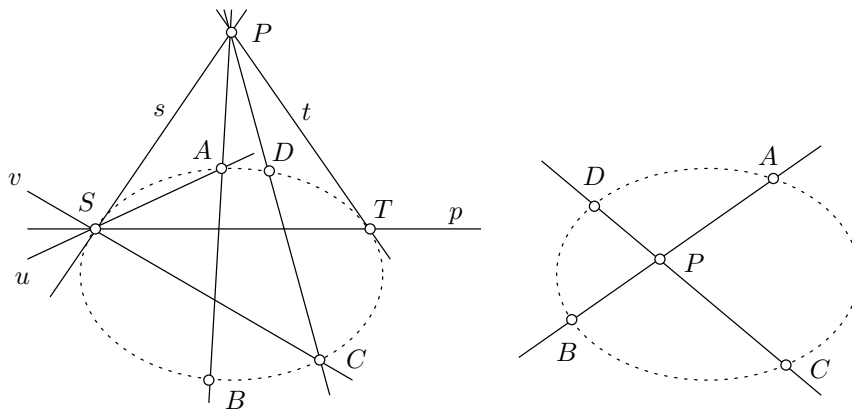


Abbildung 4.10

**Beweis:**

1.  $P$  sei regulär und trage eine *hyperbolische* Strahleninvolution, d.h. durch  $P$  gehen zwei singuläre Geraden  $s, t$ . (Siehe Abbildung 4.10.) Deren Pole seien  $S \in s, T \in t$ . Aus Inzidenztreue ist dann  $p := ST = \pi(P)$ . Ein beliebiger Strahl  $u \in S, \neq s, \neq p$ , ist regulär, trägt in  $S$  einen singulären Punkt, also nach Satz 4.14 noch genau einen weiteren singulären Punkt  $A$ . Es ist dann  $PA \neq s, \neq t$ , also regulär und trägt ebenfalls einen weiteren singulären Punkt  $B$ . Ein weiterer Strahl  $v$  durch  $S$ , nicht durch  $A$  oder  $B$  liefert analog einen weiteren  $Q$ -Punkt  $C$  und auf der Verbindung mit  $P$  finden wir einen vierten singulären Punkt  $D$ . Damit ist  $ABCD$  ein Viereck in  $\mathcal{Q}$  von dem nach Konstruktion  $P$  eine Nebenecke ist.

Im anderen Fall ist  $P$  regulär mit *elliptischer* Strahleninvolution, also ohne singuläre Geraden. Dann wähle  $A$  beliebig singulär. (Siehe Abbildung 4.10.) Auf  $AP$  existiert dann ein weiterer singulärer Punkt  $B$ . Außerhalb von  $AP$  gibt es noch einen weiteren singulären Punkt  $C$  (Satz 4.17) und wie eben dann einen weiteren singulären Punkt  $D$  auf  $PC$ . Wieder ist ein Viereck in  $\mathcal{Q}$  gefunden, das  $P$  als Nebenecke hat.

2. Sei nun ein Viereck  $ABCD$  aus singulären Elementen gegeben, mit Nebendreieck  $PQR$ . Dann sind (siehe Abbildung 4.11)  $AB$  und  $PM$  harmonisch getrennt, ebenso  $CD$  und  $PN$ . Da  $A, B, C, D$  singulär sind, sind also  $P$  und  $M$  bzw.  $P$  und  $N$  konjugiert und damit  $p := MN = QR$  die Polare von  $P$ .

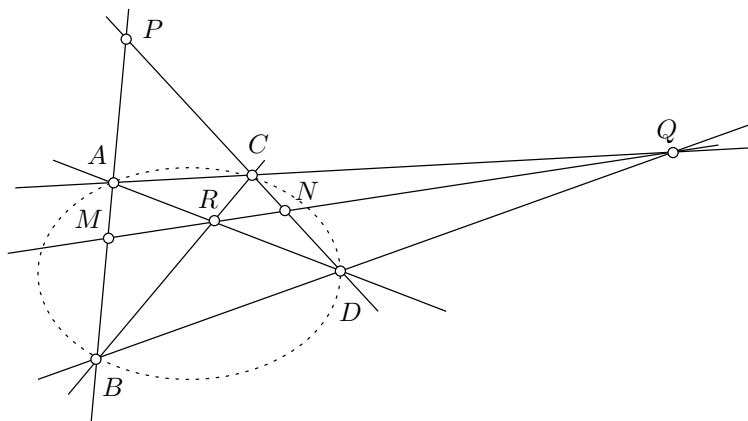


Abbildung 4.11

3.  $AB$  geht durch  $P$ , somit schneiden sich  $a = \pi(A)$  und  $b = \pi(B)$  auf  $\pi(P) = p$  etc.  $\square$

Diese Aussagen erinnern alle stark an das zur Polarität an einer Kurve 2-ter Ordnung Gesagte und tatsächlich werden wir gleich sehen, daß das Singularitätengebilde  $\mathcal{Q}$  eine solche Kurve ist.

**Satz 4.19** Sind  $A, B, C$  singuläre Punkte,  $p$  eine reguläre Gerade, konjugiert zu  $AB$ , so trifft  $p$  die Geraden  $AC$  und  $BC$  in konjugierten Punkten  $Q$  bzw.  $R$ .

**Beweis:** Da  $p$  regulär und konjugiert zu  $AB$  ist, ist ihr Pol  $P$  auf  $AB$  und regulär.

1. Geht  $p$  durch  $C$ , so ist  $Q = R = C$  und dieser Punkt als singulärer Punkt zu sich selbst konjugiert. (Abbildung 4.12 rechts.)

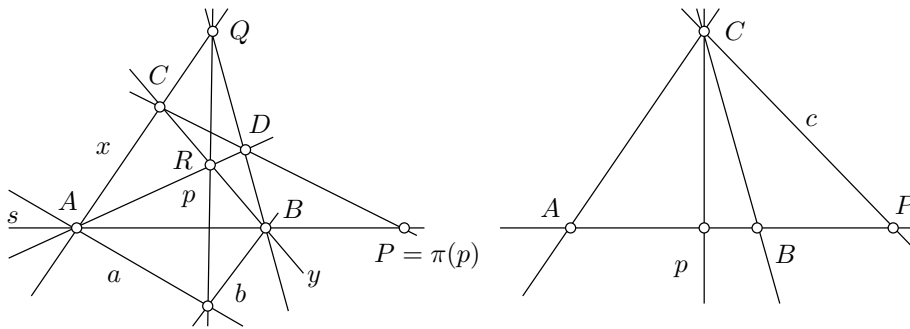


Abbildung 4.12

2.  $p$  gehe nicht durch  $C$  : (Siehe Abbildung 4.12 links.) Dann ist die Gerade  $CP$  regulär. Denn sonst wäre sie eine singuläre Gerade durch den singulären Punkt  $C$ , damit  $CP = \pi(C)$ , wonach  $P$  auf  $\pi(C)$  läge, also  $p = \pi(P)$  doch durch  $C$  ginge. Somit gibt es auf  $CP$  neben  $C$  noch genau einen singulären Punkt  $D$ .

$ABCD$  bilden nun ein Viereck aus singulären Punkte, zu dem  $P$  eine Nebenecke ist. Nach Satz 4.18.2. ist das zugehörige Nebendreieck  $PQR$  ein Polar-dreieck zu  $\pi$ , somit liegen  $Q$  und  $R$  auf der Nebenseite  $p = \pi(P)$  und sind konjugiert unter  $\pi$ .  $\square$

**Satz 4.20** *Es seien  $A, B$  zwei festgewählte singuläre Punkte, mit Polaren  $a, b$ , ferner  $C$  ein variabler singulärer Punkt. Sei  $x := AC$ ,  $y := BC$ . Dann ist die Zuordnung  $A(x) \mapsto B(y)$  projektiv aber nicht perspektiv.*

**Beweis:** (Siehe Abbildung 4.12) Eine beliebig fixierte Gerade  $p$  durch den Schnittpunkt der Polaren  $a, b$  schneidet nach Satz 4.19 die Geraden  $x$  und  $y$  in konjugierten Punkten, die also ein Paar der  $\pi$ -Involution auf  $p$  bilden. Dann haben wir die Projektivität:

$$A(x) \xrightarrow{\text{Schnitt}} \bar{\lambda} \xrightarrow{\text{Invol.}} p(Q) \xrightarrow{\text{Schein}} \bar{\lambda} \xrightarrow{\text{Schein}} B(y).$$

Wäre dies eine Perspektivität, so würde der gemeinsame Strahl  $s := AB$  sich selbst entsprechen, wonach dann der Schnittpunkt  $S$  mit  $p$  Fixpunkt der  $\pi$ -Involution, also singulär wäre. Dann wären aber  $A, B$  und  $S$  drei singuläre Punkte auf  $s$ , was unmöglich ist.  $\square$

Diese Projektivität erzeugt also eine Kurve 2-ter Ordnung. Durch Schein erhält man aus der Kurve das ganze Strahlenbüschel  $A$  und auf jedem solchen Strahl gibt es einen von  $A$  verschiedenen singulären Punkt  $C$ , der nach Konstruktion der Kurvenpunkt sein muß.

