

5 Spezielle Geometrien

In Kapitel 3 hatten wir im Zusammenhang mit Messen den von FELIX KLEIN in seinem *Erlanger Programm* eingeschlagenen Weg formuliert:

Wähle eine Untergruppe \mathcal{B} aller Projektivitäten und nenne diese ausgewählten Projektivitäten "Kongruenzen" oder "Kongruenzabbildungen". Erkläre zwei Gebilde als "kongruent", wenn sie durch eine Kongruenzabbildung ineinander überführt werden können. Kongruente Strecken und Winkel, d.h. Segmente auf Punktreihen bzw. in Büscheln nennen wir "gleich groß".

Wir hatten dies dort nur verwendet, um einen etwas allgemeineren Begriff von der Größe von Strecken und Winkeln zu erhalten. Wir können aber natürlich auf diesem Hintergrund direkt metrische Geometrie in der Ebene - man könnte auch in den Raum gehen - betreiben, eben einen solchen allgemeineren Kongruenzbegriff verwendend. Wie beim Messen wird es darauf ankommen, die als Kongruenzabbildungen zugelassenen Kollineationen sinnvoll auszuwählen.

Die "klassischen" *nichteuklidischen Geometrien* also die *elliptische bzw. hyperbolische Geometrie* entstehen, wenn wir als Kongruenzen die Kollineationen wählen, die mit einer festgewählten elliptischen bzw. hyperbolischen Polarität vertauschbar sind. Sie haben mit der Euklidischen Geometrie gemeinsam, daß die Winkelmessung nach einer elliptischen, also periodischen Skala geschieht. Die Längenmessung erfolgt dagegen in der elliptischen Geometrie nach einer elliptischen (also periodischen) Skala, im hyperbolischen Fall nach einer hyperbolischen Skala (mit zwei Fixpunkten), und im Euklidischen natürlich nach der parabolischen Skala.

Zu jeder dieser Geometrien (auch der Euklidischen) gibt es eine "polare" Geometrie, die man formal durch Dualisieren erhält. Die elliptische geht dabei in sich selbst über. Bei den anderen beiden entstehen insofern etwas fremdartig scheinende Geometrien, als nun die Längenmessung stets nach der elliptischen Skala erfolgt, dagegen bei den Winkeln die hyperbolische Skala (mit zwei "Grenzwinkeln") im Falle der polarhyperbolischen Geometrie auftritt, bzw. die parabolische Skala (mit einem "unerreichbaren" Winkel) bei der Winkelmessung der polareuklidischen Geometrie.

Die hyperbolische Geometrie findet ihre natürliche Anwendung in der Relativitätstheorie, die polareuklidische etwa in der phänomenologischen Behandlung von Wachstumsvorgängen an Pflanzen.

Untersuchen wir zunächst die später als Kongruenzen benutzten Kollineationen.

Mit einer Polarität vertauschbare Kollineationen

Definition 5.1 *Es sei π eine Polarität. Eine Kollineation β heißt vertauschbar mit π oder " π -Kongruenz", wenn $\beta\pi = \pi\beta$.*

Man rechnet leicht nach, daß die π -Kongruenzen abgeschlossen sind unter Inversenbildung und Hintereinanderausführen, d.h. es gilt

Satz 5.2 *Zu einer festen Polarität π bilden die π -Kongruenzen eine Gruppe \mathcal{K} .*

Diese π -Kongruenzen sind die Gruppen, die uns die elliptische bzw. hyperbolische Geometrie liefern. Sie seien deshalb genauer studiert.

Satz 5.3 *π sei eine Polarität.*

1. *β ist genau dann eine π -Kongruenz, wenn für jedes π -polare Paar (G, g) auch $(\beta(G), \beta(g))$ polar unter π .*

Für das Weitere sei β eine π -Kongruenz. Dann gelten

2. *g ist genau dann reguläre Gerade zu π , wenn $\beta(g)$ regulär bezgl. π .*

3. Sind g eine reguläre Gerade zu π , η_g bzw. $\eta_{\beta(g)}$ die von π auf g bzw. $\beta(g)$ induzierten Involutionen, so ist

$$\beta\eta_g = \eta_{\beta(g)}\beta.$$

4. Ist g reguläre Gerade zu π , so sind die Involutionen η_g und $\eta_{\beta(g)}$ vom selben Typ.
5. Die Aussagen von 2. - 4. gelten sinngemäß für Punkte.

Beweis:

1. Ist β eine π -Kongruenz und $g = \pi(G)$, so ist

$$\pi(\beta(G)) = \pi\beta(G) = \beta\pi(G) = \beta(g),$$

d.h. $\beta(G)$ und $\beta(g)$ sind polar unter π .

Für die andere Richtung sind nach Voraussetzung für einen beliebigen Punkt G mit $g := \pi(G)$ auch $\beta(G)$ und $\beta(g)$ polar unter π , d.h.

$$\pi\beta(G) = \beta(g) = \beta\pi(G)$$

also stets $\pi\beta = \beta\pi$.