Damit haben wir

**Satz 4.21** *Die singulären Punkte und Geraden einer hyperbolischen Polarität bilden genau eine Kurve 2-ter Ordnung.*

### Zentrale Kollineationen

Nach dem Fundamentalsatz bestimmen zwei sich entsprechende nicht ausgeartete Vierecke  $ABCD$  und  $A'B'C'D'$  genau eine Kollineation  $\kappa$ , die das eine in das andere überführt. Wählen wir hier  $A = A', B = B', C = C'$ , ferner  $D \neq D'$ , aber  $A, D, D'$  kollinear, - dabei dürfen  $D, D'$  nicht auf den Seiten des Dreiecks  $ABC$  liegen - ,

so sind also  $A, B, C$  Fixpunkte und die Seiten  $AB, BC, CA$  Fixstrahlen. Ferner ist auch  $AD = AD'$  Fixstrahl. Damit enthält das Bündel  $A$  drei Fixstrahlen, also *nur* Fixstrahlen, ist also ein "Fixstrahlenbündel". Entsprechend enthält die Gerade  $BC$  nur Fixpunkte, ist also eine "Fixpunktgerade". (Siehe Abbildung 4.13.)

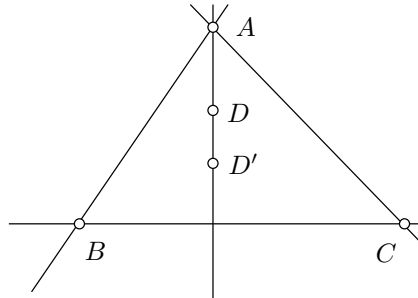


Abbildung 4.13

**Satz und Definition 4.22** Eine Kollineation  $\kappa$ , die ein Fixstrahlenbündel  $Z$  besitzt, besitzt auch eine Fixpunktgerade  $z$  und umgekehrt. Solche Kollineationen heißen "zentral" oder "axial",  $Z$  heißt das "Zentrum",  $z$  die "Achse" von  $\kappa$ . Liegt das Zentrum auf der Achse, so spricht man auch von "Elation", andernfalls von "Homologie".

**Beweis:**  $\kappa$  sei eine Kollineation mit Fixstrahlenbündel  $Z$ . Es seien  $u, v, w$  drei Strahlen des Fixstrahlenbündels  $Z$  und  $A$  auf  $u$ ,  $B$  auf  $v$  und  $C$  auf  $w$  drei beliebige Punkte  $\neq Z$ , aber nicht kollinear. Wegen der Inzidenztreue liegen die Bilder  $A', B', C'$  wieder auf  $u, v, w$ , sind  $\neq Z$  und nicht kollinear. Also haben wir die beiden in  $Z$  zentrierten Dreiecke  $ABC$  und  $A'B'C'$ , deren Seitenschnittpunkte  $P := aa', Q := bb', R := cc'$  nach dem Satz von Desargues auf einer Geraden  $z$  liegen. Diese Punkte sind aber sämtlich Fixpunkte von  $\kappa$ : Dazu betrachten wir etwa den Strahl  $p := PZ$ . Als Strahl von  $Z$  ist er Fixstrahl, ferner ist  $P = pa = pa'$ . Dann ist  $\kappa(P) = \kappa(p)\kappa(a) = pa'$ , was wiederum  $P$  ist. Analog für  $Q$  und  $R$ . Somit sind auf  $z$  drei Fixpunkte nachgewiesen, d.h.  $z$  ist Fixgerade und trägt nur Fixpunkte, ist also eine Fixpunktgerade. Die Umkehrung geht analog.  $\square$

**Bemerkung 4.23** Wir haben zugleich erhalten, daß bei einer zentralen Kollineation sich entsprechende Punkte auf einer Geraden durch das Zentrum liegen und sich entsprechende Geraden durch einen Punkt der Achse gehen.

In Abbildung 4.14 sind zwei typische solche Situationen gezeichnet.

**Satz 4.24** 1. Durch Zentrum  $Z$  und Achse  $z$  und ein weiteres allgemeines Paar von sich entsprechenden Punkten oder Geraden - das Bemerkung 4.23 respektiert - ist eine zentrale Kollineation eindeutig bestimmt.

2. Hat eine zentrale Kollineation außer den Elementen von Zentrum und Achse noch einen Fixpunkt oder eine Fixgerade, so ist sie die Identität.

**Beweis:**

1. Liegt  $Z$  nicht auf  $z$ , so treffen hier direkt die Überlegungen am Anfang dieses Abschnitts zu. Es sei also der Fall betrachtet, daß  $Z$  auf  $z$  liegt. (Siehe Abbildung 4.14.)

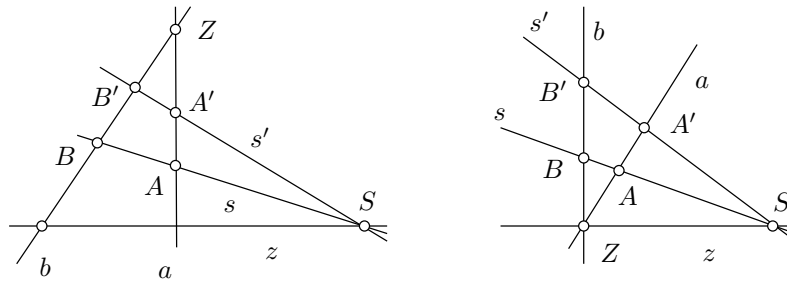


Abbildung 4.14

Gegeben seien  $Z$  auf  $z$  und dazu ein allgemeines Paar  $A, A'$ , sodaß  $Z, A, A'$  auf einer Geraden  $a$  liegen. Wähle eine beliebige Gerade  $b$  durch  $Z$ , darauf  $B \neq Z$ . Sei  $s := AB$  und  $S$  der Schnittpunkt mit  $z$ , ferner  $s' := SA'$ , was  $b$  in  $B'$  treffe.  $C$  sei ein weiterer Punkt von  $z$ . Dann liegen  $ABCZ$  und  $A'B'CZ$  jeweils in allgemeiner Lage und definieren so eine Kollineation  $\kappa$ . Sie hat  $Z$  und  $C$  als Fixpunkte, somit auch  $z$  als Fixgerade, worauf  $S$  ein weiterer Fixpunkt ist. Damit ist  $z$  sogar Fixpunktgerade. Ebenso folgt, daß  $a, b, z$  Fixgeraden sind, also  $Z$  sogar Fixstrahlenbüschel ist. Folglich ist  $\kappa$  zentral zu  $Z$  und  $z$ .

Die Konstruktion von Abbildung 4.14 zeigt auch unmittelbar die Eindeutigkeit.

- Die Identität ist trivialerweise zentral - jeder Punkt taugt als Zentrum, jede Gerade als Achse - . Somit folgt die Behauptung aus der Eindeutigkeit bei Teil 1.  $\square$

(Man kann natürlich auch direkt mit dem Fundamentalsatz 4.2 schließen.)

**Satz 4.25** 1. Mit  $\kappa$  ist auch  $\kappa^{-1}$  zentral und beide haben dieselbe Achse und dasselbe Zentrum.

- Sind  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$  beide zentral mit derselben Achse  $z$  (bzw. demselben Zentrum  $Z$ ), so ist auch  $\kappa_2\kappa_1$  zentral und zwar wieder mit der Achse  $z$  (dem Zentrum  $Z$ ). Die Zentren von  $\kappa_1, \kappa_2$  und  $\kappa_2\kappa_1$  sind kollinear (die Achsen von  $\kappa_1, \kappa_2$  und  $\kappa_2\kappa_1$  gehen durch einen Punkt).

**Beweis:**

- Dies folgt mit Satz 4.24 direkt aus der Tatsache, daß  $\kappa$  und  $\kappa^{-1}$  die selben Fixgeraden und Fixpunkte haben.
- Wir können annehmen, daß  $\kappa_1, \kappa_2$  und  $\kappa_2\kappa_1$  alle  $\neq \text{id}$  sind. Die Punkte von  $z$  sind sämtlich Fixpunkte bei  $\kappa_1$  und bei  $\kappa_2$  also auch bei  $\kappa_2\kappa_1$ . Folglich ist  $z$  Fixpunktgerade von  $\kappa_2\kappa_1$ , dies also nach Satz und Definition 4.22 zentral. Es seien  $Z_1, Z_2$  und  $Z$  die Zentren von  $\kappa_1, \kappa_2$  bzw.  $\kappa_2\kappa_1$ . Wir nehmen an, sie seien nicht kollinear, bilden also ein nicht ausgeartetes Dreieck mit Seiten

$$u := Z_1Z_2, \quad v := Z_2Z, \quad w := ZZ_1.$$

Diese erweisen sich nun als Fixstrahlen unter allen drei Kollineationen; denn  $u$  geht durch  $Z_1$  und  $Z_2$ , ist somit Fixstrahl bei  $\kappa_1$  und  $\kappa_2$ , somit auch bei  $\kappa_2\kappa_1$ .  $v$  geht durch  $Z_2$  und  $Z$ , ist also Fixstrahl bei  $\kappa_2$  und  $\kappa_2\kappa_1$ . Nach Teil 1. ist dann  $v$  auch Fixstrahl bei  $\kappa_2^{-1}$ , und somit auch bei  $\kappa_2^{-1}(\kappa_2\kappa_1) = \kappa_1$ . Analog schließt man für  $w$ .

Dann muß aber jeweils eine dieser drei Geraden die Achse sein und, da alle Achsen gleich sind, ist also  $z$  eine der Geraden  $u, v, w$ . Ist etwa  $z = u$ , so haben wir in  $v$  eine Fixgerade von  $\kappa_1$ , die weder die Achse ist noch durch das Zentrum  $Z_1$  geht. Dann wäre aber  $\kappa_1 = \text{id}$ , was wir ausgeschlossen hatten. Den analogen Widerspruch erhält man für die andern beiden Fälle.  $\square$

Hieraus ergibt sich unmittelbar

**Korollar 4.26** 1. Die zentralen Kollineationen mit fester Achse (festem Zentrum) bilden eine Gruppe.

2. Die zentralen Kollineationen mit fester Achse (festem Zentrum), für die Zentrum und Achse inzident sind, bilden eine Gruppe.

## Involutionen

Wir hatten involutorische Korrelationen betrachtet und dabei die Polaritäten erhalten. Für das Weitere brauchen wir involutorische Kollineationen, die wir jetzt untersuchen wollen.

**Satz und Definition 4.27** Eine Kollineation  $\sigma \neq \text{id}$  der Ebene in sich ist genau dann "involutorisch" oder kurz eine "Involution", wenn sie eine "harmonische Spiegelung" ist. Dies ist eine zentrale Kollineation, deren Achse  $z$  und Zentrum  $Z$  nicht inzident sind und für die zu jedem Punkt  $X \neq Z, \notin z$  stets  $(X, \sigma(X))$  und  $(Z, X_z)$  harmonisch getrennt sind, wobei  $X_z$  der Schnittpunkt von  $X\sigma(X)$  mit  $z$  ist.

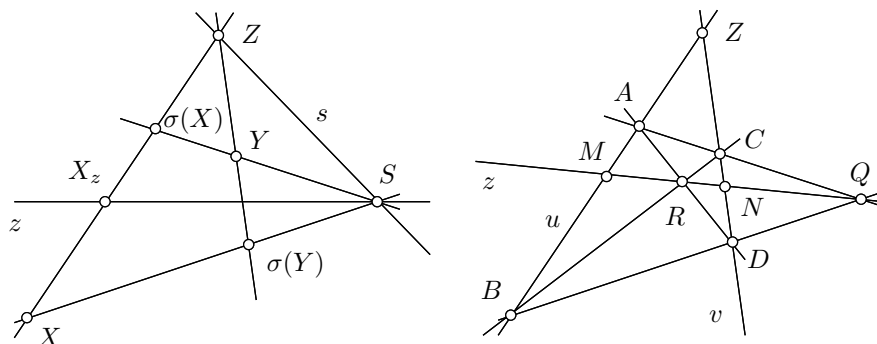


Abbildung 4.15

**Beweis:**

- (Siehe Abbildung 4.15, links.)  $\sigma$  sei zentrale Kollineation und für ein  $X$  möge  $(X, \sigma(X))$  durch  $(Z, X_z)$  harmonisch getrennt werden. Über Bemerkung 4.23 folgt direkt, daß dies dann für jedes Paar  $(Y, \sigma(Y))$  gilt.

Ferner ist nach Satz 4.25  $\sigma^2$  wieder zentral mit Achse  $z$  und Zentrum  $Z$  und dazu weiterem allgemeinem Fixpunkt  $X$ . Dann ist also  $\sigma^2 = \text{id}$ , d.h.  $\sigma$  eine Involution.

- (Siehe Abbildung 4.15, rechts.) Sei nun umgekehrt  $\sigma \neq \text{id}$  eine Involution. Dann existieren zwei allgemein liegende Paare  $(A, B)$  und  $(C, D)$ , sodaß  $\sigma(A) = B, \sigma(C) = D$  und damit, da  $\sigma$  Involution, auch  $\sigma(B) = A, \sigma(D) = C$ .

Wir betrachten das vollständige Viereck  $ABCD$ : Die Nebenecke zu den Seiten  $AB$  und  $CD$  sei  $Z$ , die andern beiden seien  $Q$  und  $R$ . Ferner sei  $z$  die  $Z$  gegenüberliegende Nebenseite, also  $z = QR$ . Wir zeigen nun:

$\sigma$  ist die harmonische Spiegelung mit dem Zentrum  $Z$  und Achse  $z$ .

Zunächst folgt, daß  $u := AB$  Fixgerade ist, da

$$\sigma(u) = \sigma(AB) = \sigma(A)\sigma(B) = BA = u.$$

Ebenso zeigt man, daß  $v := CD$  Fixgerade ist und somit  $Z := uv$  ein Fixpunkt. Nun ist

$$\begin{aligned} \sigma(AC) &= \sigma(A)\sigma(C) = BD \\ \sigma(BD) &= \sigma(B)\sigma(D) = AC. \end{aligned}$$

Diese Viereckseiten gehen also unter  $\sigma$  in einander über, somit ist ihr Schnittpunkt  $Q$  ein Fixpunkt. Analog schließt man, daß die dritte Nebenecke  $R$  ein Fixpunkt ist. Also ist  $z := QR$  eine Fixgerade und damit sind auch noch  $M := zu$  und  $N := zv$  weitere Fixpunkte auf  $z$ . Also ist  $z$  sogar Fixpunktgerade, folglich  $\sigma$  zentral mit Achse  $z$ , und damit notwendig  $Z$  als Fixpunkt  $\notin z$  das Zentrum. Aus dem Viereck  $QCRD$  sieht man sofort, daß  $\{A, B\}$  von  $\{Z, M\}$  harmonisch getrennt werden, also  $\sigma$  harmonische Spiegelung ist.  $\square$

Mitbewiesen haben wir

**Korollar 4.28** Eine Kollineation, die ein allgemeines Viereck  $ABCD$  in  $BADC$  überführt, ist eine harmonische Spiegelung. Das Zentrum ist die Nebenecke auf  $AB$  und  $CD$ , die Achse die gegenüberliegende Nebenseite.

**Bemerkung 4.29** Wir halten fest, daß es in der Ebene keine involutorischen Kollineationen ohne Fixpunkte, also vom elliptischen Typ gibt.

Zu einem Dreieck  $ABC$  mit Gegenseiten  $a, b, c$  gehören auf natürliche Weise drei Spiegelungen  $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ , eben die zu den Paaren  $(A, a), (B, b), (C, c)$  als Zentrum bzw. Achse. Diese drei Spiegelungen sind aber nicht mehr unabhängig voneinander. Es gilt

**Satz 4.30** Für die drei Spiegelungen  $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$  an einem Dreieck gelten

1.

$$\sigma_A\sigma_B\sigma_C = \text{id}$$

und damit auch

$$\sigma_A\sigma_B = \sigma_C$$

2.

$$\sigma_A\sigma_B = \sigma_B\sigma_A$$

**Beweis:**

1. Jede der drei Ecken  $A, B, C$  ist für jede der drei Spiegelungen entweder das Zentrum oder ein Punkt der Achse, also jedenfalls ein Fixpunkt. Somit hat  $\beta := \sigma_A\sigma_B\sigma_C$  die drei Fixpunkte  $A, B, C$  und läßt damit auch die Kanten  $a, b, c$  fest. Sei nun  $A, X, B, X'$  ein harmonischer Wurf auf  $c$ . Dann haben wir

$$c(AXBX') \stackrel{\sigma_C}{\wedge} c(AXBX') \stackrel{\sigma_B}{\wedge} c(AX'BX) \stackrel{\sigma_A}{\wedge} c(AXBX').$$

Also ist  $c$  eine Fixpunktgerade von  $\beta$ . Für einen harmonischen Wurf  $C, Y, B, Y'$  auf  $a$  schließt man analog und erhält auch  $a$  als Fixpunktgerade von  $\beta$ . Dann

besitzt aber  $\beta$  vier Fixpunkte in allgemeiner Lage und ist demnach die Identität.

Da  $\sigma_C = (\sigma_C)^{-1}$  ist dann auch

$$\sigma_A \sigma_B = \sigma_C$$

bewiesen.

2. Dies folgt direkt aus 1., da es ja nicht auf die Bezeichnung ankommt.  $\square$

## Koordinaten in der Ebene

In Kapitel 3 hatten wir auf Geraden als Punktreihen, bzw. analog in Punkten als Strahlenbüscheln zunächst MÖBIUS-Koordinaten eingeführt und daraus homogene Koordinaten gewonnen. Dies sei nun auf die Ebene erweitert.

### Ebene Punkt-Koordinaten

Zunächst behandeln wir ebene Punkt-Koordinaten:

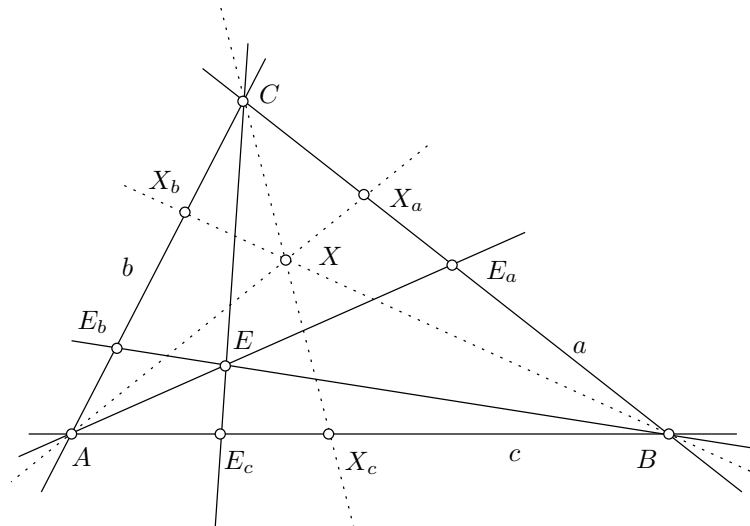


Abbildung 4.16

Wir legen ein (ebenes Punkt-)Koordinatensystem fest durch vier Punkte  $A, B, C, E$  in allgemeiner Lage.  $A, B, C$  betrachten wir als die Ecken eines "Koordinaten-Dreiecks" mit Gegenseiten  $a, b, c$ .  $E$  wirkt als "Einheitspunkt". Die Verbindungen von  $E$  mit den Ecken schneiden die Gegenseiten in Punkten  $E_a, E_b, E_c$ . Dies ist in Abbildung 4.16 dargestellt.