2.

$$g \text{ regulär} \iff \pi(g) \notin g \iff \pi\beta(g) = \beta\pi(g) \notin \beta(g) \iff \beta(g) \text{ regulär.}$$

3. Nach 2. ist mit g auch $\beta(g)$ regulär, sodaß beide Involutionen definiert sind. Nun ist für $X \in g$:

$$\beta(\eta_g(X)) = \beta(\pi(X) \vee g) = \beta\pi(X) \vee \beta(g) = \pi\beta(X) \vee \beta(g) = \eta_{\beta(g)}\beta(X).$$

4. Aus 3. folgt sofort, daß $\beta(F)$ Fixpunkt vom $\eta_{\beta(g)}$ ist, genau wenn F Fixpunkt von η_g , sodaß notwendig beide Involutionen vom selben Typ sind. \square

Dies bedeutet insbesondere, daß eine π -Kongruenz β die singulären Elemente von π wieder in solche überführt, also falls π hyperbolisch ist, die von π erzeugte Kurve 2-ter Ordnung als Ganzes, d.h. im allgemeinen nicht elementweise, festläßt. Ferner verträgt sich β mit allen von π auf regulären Geraden oder Punkten erzeugten Involutionen.

Aus Satz 5.3 folgt natürlich sofort, daß eine π -Kongruenz β jedes Polardreieck von π wieder in ein Polardreieck überführt, wobei sich noch die Involutionen auf dessen Kanten gemäß Satz 5.3.3. transformieren. Hier genügt aber schon viel weniger, um β als π -Kongruenz festzulegen.

Satz 5.4 *Es sei π eine Polarität, dazu ABC ein Polardreieck mit (polaren) Gegenseiten a, b, c und den darauf induzierten Involutionen η_a, η_b, η_c . Dann ist eine Kollineation β eine π -Kongruenz, wenn gelten:*

1. Das Bilddreieck $\beta(A)\beta(B)\beta(C)$ mit den Gegenseiten $\beta(a), \beta(b), \beta(c)$ ist ebenfalls Polardreieck von π und
2. für die Involutionen auf zwei Seiten, etwa a und b , gelten

$$\beta\eta_a = \eta_{\beta(a)}\beta \text{ und } \beta\eta_b = \eta_{\beta(b)}\beta.$$

Eine analoge Aussage läßt sich natürlich über die Involutionen in den Ecken A, B, C des Polardreiecks formulieren.

Beweis: Betrachten wir die Korrelation $\tau := \beta^{-1}\pi\beta$. Unsere Behauptung ist offenbar äquivalent zu $\tau = \pi$, was wir nun nachweisen.

Trivialerweise ist $\tau^2 = \text{id}$, somit τ eine Polarität.

Nach Voraussetzung ist $\pi(\beta(A)) = \beta(a)$ und somit

$$\tau(A) = \beta^{-1}\pi\beta(A) = \beta^{-1}\beta(a) = a,$$

und, da analoges für B, C gilt, ist also ABC ein Polardreieck für τ .

Sei nun X ein beliebiger Punkt auf a , $X_\tau := \tau(X) \vee a$ sein τ -konjugierter. Dann ist

$$\begin{aligned} \tau(X) \vee a &= \beta^{-1}\pi\beta(X) \vee a = \beta^{-1}(\pi\beta(X) \vee \beta(a)) = \\ &= \beta^{-1}(\eta_{\beta(a)}\beta(X)) = \beta^{-1}(\beta\eta_a(X)) = \eta_a(X). \end{aligned}$$

Analog schließt man für die Gerade b und erhält, daß π und τ auf zwei Kanten eines gemeinsamen Polardreiecks auch noch die selben Involutionen erzeugen. Über Satz 4.9 folgt dann $\tau = \pi$. Also ist β eine π -Kongruenz. \square

Von speziellem Interesse sind unter den π -Kongruenzen die Spiegelungen; aus ihnen werden wir nämlich alle π -Kongruenzen erzeugen können.

Satz und Definition 5.5 *Eine harmonische Spiegelung σ mit Zentrum Z und Achse z ist genau dann eine π -Kongruenz, wenn (Z, z) ein reguläres polares Paar von π ist. Ist dies der Fall, so heißt σ eine “ π -Spiegelung”.*

Beweis:

1. *Die Spiegelung σ sei eine π -Kongruenz:* Jede Gerade $y \in Z$ ist eine σ -Fixgerade. Dann ist $\sigma\pi(y) = \pi\sigma(y) = \pi(y)$, somit $\pi(y)$ ein σ -Fixpunkt und für (fast) alle $y \in Z$ somit $\pi(y)$ auf der Achse z von σ . Andererseits liegt wegen $y \in Z$ stets $\pi(y)$ auf $\pi(Z)$. Folglich ist $\pi(Z) = z$, d.h. Zentrum und Achse sind ein reguläres polares Paar.