Auf jeder der drei Dreiecksseiten  $s$  haben wir nun zwei Dreiecksseiten  $P, Q \in \{A, B, C\}$  und den entsprechenden "Einheitspunkt"  $E_s$ . Dadurch sind MÖBIUS-Koordinaten  $\mu_{PQ}$  auf  $s$  festgelegt, für die

$$\mu_{PQ}(P) = 0, \quad \mu_{PQ}(Q) = \infty, \quad \mu_{PQ}(E_s) = 1$$

ist. In concreto ist also etwa

$$\begin{aligned} \mu_{AB}(A) &= 0, & \mu_{AB}(B) &= \infty, & \mu_{AB}(E_c) &= 1 \\ \mu_{BA}(A) &= \infty, & \mu_{BA}(B) &= 0, & \mu_{BA}(E_c) &= 1. \end{aligned}$$



**Definition 4.31** Ein Koordinaten-Dreieck  $ABC$  mit Einheitspunkt  $E$  und den wie eben erklärten sechs Systemen von MÖBIUS-Koordinaten auf den Dreiecksseiten heißt "ebenes Punkt-Koordinatensystem".

Einen beliebigen Punkt  $X$  können wir damit folgendermaßen "messen": Durch Projektion von  $X$  aus den Ecken auf die Gegenseiten erhalten wir die Punkte  $X_a, X_b$ , bzw.  $X_c$ . (Davon sind stets mindestens zwei wohldefiniert und alle drei, sofern  $X$  keine der drei Ecken  $A, B, C$  ist.) Als Punkte der Dreiecksseiten können wir deren Koordinaten bezüglich der entsprechenden MÖBIUS-Koordinaten  $\mu_{PQ}$  feststellen und erhalten den MÖBIUS-Punkt-Koordinatenvektor

$$\mu(X) := (\mu_{AB}(X_c), \mu_{BC}(X_a), \mu_{CA}(X_b), \mu_{BA}(X_c), \mu_{AC}(X_b), \mu_{CB}(X_a))$$

Für seine Komponenten notieren wir auch abkürzend

$$\mu_{AB}(X) := \mu_{AB}(X_c) \quad \text{etc.}$$

und nennen dies "MÖBIUS-Koordinate von  $X$  auf  $AB$ ".

Die Ebene hat nur  $\infty^2$  viele Punkte, sodaß die sechs Komponenten von  $\mu(X)$  nicht unabhängig sein können. Es müssen also Relationen zwischen ihnen bestehen. Dies sind die folgenden:

**Lemma 4.32** 1. Für  $P, Q \in \{A, B, C\}$  ist

$$\mu_{PQ}(X) \cdot \mu_{QP}(X) = 1.$$

2.

$$\begin{aligned} \mu_{AB}(X) \cdot \mu_{BC}(X) \cdot \mu_{CA}(X) &= 1. \\ \mu_{AC}(X) \cdot \mu_{CB}(X) \cdot \mu_{BA}(X) &= 1. \end{aligned}$$

3. Für jede Permutation  $(P, Q, R)$  von  $(A, B, C)$  ist

$$\frac{\mu_{PQ}(X)}{\mu_{PR}(X)} = \mu_{RQ}(X).$$

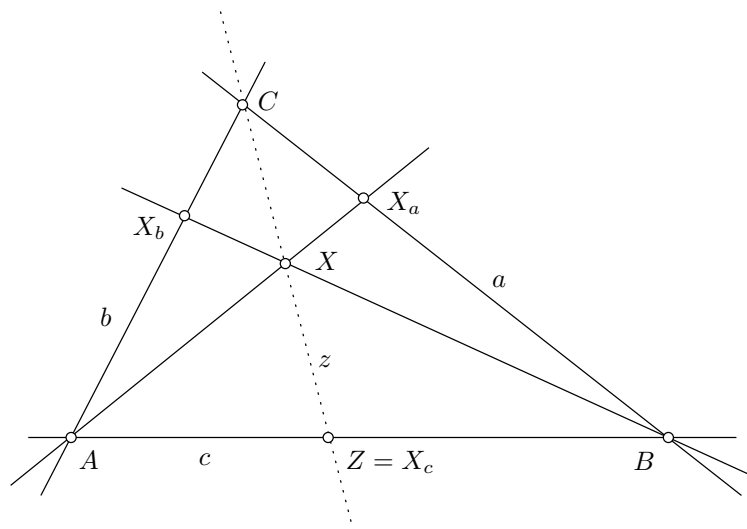


Abbildung 4.17

**Beweis:** 1. wurde schon in Lemma 3.18 abgeleitet, 3. folgt damit direkt aus 2. Bleibt also 2. zu beweisen. (Siehe Abbildung 4.17.)

Zum Beweis von

$$\mu_{AB}(X) \cdot \mu_{BC}(X) \cdot \mu_{CA}(X) = 1$$

fixiere einen Punkt  $Z$  auf  $c$  und betrachte einen auf  $z := CZ$  variierenden Punkt  $X$ , für den dann natürlich  $X_c = Z$  ist, somit

$$\mu_{AB}(X) = \mu_{AB}(X_c) = \mu_{AB}(Z).$$

Nun betrachte die Projektivität  $\pi$  zwischen den Punktreihen  $a$  und  $b$ , gegeben durch

$$\pi : a(B, C, X_a) \stackrel{A}{\bar{\wedge}} z(Z, C, X) \stackrel{B}{\bar{\wedge}} b(A, C, X_b).$$

Bezüglich der MÖBIUS-Koordinaten  $\mu_{AC}$  bzw.  $\mu_{BC}$  auf  $b$  bzw.  $a$  wird  $\pi$  dann nach Satz 3.22 dargestellt in der Form

$$\mu_{AC}(X_b) = \frac{\alpha \cdot \mu_{BC}(X_a) + \beta}{\gamma \cdot \mu_{BC}(X_a) + \delta}$$

und Einsetzen der speziellen Punkte liefert  $\beta = \gamma = 0$ ,  $\delta = 1$ , d.h.

$$\mu_{AC}(X_b) = \alpha \cdot \mu_{BC}(X_a),$$

oder

$$\alpha \cdot \mu_{BC}(X) \cdot \mu_{CA}(X) = 1.$$

Der Faktor  $\alpha$  ist allein durch die Projektivität  $\pi$ , d.h. durch die Wahl der Geraden  $z$  festgelegt, die wiederum durch

$$\mu_{AB}(Z) = \mu_{AB}(X_c) = \mu_{AB}(X)$$

bestimmt ist. Also ist  $\alpha = \alpha(\mu_{AB}(X))$  und damit

$$\alpha(\mu_{AB}(X)) \cdot \mu_{BC}(X) \cdot \mu_{CA}(X) = 1.$$

Die selbe Überlegung mit zyklischer Vertauschung liefert

$$\mu_{AB}(X) \cdot \alpha'(\mu_{BC}(X)) \cdot \mu_{CA}(X) = 1,$$

sodaß auch

$$\frac{\alpha(\mu_{AB}(X))}{\mu_{AB}(X)} = \frac{\alpha'(\mu_{BC}(X))}{\mu_{BC}(X)}$$

für alle  $X$  gilt. Diese beiden Koordinaten können aber unabhängig variieren. Somit müssen beide Seiten konstant sein, d.h. es ist  $\alpha(\mu_{AB}(X)) = \alpha \cdot \mu_{AB}(X)$  mit einem konstanten  $\alpha$ . Die oben hergeleitete Gleichung wird also zu

$$\alpha \cdot \mu_{AB}(X) \cdot \mu_{BC}(X) \cdot \mu_{CA}(X) = 1$$

und aus dem Einheitspunkt  $E$  ergibt sich  $\alpha = 1$ , womit die eine Formel von 2. bewiesen ist. Die andere folgt daraus durch Umbezeichnen.  $\square$

Mit diesen Regeln können wir nun die sechs MÖBIUS-Punkt-Koordinaten auf drei homogene Koordinaten komprimieren:

**Satz 4.33** Für jeden Punkt  $X$  der Ebene liefert die Zuordnung  $X \mapsto \sigma(X)$  mit

$$\sigma(X) := (\xi_A : \xi_B : \xi_C) := (1 : \mu_{AB}(X) : \mu_{AC}(X))$$

homogene "Punkt-Koordinaten" für  $X$  mit der sie charakterisierenden Eigenschaft, daß für alle  $X$ , alle  $Q, P \in \{A, B, C\}, Q \neq P$

$$\frac{\xi_Q}{\xi_P} = \mu_{PQ}(X).$$

Die Komponenten von  $\sigma(X)$  sind nur bis auf einen gemeinsamen Faktor  $\neq 0$  bestimmt,  $(0 : 0 : 0)$  kommt nicht vor.