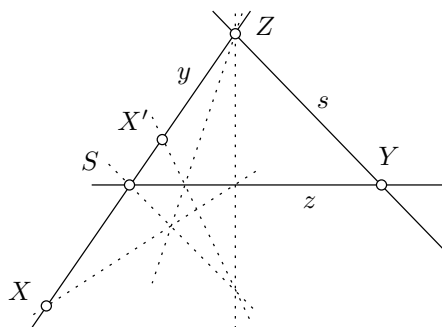


Abbildung 5.1

2. *(Z, z) sei ein reguläres polares Paar von π :* (Siehe Abbildung 5.1). Sei X beliebig, $\neq Z, \notin z$, ferner $y := ZX$, was z in S schneide. Ferner sei $Y := \pi(y)$ der zugehörige Pol, $s := \pi(S)$ die Polare und $X' = \sigma(X)$. Dann bilden also $ZXSX'$ einen harmonischen Wurf auf y . Weiter seien $x := \pi(X), x' := \pi(X')$. Dann haben wir die Beziehungen

$$\begin{aligned} y(ZXSX') &\stackrel{\sigma}{\wedge} y(ZX'SX) & \stackrel{\pi}{\wedge} Y(zx'sx), \\ y(ZXSX') &\stackrel{\pi}{\wedge} Y(zxsx') & \stackrel{\sigma}{\wedge} Y(zx'sx), \end{aligned}$$

was $\sigma\pi = \pi\sigma$ zeigt. \square

Es sei daran erinnert, daß Satz 4.30 über die drei Spiegelungen an einem Dreieck natürlich auch für π -Spiegelungen an einem Polardreieck gilt, d.h. das Produkt von zwei solchen ergibt die dritte, ferner kommutieren sie untereinander. Die Identität und die drei Spiegelungen an den polaren Paaren eines Polardreiecks lassen offenbar dieses Polardreieck fix. Sie sind auch die einzigen π -Kongruenzen mit dieser Eigenschaft. Es gilt

Satz 5.6 *Es sei ABC mit Gegenseiten abc ein Polardreieck zu π und β eine π -Kongruenz, für die A, B und C Fixpunkte sind. Dann ist β die Identität oder eine der drei π -Spiegelungen $\sigma_A, \sigma_B, \sigma_C$ an den polaren Paaren des Polardreiecks.*

Beweis: Nach Satz 5.3 ist β mit den von π auf den Seiten des Polardreiecks induzierten Involutionsen η_a, η_b, η_c vertauschbar. Betrachten wir zunächst exemplarisch η_c . (Siehe Abbildung 5.2.)

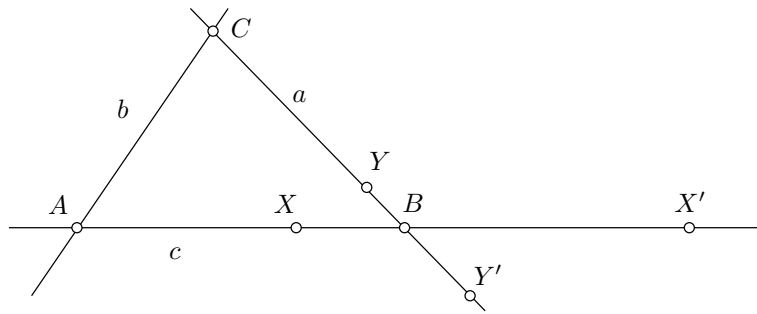


Abbildung 5.2

1. η_c ist elliptisch: Dann besitzt η_c eine harmonische Darstellung $(A, B), (X, X')$ durch zwei harmonisch getrennte Involutionspaare. Dabei ist das ungeordnete Paar $\{X, X'\}$ durch (A, B) eindeutig bestimmt. Dafür haben wir

$$\begin{aligned} c(A, B; X, X') & \stackrel{\eta_c}{\wedge} & c(B, A; X', X) & \stackrel{\beta}{\wedge} & c(B, A; \beta(X'), \beta(X)) \\ c(A, B; X, X') & \stackrel{\beta}{\wedge} & c(A, B; \beta(X), \beta(X')) & \stackrel{\eta_c}{\wedge} & c(B, A; \eta_c\beta(X), \eta_c\beta(X')). \end{aligned}$$

Da nach Voraussetzung $\eta_c\beta = \beta\eta_c$ ist, erhalten wir in beiden Fällen dasselbe, d.h.

$$\eta_c\beta(X) = \beta(X'), \quad \eta_c\beta(X') = \beta(X)$$

und somit ist $(\beta(X), \beta(X'))$ ein Involutionspaar von η_c , das nach obiger Herleitung von dem η_c -Paar (A, B) harmonisch getrennt wird. Folglich ist $\{X, X'\} = \{\beta(X), \beta(X')\}$.