**Beweis:**

1. Es ist  $\frac{\xi_B}{\xi_A} = \mu_{AB}(X), \frac{\xi_C}{\xi_A} = \mu_{AC}(X), \frac{\xi_C}{\xi_B} = \frac{\mu_{AC}(X)}{\mu_{AB}(X)} = \mu_{BC}(X)$ , etc.
2. Sei  $(\xi_A, \xi_B, \xi_C) \neq (0, 0, 0)$  gegeben, dabei also etwa  $\xi_A \neq 0$ . Wähle  $X_c$  als Punkt auf  $AB$  mit  $\mu_{AB}(X_c) = \frac{\xi_B}{\xi_A}$ ; wähle  $X_b$  als Punkt auf  $AC$  mit  $\mu_{AC}(X_b) = \frac{\xi_C}{\xi_A}$ . Dadurch ist (siehe Abbildung 4.17) genau ein Punkt  $X$  festgelegt, der diese MÖBIUS-Koordinaten hat. Über Lemma 4.32 ist dann

$$\mu_{BC}(X) = \frac{\mu_{AC}(X)}{\mu_{AB}(X)} = \frac{\xi_C}{\xi_A} \cdot \frac{\xi_A}{\xi_B} = \frac{\xi_C}{\xi_B},$$

sodaß also  $\sigma(X) := (\xi_A : \xi_B : \xi_C)$  ist. □

Man erhält für die Punkte des Koordinatensystems:

$$\begin{aligned} \sigma(A) &= (1 : 0 : 0) \\ \sigma(B) &= (0 : 1 : 0) \\ \sigma(C) &= (0 : 0 : 1) \\ \sigma(E) &= (1 : 1 : 1). \end{aligned}$$

### Ebene Geraden-Koordinaten

Die Überlegungen zu den Punkt-Koordinaten lassen sich eben dualisieren. Wir erhalten damit homogene Koordinaten für Geraden in der Ebene. Die wesentlichen Schritte seien kurz erläutert. (Abbildung 4.18) In einem Strahlenbüschel  $F$  legen

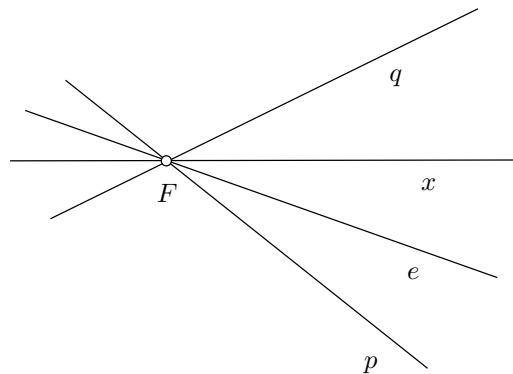


Abbildung 4.18

die Strahlen  $p, q, e$  MÖBIUS-Koordinaten  $\mu_{pq}$  fest mit

$$\mu_{pq}(p) = 0, \mu_{pq}(q) = \infty, \mu_{pq}(e) = 1.$$

Dafür ist wieder

$$\mu_{pq}(x) \cdot \mu_{qp}(x) = 1.$$

Vier Geraden  $a, b, c, e$  in allgemeiner Lage legen ein Geraden-Koordinatensystem

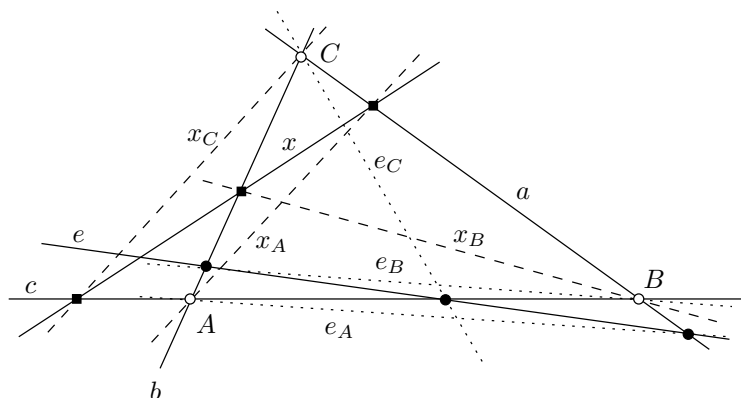


Abbildung 4.19

fest.  $a, b, c$  betrachten wir als die Seiten eines “Koordinaten-Dreiecks” mit Gegenecken  $A, B, C$ . Darin wirkt  $e$  als “Einheitsgerade”. Die Schnittpunkte von  $e$  mit den Seiten verbinden sich mit den Gegenecken zu Geraden  $e_A, e_B, e_C$ . (Siehe Abbildung 4.19.) In jeder Dreieckseite sind damit drei Geraden festgelegt, etwa in  $A$  die Geraden  $b, c$  und  $e_A$ , die damit MÖBIUS-Koordinaten  $\mu_{bc}$  bzw.  $\mu_{cb}$  im Büschel  $A$  bestimmen. Wie die Einheitsgerade  $e$  liefert auch jede beliebige Gerade  $x$  in jedem dieser Büschel eine Gerade  $x_A, x_B$  bzw.  $x_C$  und wir bekommen analog die sechs MÖBIUS-Koordinaten-Werte

$$\mu(x) = (\mu_{ab}(x_C), \mu_{bc}(x_A), \mu_{ca}(x_B), \mu_{ba}(x_C), \mu_{ac}(x_B), \mu_{cb}(x_A)).$$

Wir notieren wieder abkürzend:

$$\mu_{ab}(x) := \mu_{ab}(x_C) \quad \text{etc.}$$

Völlig analog zu oben beweist man dafür

**Lemma 4.34** 1. Für  $p, q \in \{a, b, c\}$  ist

$$\mu_{ab}(x) \cdot \mu_{ba}(x) = 1.$$

2. Es gelten die Relationen

$$\begin{aligned} \mu_{ab}(x) \cdot \mu_{bc}(x) \cdot \mu_{ca}(x) &= 1 \\ \mu_{ba}(x) \cdot \mu_{ac}(x) \cdot \mu_{cb}(x) &= 1. \end{aligned}$$

3. Für jede Permutation  $(p, q, r)$  von  $(a, b, c)$  ist

$$\frac{\mu_{pq}(x)}{\mu_{pr}(x)} = \mu_{rq}(x).$$

Darüber erhalten wir wieder homogene “Geraden-Koordinaten:”

**Satz 4.35** Für jede Gerade  $x$  der Ebene liefert die Zuordnung  $x \mapsto \sigma(x)$  mit

$$\sigma(x) := (\xi_a : \xi_b : \xi_c) = (1 : \mu_{ab}(x) : \mu_{ac}(x))$$

homogene Geraden-Koordinaten für  $x$ , mit der sie charakterisierenden Eigenschaft, daß für alle  $x$ , alle  $p, q \in \{a, b, c\}$ ,  $p \neq q$

$$\frac{\xi_q}{\xi_p} = \mu_{pq}(x).$$

Man erhält für die Geraden des Koordinatensystems:

$$\begin{aligned} \sigma(a) &= (1 : 0 : 0) \\ \sigma(b) &= (0 : 1 : 0) \\ \sigma(c) &= (0 : 0 : 1) \\ \sigma(e) &= (1 : 1 : 1). \end{aligned}$$

**Punkt-Geraden-Koordinaten**

Koordinaten sind zum Rechnen da und die einfachste Beziehung, die es auszudrücken gilt, ist die Inzidenz von Punkt und Gerade. Wie dies in Formeln aussieht, hängt natürlich davon ab, wie sich die Systeme zum Messen von Punkten und von Geraden zueinander verhalten. Die einfachste Formel erhält man, wenn man vom selben Drei-Eck/Seit für beide Systeme ausgeht und Einheitspunkt  $E$  bzw. Einheitsgerade  $e$  dazu "harmonisch" wählt. Zur Klärung, was damit gemeint ist, brauchen wir folgendes

**Lemma 4.36** Gegeben sei ein Dreieck  $ABC$  mit Gegenseiten  $a, b, c$ , auf diesen je zwei Punkte  $+E_a, -E_a$ , bzw.  $+E_b, -E_b$  bzw.  $+E_c, -E_c$ , die durch die Dreiecksecken je harmonisch getrennt werden. Dann gilt:

Gehen die Verbindungsgeraden von  $A$  und  $+E_a$  bzw. von  $B$  und  $+E_b$  bzw. von  $C$  und  $+E_c$  durch einen Punkt  $E$ , so liegen die Punkte  $-E_a, -E_b, -E_c$  auf einer Geraden  $e$  und umgekehrt.

**Bezeichnung 4.37** In der Situation von Lemma 4.36 nennen wir das Paar  $(E, e)$  "harmonisch" bezüglich des gegebenen Dreiecks oder nach PONCELET "trilinear polar".