2. η_c ist hyperbolisch mit Fixpunkten X, X' : Dann sind $(A, B), (X, X')$ wieder harmonisch getrennt und wir erhalten

$$\begin{aligned} c(A, B; X, X') & \stackrel{\eta_c}{\wedge} & c(B, A; X, X') & \stackrel{\beta}{\wedge} & c(B, A; \beta(X), \beta(X')) \\ c(A, B; X, X') & \stackrel{\beta}{\wedge} & c(A, B; \beta(X), \beta(X')) & \stackrel{\eta_c}{\wedge} & c(B, A; \eta_c\beta(X), \eta_c\beta(X')). \end{aligned}$$

Wie eben folgt

$$\eta_c\beta(X) = \beta(X), \quad \eta_c\beta(X') = \beta(X')$$

und damit sind $\beta(X)$ und $\beta(X')$ die Fixpunkte von η_c , also wieder $\{X, X'\} = \{\beta(X), \beta(X')\}$.

Somit haben wir:

Unabhängig vom Typ von η_c haben wir auf c zwei zu (A, B) harmonisch liegende Punkte (X, X') , sodaß

$$\{X, X'\} = \{\beta(X), \beta(X')\}.$$

Analog erhalten wir auf der Dreieckseite a zwei zu (B, C) harmonisch liegende Punkte (Y, Y') , sodaß

$$\{Y, Y'\} = \{\beta(Y), \beta(Y')\}.$$

(Siehe Abbildung 5.2). Die 4 Punkte X, X', Y, Y' formen ein allgemein liegendes Viereck und β bildet dessen Ecken unter einem der folgenden 4 Fälle ab:

$$\begin{array}{llll} 0 : & (X, X'; Y, Y') & \longmapsto & (X, X'; Y, Y') \\ 1 : & (X, X'; Y, Y') & \longmapsto & (X', X; Y, Y') \\ 2 : & (X, X'; Y, Y') & \longmapsto & (X, X'; Y', Y) \\ 3 : & (X, X'; Y, Y') & \longmapsto & (X', X; Y', Y) \end{array}$$

Dadurch ist nach dem Fundamentalsatz 4.2 jedesmal genau eine Kollineation β_i ($i = 0, 1, 2, 3$) bestimmt. Andererseits können wir diese Forderungen realisieren durch

$$\begin{array}{ll} \beta_0 & = \text{id}, \\ \beta_1 & = \sigma_A, \\ \beta_2 & = \sigma_C, \\ \beta_3 & = \sigma_B, \end{array}$$

womit unser Satz 5.6 erhalten ist. □

Es sei noch daran erinnert, daß eine reguläre Gerade u und ein darauf sitzender regulärer Punkt S stets ein Polardreieck festlegen (siehe Abbildung 5.3), das von “ u und S erzeugte Polardreieck”.

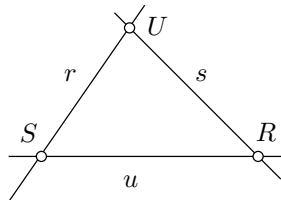


Abbildung 5.3

Sei nun β eine π -Kongruenz, u eine Gerade, $S \in u$ ein Punkt darauf, ferner $v := \beta(u), T := \beta(S)$, womit dann auch $T \in v$ gilt. Nach Satz 5.3 sind dann u und v bzw. S und T jeweils gleichzeitig regulär oder singulär und im regulären Falle haben auch die π -Involutionen auf u und v bzw. in S und T jeweils den selben Typ. Wenn wir also zu gegebenen Paaren $S \in u$ und $T \in v$ eine π -Kongruenz β suchen, die $\beta(u) = v, \beta(S) = T$ leistet, so haben wir diesen Sachverhalt zu berücksichtigen. Studieren wir zunächst zwei Spezialfälle.

Satz 5.7 1. Es seien q eine Gerade, darauf S, T zwei reguläre Punkte, deren π -Involutionen vom selben Typ sind. Dann existiert eine π -Spiegelung σ , die q als Fixgerade hat und $\sigma(S) = T$ leistet.

2. Es sei Q ein Punkt, dadurch s, t zwei reguläre Geraden, deren π -Involutionen vom selben Typ sind. Dann existiert eine π -Spiegelung σ , die Q als Fixpunkt hat und $\sigma(s) = t$ leistet.

Beweis: Die zweite Aussage ist dual zur ersten, sodaß es genügt diese zu beweisen.

1. q sei regulär, η_q sei elliptisch, also ohne singulären Punkt: Dann gibt es ein (S, T) harmonisch trennendes Involutionenpaar (Z, Z') von η_q . Dabei geht dann $z := \pi(Z)$ durch Z' und die Spiegelung σ_Z an (Z, z) ist π -Spiegelung, hat q als Fixstrahl und vertauscht S und T , leistet also das Gewünschte.
2. q sei regulär, η_q sei hyperbolisch mit Fixpunkten F_1, F_2 : Diese Fixpunkte sind die Schnittpunkte von q mit der zu π gehörenden Kurve \mathcal{Q} . Da S und T Involutionen vom selben Typ tragen, liegen sie entweder beide im Innern oder beide im Äußern von \mathcal{Q} , die Paare (F_1, F_2) und (S, T) trennen sich also nicht. Dann gibt es aber ein Paar (Z, Z') , das beide harmonisch trennt. Dabei sind (Z, Z') aber ein Paar der Involution η_q , d.h. es geht wieder die Polare $z := \pi(Z)$ durch Z' und wie eben folgt, daß die Spiegelung σ_Z an (Z, z) das Gewünschte leistet.
3. q sei singulär: Da S, T regulär sind, sind sie verschieden von dem Pol $Q := \pi(q)$, der ja auf q liegt. Bestimme Z , sodaß (S, T) und (Q, Z) harmonisch getrennt sind. Dann ist Z regulär, die Polare $z := \pi(Z)$ geht durch Q und damit leistet die Spiegelung σ_Z an (Z, z) wieder das Gewünschte. \square

Die bisherigen Überlegungen zu π -Kongruenzen können wir zusammenfassen zu

Satz 5.8 Zu einer Polarität π läßt sich jede π -Kongruenz als Produkt von höchstens drei π -Spiegelungen darstellen. Genauer gelten:

1. Sind u, v reguläre Geraden, $S \in u, T \in v$ reguläre Punkte, so gibt es genau dann eine π -Kongruenz β , die $\beta(u) = v, \beta(S) = T$ liefert, wenn die π -Involutionen auf u und v bzw. S und T jeweils vom selben Typ sind.
2. Unter den in 1. genannten Bedingungen gibt es genau vier π -Kongruenzen β_i ($i = 0, 1, 2, 3$), die $u \mapsto v, S \mapsto T$ abbilden. Dabei ist β_0 als Produkt von höchstens zwei π -Spiegelungen darstellbar und für $i = 1, 2, 3$ $\beta_i = \sigma_i \beta_0$, wobei $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$ die drei π -Spiegelungen an dem von v und T erzeugten Polardreieck sind.

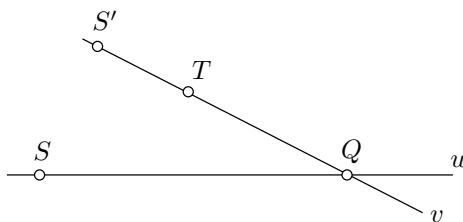


Abbildung 5.4

Beweis: Die eine Richtung von 1. folgt direkt aus Satz 5.3. Konstruieren wir also eine π -Kongruenz, die $u \mapsto v, S \mapsto T$ liefert (siehe Abbildung 5.4.) Sei $Q := uv$. Nach Satz 5.7.2. gibt es eine π -Spiegelung σ' , die $\sigma'(Q) = Q$ und $\sigma'(u) = v$ leistet. Dann ist $S' := \sigma'(S)$ ein regulärer Punkt von v , wobei die Involutionen von S und S' vom selben Typ sind, folglich auch die von S' und T . Also können wir noch den Satz 5.7.1. anwenden und erhalten eine π -Spiegelung σ'' , die v als Fixgerade hat und $\sigma''(S') = T$ liefert. Dann gilt für $\beta_0 := \sigma''\sigma'$:

$$\begin{aligned} \beta_0(u) &= \sigma''\sigma'(u) = \sigma''(v) = v \\ \beta_0(S) &= \sigma''\sigma'(S) = \sigma''(S') = T. \end{aligned}$$

Sei nun β eine weitere π -Kongruenz, die $u \mapsto v, S \mapsto T$ liefert. Dann gilt offenbar für

$$\gamma := \beta\beta_0^{-1} : v \mapsto v, T \mapsto T$$

und damit muß γ sogar die Ecken und Seiten des von v und T erzeugten Polardreiecks als Fixelemente haben, ist folglich nach Satz 5.6 die Identität oder eine der drei Spiegelungen, die zu diesem Polardreieck gehören. Jede der hier betrachteten π -Kongruenzen ist also als Produkt von höchstens drei π -Spiegelungen darstellbar. Trivialerweise sind damit auch alle π -Kongruenzen erfasst. \square

Ist die Polarität *elliptisch*, so tragen alle Punkte und Geraden elliptische Involutionsen und die Bedingung von Satz 5.8.1. ist von alleine erfüllt. Wir erhalten die "*elliptische Geometrie*", die als "*Welt*" \mathcal{E} die ganze projektive Ebene hat und als Kongruenzen alle π -Kongruenzen.

Ist die Polarität *hyperbolisch*, so erzeugt sie eine Kurve \mathcal{Q} 2-ter Ordnung. Punkte tragen elliptische oder hyperbolische Involutionsen je nachdem, ob sie im Inneren oder im Außengebiet der Kurve liegen, analog unterscheiden sich die Involutionsen auf Geraden, die die Kurve zweimal bzw. gar nicht treffen. Wegen Satz 5.8.1. ist es also nicht für je zwei Punkte bzw. Geraden möglich, eine π -Kongruenz zu finden, die die erste in die zweite überführt. Man trägt dieser Situation Rechnung, indem man nicht mehr die ganze projektive Ebene sondern nur noch einen Teil als "*Welt*" benutzt, aber wieder als Kongruenzen alle π -Kongruenzen. Es ergeben sich so die "*hyperbolische*" bzw. "*polarhyperbolische*" Geometrie.