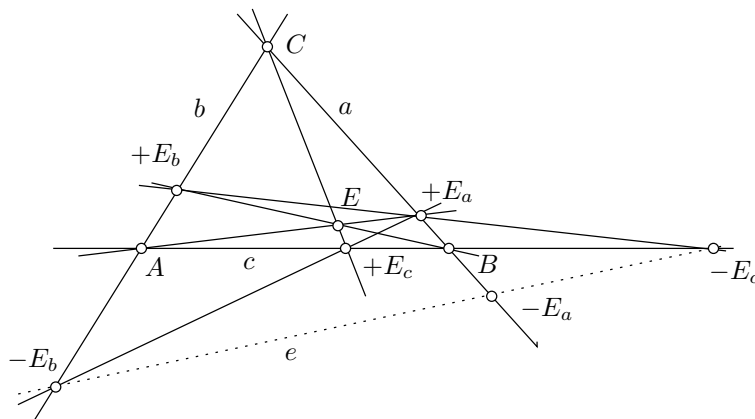


Abbildung 4.20

**Beweis:** (zu Lemma 4.36, siehe Abbildung 4.20) Mit dem Viereck  $B, +E_c, E, +E_a$  erzeuge den harmonischen Wurf  $(C, +E_b, A, -E_b)$ . Mit dem Viereck  $C, +E_a, E, +E_b$  erzeuge den harmonischen Wurf  $(A, +E_c, B, -E_c)$ . Projiziere diesen Wurf aus  $-E_b$  auf die Seite  $a = CB$ . Dies ergibt einen harmonischen Wurf mit den Punkten  $C, +E_a, B$  und damit muß der vierte Punkt  $-E_a$  eben mit  $-E_b$  und  $-E_c$  kollinear sein. Analog schließt man in die andere Richtung.  $\square$

**Definition 4.38** Ein Drei-Eck/Seite mit einem dazu harmonisch liegenden Paar  $(E, e)$  von "Einheits-Punkt" und "Einheits-Gerade" nennen wir ein "harmonisches Punkt-Geraden-Koordinatensystem (P-G-System) in der Ebene.

**Bemerkung 4.39** Durch ein harmonisches P-G-System ist eine elliptische Polarität bestimmt, für die das Koordinaten-Dreieck ein Polardreieck und  $(E, e)$  ein weiteres Paar ist.

Solche harmonischen Punkt-Geraden-Systeme seien den weiteren Überlegungen zugrunde gelegt.

Entsprechend der Festlegungen bei dem Punkt- bzw. Geraden-System haben wir dann

**Lemma 4.40** Bezeichnen  $+E_a, +E_b, +E_c$  die  $(+1)$ -Punkte, bzw.  $-E_a, -E_b, -E_c$  die  $(-1)$ -Punkte im P-System und analog  $+e_A, +e_B, +e_C$  die  $(+1)$ -Geraden, bzw.  $-e_A, -e_B, -e_C$  die  $(-1)$ -Geraden im G-System, so gelten:

1.  $+E_c$  und  $-e_C$  sind inzident, dito  $-E_c$  und  $+e_C$ .
2. Ist  $X$  ein allgemeiner Punkt,  $x_C := CX$ , dann ist  $\mu_{AB}(X) = -\mu_{ba}(x_C)$ .  
Ist  $x$  eine allgemeine Gerade,  $X_c := cx$ , dann ist  $\mu_{ab}(x) = -\mu_{BA}(X_c)$ .

Sinngemäß gilt dies auch für die anderen Ecken und Kanten.

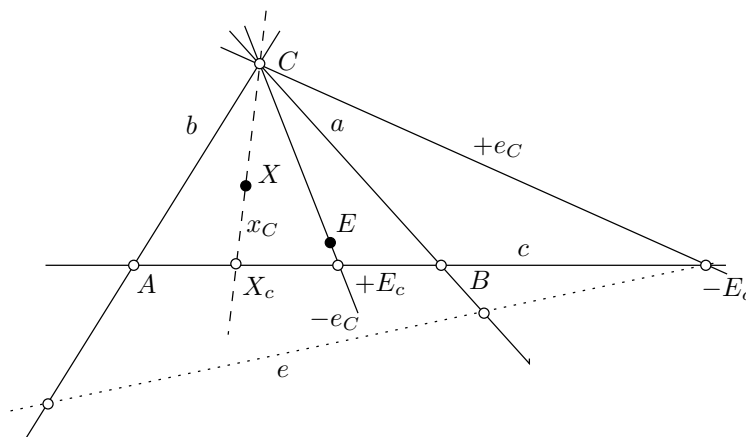


Abbildung 4.21

**Beweis:** Wir notieren nur den wesentlichen Schritt, siehe Abbildung 4.21. Per Schein erhalten wir die Projektivität

$$c(A, B, X_c, +E_c) \bar{\wedge} C(b, a, x_C, -e_C),$$

woraus man über die Darstellung als gebrochen lineare Funktion sofort die erste Behauptung von 2. abliest.  $\square$

Damit folgt nun

**Satz 4.41** *Bezüglich eines harmonischen Koordinatensystems habe ein Punkt  $X$  die homogenen Koordinaten  $\sigma(X) = (\xi_A : \xi_B : \xi_C)$  und eine Gerade  $y$  die homogenen Koordinaten  $\sigma(y) = (\eta_a : \eta_b : \eta_c)$ . Dann sind  $X$  und  $y$  genau dann inzident, wenn*

$$\xi_A \cdot \eta_a + \xi_B \cdot \eta_b + \xi_C \cdot \eta_c = 0$$

ist.

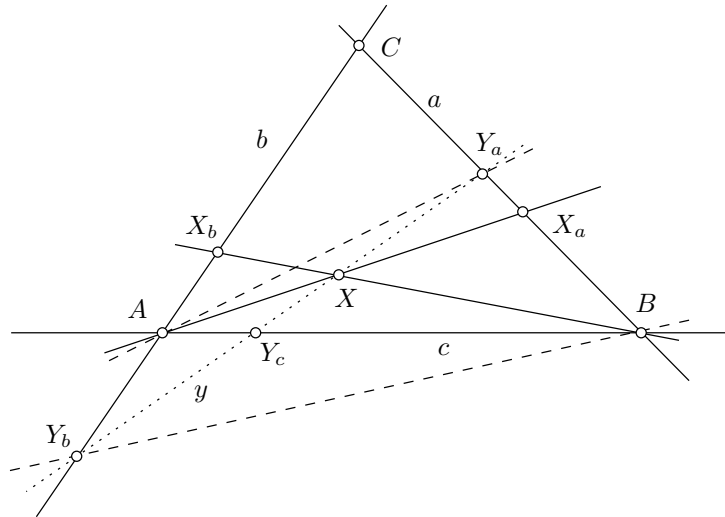


Abbildung 4.22

**Beweis:** (Siehe Abbildung 4.22.) Ein auf  $y$  wandernder Punkt  $X$  vermittelt eine Projektivität zwischen den Punktreihen  $a, b$  über

$$a(X_a) \stackrel{A}{\bar{\wedge}} y(X) \stackrel{B}{\bar{\wedge}} b(X_b).$$

Dafür gilt genauer

$$a(B, C, Y_a, X_a) \stackrel{A}{\bar{\wedge}} y(Y_c, Y_b, Y_a, X) \stackrel{B}{\bar{\wedge}} b(A, Y_b, C, X_b).$$

In den Punkt-Koordinaten  $\mu_{BC}$  auf  $a$  bzw.  $\mu_{AC}$  auf  $b$  wird diese Projektivität dargestellt durch eine Funktion der Form

$$\mu_{AC}(X_b) = \frac{\alpha \cdot \mu_{BC}(X_a) + \beta}{\gamma \cdot \mu_{BC}(X_a) + \delta}.$$

Dabei entsprechen sich die Koordinatenwerte folgendermaßen:

$$\begin{aligned} \mu_{BC}(B) = 0 &\quad \mapsto \quad \mu_{AC}(A) = 0 \\ \mu_{BC}(C) = \infty &\quad \mapsto \quad \mu_{AC}(Y_b) \\ \mu_{BC}(Y_a) &\quad \mapsto \quad \mu_{AC}(C) = \infty \\ \mu_{BC}(X_a) &\quad \mapsto \quad \mu_{AC}(X_b). \end{aligned}$$

Aus Lemma 4.40 folgt zudem

$$\begin{aligned} \mu_{BC}(Y_a) &= -\mu_{cb}(y) \\ \mu_{AC}(Y_b) &= -\mu_{ca}(y), \end{aligned}$$

ferner ist nach Definition

$$\begin{aligned}\mu_{BC}(X_a) &= \mu_{BC}(X) \\ \mu_{AC}(X_b) &= \mu_{AC}(X).\end{aligned}$$

Daraus ergibt sich

$$\alpha = -\mu_{ca}(y), \beta = 0, \gamma = 1, \delta = +\mu_{cb}(y),$$

d.h.

$$\mu_{AC}(X) = \frac{-\mu_{ca}(y) \cdot \mu_{BC}(X)}{\mu_{BC}(X) + \mu_{cb}(y)}.$$

Einsetzen der homogenen Koordinaten

$$\begin{aligned}\mu_{AC}(X) &= \frac{\xi_C}{\xi_A}, & \mu_{BC}(X) &= \frac{\xi_C}{\xi_B} \\ \mu_{ca}(y) &= \frac{\eta_a}{\eta_c}, & \mu_{cb}(y) &= \frac{\eta_b}{\eta_c}\end{aligned}$$

liefert

$$\xi_A \cdot \eta_a + \xi_B \cdot \eta_b + \xi_C \cdot \eta_c = 0,$$

womit die eine Richtung bewiesen ist.

Für die Umkehrung fixieren wir zunächst die Gerade  $y$  mit homogenen Koordinaten  $(\eta_a : \eta_b : \eta_c)$ . Deren Schnittpunkte mit  $a, b$  seien wieder  $Y_a, Y_b$ , für deren Koordinaten dann wieder die oben abgeleiteten Beziehungen gelten. Nun betrachten wir die Projektivität  $\varphi : a(X_a) \bar{\wedge} b(X_b)$ , die vermittelt wird von der Formel

$$\mu_{AC}(X_b) = \frac{\mu_{AC}(Y_b) \cdot \mu_{BC}(X_a)}{\mu_{BC}(X_a) - \mu_{BC}(Y_a)}.$$

Man rechnet sofort nach:

Gilt für einen Punkt  $X$  die Gleichung

$$\xi_A \cdot \eta_a + \xi_B \cdot \eta_b + \xi_C \cdot \eta_c = 0,$$

so sind seine Projektionspunkte  $X_a, X_b$  ein Paar von  $\varphi$ .

Nun ist  $\varphi(B) = A$ , somit liegt der Schnittpunkt  $X$  der Geraden  $AX_a$  und  $BX_b$  auf der Kreuzlinie von  $\varphi$ . Die geht aber durch den Bild- und den Urbildpunkt des  $a$  und  $b$  gemeinsamen Punktes  $C$ , d.h. durch die Punkte  $\varphi(C) = Y_b$  und  $\varphi^{-1}(C) = Y_a$ . Folglich ist diese Kreuzlinie gerade unser  $y$  und damit  $X$  auf  $y$ .  $\square$

Homogene Koordinaten sind Äquivalenzklassen von Vektoren  $\mathbf{x} = (\xi_1, \xi_2, \xi_3)$  aus dem  $\mathbb{R}^3$ , wobei jeder solche Vektor  $\neq 0$  die Klasse

$$(\xi_1 : \xi_2 : \xi_3) := \{\lambda \mathbf{x} \mid \lambda \in \mathbb{R}, \lambda \neq 0\}$$

erzeugt.

Wir werden nicht sauber zwischen den homogenen Vektoren, d.h. den Äquivalenzklassen und den sie erzeugenden Repräsentanten  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$  unterscheiden. Hierbei ist jedoch bei Gleichungen daran zu denken, daß die Gleichheit der Klassen nur Äquivalenz, also i.a. nicht Gleichheit für die Repräsentanten bedeutet. Dennoch ist es oft bequem mit Repräsentanten zu rechnen, da man hier die Sprache der linearen Algebra verwenden kann. Bezeichnen wir mit  $\langle \ , \ \rangle$  das (übliche) Skalarprodukt im  $\mathbb{R}^3$ , so kann man Satz 4.41 damit notieren als

**Korollar 4.42** *Ein Punkt  $X$  und eine Gerade  $y$  sind inzident genau, wenn*

$$\langle \sigma(X), \sigma(y) \rangle = 0.$$



Hier sind dann natürlich  $\sigma(X)$ ,  $\sigma(y)$  als Repräsentanten zu lesen, wobei es offensichtlich nicht darauf ankommt, welche Repräsentanten gewählt sind. Wenden wir dies an!

**Satz 4.43** 1. Zwei Punkte (zwei Geraden) sind genau dann verschieden, wenn ihre homogenen Koordinaten linear unabhängig sind.

2. Sind  $X_1$  und  $X_2$  verschiedene Punkte, so durchlaufen die Punkte  $Y$  mit Koordinaten

$$\sigma(Y) = \lambda\sigma(X_1) + \mu\sigma(X_2) \quad (\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2, \neq (0, 0)$$

genau die Verbindungsgerade.

Analoges für Büschel.

**Beweis:** Für die Verbindungsgerade  $y := X_1X_2$  gilt nach Korollar 4.42

$$\langle \sigma(y), \sigma(X_i) \rangle = 0 \quad (i = 1, 2),$$

wodurch  $\sigma(y)$  (als Klasse) eindeutig bestimmt ist; der Rest der Behauptungen folgt dann wieder mit Korollar 4.42 aus der linearen Algebra.  $\square$

## Koordinatendarstellung von Projektivitäten

**Satz 4.44** Bezüglich eines harmonischen Koordinatensystems in der Ebene werden Projektivitäten (in der Ebene) genau durch reguläre  $3 \times 3$ -Matrizen dargestellt. Zwei solche Matrizen stellen genau dann die selbe Projektivität dar, wenn sie bis auf einen Skalarfaktor  $\neq 0$  übereinstimmen. Genauer gilt - es bezeichne  $A^T$  die transponierte Matrix -

1. Eine Kollineation  $\alpha : X \mapsto X', y \mapsto y'$  wird dargestellt durch

$$\begin{aligned} \sigma(X') &= A\sigma(X) \\ \sigma(y') &= (A^{-1})^T\sigma(y). \end{aligned}$$

2. Eine Korrelation  $\pi : X \mapsto x', y \mapsto Y'$  wird dargestellt durch

$$\begin{aligned} \sigma(x') &= A\sigma(X) \\ \sigma(Y') &= (A^{-1})^T\sigma(y). \end{aligned}$$

3. So erhält man genau alle Projektivitäten.

4. Die inversen Matrizen beschreiben entsprechend die inversen Projektivitäten.

**Bemerkung 4.45** Kollineationen und Korrelationen dargestellt über Koordinaten unterscheiden sich also nur durch die Interpretation der Bildvektoren.

Man könnte - muß aber nicht - Punkte stets als Spalten, Geraden stets als Zeilen notieren, und erhielte einen gleichwertigen etwas anderen Formalismus. Hier wäre dann bei der Korrelation noch ein "Transponieren" einzuschieben.

**Beweis:** (Von Satz 4.44)

a)  $A$  sei eine reguläre  $3 \times 3$ -Matrix. Dann sind die durch  $A$  bzw.  $(A^{-1})^T$  erklärten Abbildungen bijektiv, wobei jeweils Unterräume auf Unterräume gleicher Dimension abgebildet werden. Damit vermittelt die Formel von 1. tatsächlich eine Abbildung von Punkten auf Punkte und von Geraden auf Geraden, bzw. die von 2. entsprechend über Kreuz. Diese Abbildung ist inzidentreu. Denn es

sind nach Korollar 4.42  $X$  und  $y$  genau dann inzident, wenn  $\langle \sigma(X), \sigma(y) \rangle = 0$ . Damit folgt die Inzidenztreue bei 1. (für Kollineationen) aus

$$\langle \sigma(X'), \sigma(y') \rangle = \langle (A\sigma(X), (A^{-1})^T \sigma(y)) \rangle = \langle A^{-1}A\sigma(X), \sigma(y) \rangle = \langle \sigma(X), \sigma(y) \rangle,$$

bzw. analog bei 2. für Korrelationen.

Reguläre Matrizen erzeugen also auf diese Weise Kollineationen und Korrelationen.

- b) *Jede Projektivität läßt sich so darstellen:* Es seien  $(X_i, X'_i)$  ( $i = 1, \dots, 4$ ) vier Punkte -Paare, die den Anforderungen des Fundamentalsatz genügen und damit genau eine Kollineation festlegen. (Für Korrelationen geht alles analog.) Die Punkte  $X_i$  sind in allgemeiner Lage, zugehörige Koordinatenvektoren  $\mathbf{x}_i$  also zu je dreien linear unabhängig. Somit existieren eindeutig bestimmte Parameter  $\lambda_i$ , sodaß

$$\mathbf{x}_4 = \lambda_1 \mathbf{x}_1 + \lambda_2 \mathbf{x}_2 + \lambda_3 \mathbf{x}_3, \quad \text{wobei alle } \lambda_i \neq 0.$$

Dann kann man aber gleich  $\lambda_i \mathbf{x}_i$  statt  $\mathbf{x}_i$  als Repräsentanten wählen, womit sich dann

$$\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 + \mathbf{x}_3$$

ergibt. Ebenso kann man bei den Bildvektoren verfahren und erhält nach richtiger Normierung

$$\mathbf{x}'_4 = \mathbf{x}'_1 + \mathbf{x}'_2 + \mathbf{x}'_3.$$

Dann existiert eine eindeutig bestimmte Matrix  $A$  mit

$$A\mathbf{x}_i = \mathbf{x}'_i \quad (i = 1, 2, 3).$$

Sie ist regulär und erfüllt trivialerweise auch

$$A\mathbf{x}_4 = \mathbf{x}'_4.$$

Sie stellt dann die gesuchte Kollineation dar.