Die *Euklidische* bzw. *polareuklidische* Geometrie sind auf diese Weise nicht direkt zu erhalten, sondern stellen Grenzfälle zwischen der elliptischen und der hyperbolischen bzw. polarhyperbolischen Geometrie bei Ausartung der Polarität π dar. Dies sei jedoch nicht weiter verfolgt, sondern wir schlagen einen direkten Weg ein, um aus der projektiven Geometrie die Euklidische und die polareuklidische Geometrie zu gewinnen.

Dazu sei daran erinnert, daß wir als Modell der projektiven Ebene die Euklidische Ebene \mathcal{E} um eine "*Ferngerade*" erweitert, und später über den Involutionssatz am Viereck und den Satz über den Höhenschnittpunkt im Dreieck gesehen hatten, daß der rechte Winkel in der Euklidischen Ebene eine elliptische Involution auf der Ferngeraden induziert. Dies wird nun ausgenutzt.

Die Euklidischen und Polareuklidischen Kongruenzen

Zunächst verschaffen wir uns analog zu oben die Gruppe der "richtigen" Kongruenzen, die unsere Euklidischen Kongruenz-Abbildungen werden sollen. Die polareuklidische Situation werden wir dann später daraus durch Dualisieren erhalten.

Euklidische Kongruenzen

Bezeichnung 5.9 Wir fixieren eine Gerade f , genannt "*Ferngerade*", darauf eine elliptische Punkt-Involution ρ . Punkte-Paare von ρ auf f nennen wir "*konjugiert*", Geraden $u, v, \neq f$ nennen wir "*konjugiert*", wenn sie f in konjugierten Punkten schneiden. Ein Punkt $P \in f$ heißt "*Pol*" einer Geraden $p \neq f$, wenn p durch den zu P bezüglich ρ konjugierten Punkt von f geht, den Schnittpunkt einer Geraden $g \neq f$ mit f nennen wir den "*Fernpunkt*" von g .

Man stelle sich vor, daß ρ die "Rechtwinkel - Involution" ist, sodaß also konjugierte Geraden aufeinander senkrecht stehen ("orthogonal" sind). Der Pol einer Geraden ist dann der Fernpunkt zur zu ihr senkrechten Richtung. *Man beachte, daß hier wohl jeder Geraden eindeutig ein Pol zugeordnet ist, aber viele Geraden den selben Pol haben, sodaß es nicht "die" Polare zu einem Pol gibt.*

- Bezeichnung 5.10** 1. Eine harmonische Spiegelung σ heiße eine ‘‘Euklidische Spiegelung’’, wenn das Zentrum Z auf f liegt und zwar der Pol der Achse z ist.
2. Die von den Euklidischen Spiegelungen erzeugte Gruppe \mathcal{K} heiße Gruppe der ‘‘Euklidischen Kongruenzen’’.

Für diese Euklidischen Kongruenzen gilt nun ein Analogon zu Satz 5.8.

Satz 5.11 1. Jede Euklidische Kongruenz lässt sich als Produkt von höchstens drei Euklidischen Spiegelungen darstellen.

2. Sind $u, v, \neq f$ Geraden, $S \in u, T \in v$ Punkte $\notin f$, so gibt es genau vier Euklidische Kongruenzen β_i ($i = 0, 1, 2, 3$), die $u \mapsto v, S \mapsto T$ abbilden.

Ist β_0 eine solche, so sind noch

$$\beta_1 = \sigma_v \beta_0, \beta_2 = \sigma_t \beta_0$$

und

$$\beta_3 = \sigma_v \sigma_t \beta_0 = \sigma_t \sigma_v \beta_0$$

ebenfalls solche Kongruenzen, wobei σ_v die Euklidische Spiegelung mit Achse v und σ_t die Euklidische Spiegelung ist, deren Achse t durch T geht und konjugiert zu v ist. (Siehe Abbildung 5.5.)

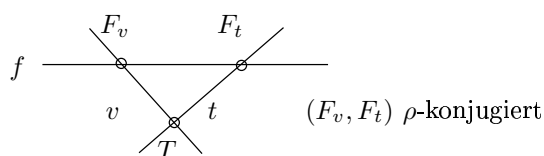


Abbildung 5.5

Die Kongruenz

$$\sigma := \sigma_v \sigma_t = \sigma_t \sigma_v$$

ist zwar nach Satz 4.30 selbst eine harmonische Spiegelung, aber keine ‘‘Euklidische Spiegelung’’ im Sinne von Bezeichnung 5.10. Da die Ferngerade Fixpunktgerade ist, beschreibt σ die ‘‘Punktspiegelung’’ der Elementargeometrie.