Die Aussage über die Inversen sei als Übung gelassen. □

### Darstellung spezieller Projektivitäten

Für eine Polarität  $\pi$  ist ja  $\pi^2 = \text{id}$  und die Identität wird dargestellt durch  $A = \lambda I$ , wobei  $I$  die Einheitsmatrix ist und  $\lambda \in \mathbb{R}, \neq 0$ . Nach Satz 4.44 haben wir für eine zweifach angewendete Korrelation  $\pi$ :

$$\begin{array}{ccc} X & \xrightarrow{\pi} & y & \xrightarrow{\pi} & Z \\ \sigma(X) & \mapsto & A\sigma(X) & \mapsto & (A^{-1})^T A\sigma(X) \end{array}$$

bzw.

$$\begin{array}{ccc} x & \xrightarrow{\pi} & Y & \xrightarrow{\pi} & z \\ \sigma(x) & \mapsto & (A^{-1})^T \sigma(x) & \mapsto & A(A^{-1})^T \sigma(x), \end{array}$$

sodaß wir bekommen:

Die Matrix  $A$  stellt im Sinne von Satz 4.44.2. eine Polarität dar, wenn mit  $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}, \neq 0$  gilt:

$$(A^{-1})^T A = \lambda I, \quad A(A^{-1})^T = \lambda' I.$$

Dies ist äquivalent zu

$$A = \lambda A^T \quad \text{bzw.} \quad A = \lambda' A^T,$$

was bei den hier vorliegenden  $3 \times 3$ -Matrizen genau für  $\lambda = \lambda' = 1$  lösbar ist. Damit haben wir

**Satz 4.46** Im Sinne von Satz 4.44.2. werden Polaritäten in der Ebene genau durch symmetrische reguläre  $3 \times 3$ -Matrizen dargestellt.

Über die Inzidenzrelation von Korollar 4.42 erhält man damit

**Satz 4.47** Die singulären Punkte einer durch die reguläre symmetrische Matrix  $A$  dargestellten Polarität erfüllen die Gleichung zweiten Grades:

$$\langle \sigma(X), A\sigma(X) \rangle = 0,$$

sind also Kegelschnitte.

Eine entsprechend Satz 4.44.1 durch die Matrix  $A$  dargestellte Kollineation  $\alpha$  hat offenbar genau dann den Punkt  $X_0$  zum Fixpunkt, wenn mit einem Faktor  $\mu \neq 0$  für seinen Koordinatenvektor  $\mathbf{x}_0$  gilt

$$\mu \cdot \mathbf{x}_0 = A\mathbf{x}_0,$$

d.h. wenn  $\mathbf{x}_0$  Eigenvektor von  $A$ . Dies ist wieder eine Eigenschaft, die der entsprechenden Äquivalenzklasse zukommt, also den homogenen Koordinaten von  $X_0$ . Hieraus gewinnt man leicht den folgenden

**Satz 4.48** Die Kollineation  $\alpha$  sei entsprechend Satz 4.44.1 durch die Matrix  $A$  dargestellt. Dann gelten:

1. Ein Punkt  $X$  ist genau dann Fixpunkt von  $\alpha$ , wenn  $\sigma(X)$  Eigenvektor von  $A$  ist.
2. Eine Gerade  $y$  ist genau dann Fixgerade von  $\alpha$ , wenn  $\sigma(y)$  Eigenvektor von  $(A^{-1})^T$  ist.
3. Fixpunktgeraden entsprechen als Punktreihen zweidimensionalen Eigenräumen von  $A$ , Fixstrahlenbüschel entsprechen (als Geradengebilde) zweidimensionalen Eigenräumen von  $(A^{-1})^T$ .

Hiermit lassen sich beispielsweise die *zentralen Kollineationen*, bei denen das Zentrum nicht auf der Achse liegt, dadurch charakterisieren, daß die darstellende Matrix einen einfachen und einen doppelten Eigenwert (mit 2-dimensionalem Eigenraum) besitzt.

Ferner erhält man über die Jordansche Normalform einer die Involution  $\alpha$  darstellende Matrix, daß diese diagonalisierbar sein muß und daß für deren Eigenwerte  $\lambda_i$  gilt:

$$\lambda_1^2 = \lambda_2^2 = \lambda_3^2 > 0.$$

Hieraus berechnet man leicht, daß  $\alpha$  entweder die Identität oder eine harmonische Spiegelung sein muß, was wir ja schon synthetisch nachgewiesen hatten.

### Allgemeine Punkt-Geraden-Koordinaten in der Ebene.

Zum Abschluß seien noch die Fragen der Koordinatentransformation und der Inzidenzrelation bei allgemeiner Lage der Koordinatensysteme behandelt.

Zur ersten Frage betrachten wir zwei harmonische Punkt-Geraden-Systeme:

Das erste habe als Grunddreieck  $ABC$  mit Gegenseiten  $abc$ , dazu das trilinear polare Einheitenpaar  $(E, e)$ . Die daran gewonnenen homogenen Koordinaten seien  $\sigma(X)$  bzw.  $\sigma(y)$ . Analog sei das zweite gegeben durch  $A'B'C'$ ,  $a'b'c'$  und Einheiten  $E', e'$ . Die zugehörigen Koordinaten seien  $\sigma'(X)$  bzw.  $\sigma'(y)$ .

Nach dem Fundamentalsatz gibt es genau eine Kollineation  $\alpha$ , die das allgemeine Viereck  $ABCE$  entsprechend in  $A'B'C'E'$  überführt. Wegen der Inzidenztreue gilt dann unter  $\alpha$  auch  $a \mapsto a'$ ,  $b \mapsto b'$ ,  $c \mapsto c'$ . Ferner entsteht die trilineare Polare

$e$  aus  $E$  und  $ABC$  durch harmonische Spiegelung und Analoges gilt für  $e'$ , sodaß, da harmonische Lage unter der Kollineation  $\alpha$  erhalten bleibt, auch noch  $e \mapsto e'$  gilt. Die inverse Kollineation  $\beta := \alpha^{-1}$  überführt damit insbesondere das Vierseit  $a'b'c'e'$  in das Vierseit  $abce$ . Nach Satz 4.44 gibt es dazu reguläre  $3 \times 3$  - Matrizen  $M, N$ , mit denen für Punkte  $X$  und Geraden  $y$  gelten

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha(X)) &= M \sigma(X), \\ \sigma'(\beta(y)) &= N \sigma'(y).\end{aligned}$$

Die Koordinatenabbildung beruht auf harmonischer Lage, die unter Kollineationen erhalten bleibt (siehe Satz 3.17). Damit bekommen wir für beliebige Punkte  $X$  und Geraden  $y$

$$\begin{aligned}\sigma'(\alpha(X)) &= \sigma(X), \\ \sigma(\beta(y)) &= \sigma'(y).\end{aligned}$$

Setzen wir dies in die vorige Darstellung ein, so folgen

$$\begin{aligned}\sigma(\alpha(X)) &= M \sigma'(\alpha(X)), \\ \sigma'(\beta(y)) &= N \sigma(\beta(y)).\end{aligned}$$

Da  $\alpha, \beta$  bijektiv sind, können wir umbezeichnen und erhalten

**Satz 4.49** *Mit den entsprechend Satz 4.44 aus den Koordinaten der Grundpunkte bzw. -geraden der beiden Koordinatensysteme konstruierten Matrizen  $M, N$  gelten für beliebige Punkte  $X$  und Geraden  $y$  die Formeln*

$$\begin{aligned}\sigma(X) &= M \sigma'(X), \\ \sigma'(y) &= N \sigma(y).\end{aligned}$$

Dabei ist  $N = M^T$ .

Die letzte Beziehung folgt so: Nach Satz 4.44 gilt für  $\alpha$  neben  $\sigma(\alpha(X)) = M \sigma(X)$ , auch  $\sigma(\alpha(y)) = (M^{-1})^T \sigma(y)$ , somit wegen  $\beta = \alpha^{-1}$

$$M^T \sigma(y) = \sigma(\beta(y)) = \sigma'(y).$$

□

Die Koordinatentransformation wird also in den homogenen Koordinaten durch eine lineare Transformation beschrieben.

Damit können wir nun auch die Formel für die Inzidenz von Punkt und Gerade angeben, wenn die Punkt-Koordinaten  $\sigma(X)$  zu Grundpunkten  $ABC, E$  und die Geraden-Koordinaten  $\sigma'(y)$  davon unabhängig zu Grundgeraden  $a'b'c', e'$  gewählt sind. Wir ergänzen beide Systeme jeweils zu einem harmonischen Punkt-Geraden-System und bilden zusätzlich die Geraden-Koordinaten zu dem aus  $A, B, C, \dots$  gewonnenen System und die Punkt-Koordinaten  $\sigma'(X)$  zu dem aus  $a', b', c', \dots$  gewonnenen System. Dafür gelten dann einmal die Beziehungen von Satz 4.49, ferner wird innerhalb jedes der Systeme die Inzidenz von Punkt  $X$  und Gerade  $y$  nach Korollar 4.42 beschrieben durch

$$0 = \langle \sigma(X), \sigma(y) \rangle = \langle \sigma'(X), \sigma'(y) \rangle.$$

Setzt man dies ineinander ein, so ergibt sich

**Satz 4.50** *Es seien  $\sigma(X)$  homogene Punkt-Koordinaten,  $\sigma'(y)$  homogene Geraden-Koordinaten. Für die zugehörigen harmonischen Punkt-Geraden-Systeme gelten die Formeln aus Satz 4.49. Mit den dort auftretenden Matrizen  $M, N$  gilt dann:  
Ein Punkt  $X$  und eine Gerade  $y$  sind genau dann inzident, wenn*

$$\langle \sigma(X), N^{-1}\sigma'(y) \rangle = 0 \quad \text{oder} \\ \langle M^{-1}\sigma(X), \sigma'(y) \rangle = 0.$$

Wegen  $M = N^T$  sind beide Formeln äquivalent.

Es sei bemerkt, daß für  $M^{-1}$  bzw.  $N^{-1}$  hier *jede* reguläre  $3 \times 3$ -Matrix auftreten kann.

Alles hier Dargestellte gilt mutatis mutandis ebenso in höheren Dimensionen.