Zum **Beweis** holen wir etwas weiter aus. Zu einer eigentlichen, d.h. von der Ferngeraden f verschiedenen Geraden g , sei im folgenden F_g der Fernpunkt, P_g der Pol, also der zu F_g ρ -konjugierte Punkt auf f . Ferner sei σ_g die (Euklidische) Spiegelung mit Achse g und Zentrum P_g . Wir zeigen zunächst

- Lemma 5.12** 1. Sind a, b orthogonale, d.h. bezüglich ρ konjugierte, Geraden durch einen eigentlichen Punkt S , so ist $\sigma_a \sigma_b$ die harmonische Spiegelung an (S, f) .
2. Sind a, b, c Geraden durch einen Punkt Z , der auch auf der Ferngeraden liegen darf, so gibt es dazu weitere Geraden d, d' durch Z , sodaß $\sigma_b \sigma_a = \sigma_d \sigma_c$ und $\sigma_b \sigma_a = \sigma_c \sigma_{d'}$.
3. Ein Produkt von vier Euklidischen Spiegelungen ist schon als Produkt von zwei solchen darstellbar.
4. Sind u, v eigentliche Geraden, so gibt es eine Euklidische Spiegelung $\sigma : u \mapsto v$. Der Schnittpunkt $Q := uv$ ist Fixpunkt von σ . Sind S, T eigentliche Punkte, so gibt es eine Euklidische Spiegelung $\sigma : S \mapsto T$. Die Verbindungsgerade $q := ST$ ist Fixgerade von σ .

Beweis:

1. folgt direkt aus Satz 4.30.
2. Wir zeigen zunächst die erste Formel:

Fall 1: Z liegt auf der Ferngeraden f : Es sei $e := \sigma_b\sigma_a(c)$. Dann geht auch e durch Z . Wir wählen d als Gerade durch Z , so daß $cdef$ ein harmonischer Wurf sind. Dann haben alle Geraden a, b, c, d, e den selben Fernpunkt Z , somit die zugehörigen Spiegelungen alle das selbe Zentrum $Z' = \rho(Z) \in f$, sodaß damit auch $\sigma_b\sigma_a$ und $\sigma_d\sigma_c$ beide zentral mit Zentrum Z' sind. Auf der Ferngeraden heben sich dann je zwei dieser Spiegelungen gegenseitig auf, sodaß sich die Ferngerade als die Achse von $\sigma_b\sigma_a$ und von $\sigma_d\sigma_c$ erweist. Nun ist nach Konstruktion $\sigma_b\sigma_a(c) = \sigma_d\sigma_c(c) = e$, sodaß wir also zwei zentrale Kollineationen haben mit dem selben Zentrum und der selben Achse, die zudem noch eine weitere Gerade gleich abbilden. Sie müssen dann notwendig identisch sein.

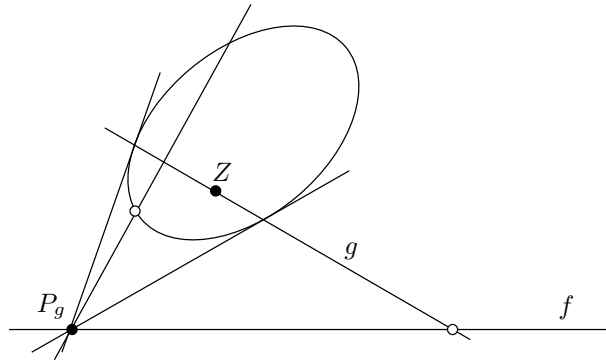


Abbildung 5.6

Fall 2: Z ist ein eigentlicher Punkt: Siehe Abbildung 5.6. Wir wählen eine Kurve Q zweiter Ordnung, die (Z, f) als polares Paar hat und auf f die dort vorgegebene elliptische Involution ρ erzeugt. Für eine beliebige Gerade g durch Z stimmt dann der "Euklidische" Pol P_g mit dem an der Kurve Q gebildeten Pol überein. Damit überführt die Spiegelung σ_g an (P_g, g) auch die Kurve in sich und zwar als harmonische Spiegelung an den Schnittpunkten von g mit Q . σ_g ist also auch eine Z -Spiegelung im Sinne von Kapitel 3 und jede solche Spiegelung auf der Kurve ist auch umgekehrt auf diesem Wege zu erhalten. Nun benutzen wir aus Kapitel 3, daß es zu je drei Z -Spiegelungen $\sigma_a, \sigma_b, \sigma_c$ eine Z -Spiegelung σ_d gibt, sodaß auf der Kurve $\sigma_b\sigma_a = \sigma_d\sigma_c$. Stimmen sie aber auf der Kurve überein, so auch auf wenigstens vier allgemein liegenden Punkten, sind also auch als Kollineationen der Ebene identisch.

Die zweite Aussage erhält man so: Nach dem eben Gezeigten gibt es ein d' , sodaß $\sigma_a\sigma_b = \sigma_{d'}\sigma_c$ (Reihenfolge!), woraus durch Invertieren die Behauptung folgt.

3. Es seien σ_i ($i = 1, 2, \dots$) Euklidische Spiegelungen an (A_i, a_i) . Wir setzen $Z_1 := a_1a_2, Z_2 := a_3a_4$.

Fall 1: $Z_1 = Z_2 =: Z$: Dann gehen a_1, a_2, a_3 durch Z und nach 2. existiert eine Gerade a_5 durch Z , sodaß $\sigma_1\sigma_2\sigma_3 = \sigma_5$, d.h. $\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 = \sigma_5\sigma_4$.

Fall 2: $Z_1 \neq Z_2$ und nicht beide auf f : Es sei σ die Euklidische Spiegelung mit Achse Z_1Z_2 . Dann kann man nach 2. darstellen $\sigma_1\sigma_2 = \sigma_5\sigma$ und $\sigma_3\sigma_4 = \sigma\sigma_6$.

Damit ist dann

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 = \sigma_5\sigma\sigma\sigma_6 = \sigma_5\sigma_6.$$

Fall 3: $Z_1 \neq Z_2$ und beide auf f : Stelle $\sigma_2\sigma_3$ dar als $\sigma'_2\sigma'_3$, wobei die Achsen von σ_1 und σ'_2 sich nicht auf f treffen. Dann ist

$$\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4 = \sigma_1\sigma'_2\sigma'_3\sigma_4$$

und die Achsen von σ_1 und σ'_2 haben einen eigentlichen Schnittpunkt. Dann kann man mit den schon behandelten Fällen weitermachen.

4. *Fall 1:* Es sei $Q \notin f$: Man wähle ρ -konjugierte Punkte Z, Z' auf f , die die Fernpunkte von u und v harmonisch trennen. Dann leistet die Spiegelung an (Z, QZ') das Gewünschte.

Fall 2: Es sei $Q \in f$: Bestimme g durch Q , sodaß sich u, v und g, f harmonisch trennen. Dann leistet die Euklidische Spiegelung mit Achse g das Gewünschte.

Für die Punkte schließt man analog. \square

Kehren wir nun zu dem Beweis von Satz 5.11 zurück.

- Nach Definition ist jede Euklidische Kongruenz ein Produkt von Euklidischen Spiegelungen $\sigma_1 \dots \sigma_n$. Ist hier $n \geq 4$, so kann man nach Lemma 5.12.3 etwa das Produkt der ersten vier durch ein Produkt von zwei Spiegelungen ersetzen, wodurch die Gesamtzahl um 2 erniedrigt wird. Rekursive Anwendung liefert die Behauptung.
- Über die Kombination der in Lemma 5.12.4 konstruierten Spiegelungen erhält man eine Euklidische Kongruenz β_0 , die $u \mapsto v, S \mapsto T$ leistet. Offensichtlich sind dann auch die weiteren Kongruenzen

$$\beta_1 = \sigma_v\beta_0, \beta_2 = \sigma_t\beta_0$$

und

$$\beta_3 = \sigma_v\sigma_t\beta_0 = \sigma_t\sigma_v\beta_0$$

solche. Wir haben zu zeigen, daß dies alle sind.

Dazu genügt es wieder die Kongruenzen zu betrachten, die v als Fixgerade und T als Fixpunkt haben. Nach Lemma 5.12.3 hat eine solche Kongruenz die Form $\beta = \sigma_1 \dots \sigma_n$ wobei $n \leq 3$ und die σ_i Euklidische Spiegelungen.

$n = 0$: Dann ist $\beta = \text{id}$.

$n = 1$: Dann ist $\beta = \sigma_1$ und σ_1 muß v als Fixgerade und T als Fixpunkt haben.

Ist v Fixpunktgerade, so ist $\sigma_1 = \sigma_v$.

Andernfalls geht v durch das Zentrum Z von σ_1 , d.h. Z ist der Fernpunkt von v und die Achse geht durch T . Dann ist aber $\sigma_1 = \sigma_t$.

$n = 2$: Dann hat $\beta = \sigma_1\sigma_2$ den Fernpunkt F_v als Fixpunkt, ferner f als Fixgerade. Damit ist die Einschränkung $\beta|_f$ ein ρ -Translation mit Fixpunkt, also nach Satz 3.33.4 die Identität. Folglich ist β zentral mit Achse f und Zentrum T . Dann müssen aber auch die beiden darstellenden Spiegelungen sich auf der Ferngeraden zur Identität ergänzen, d.h. dort die selben Fixpunkte haben. Damit sind sie entweder gleich, was $\beta = \text{id}$ ergibt, oder ihre Achsen sind orthogonal und schneiden sich in T . Nach Lemma 5.12.1 ist dann β die harmonische Spiegelung an (T, f) und somit wieder mit Lemma 5.12.1 dann

$$\beta = \sigma_v\sigma_t = \sigma_t\sigma_v.$$

$n = 3$: Es ist $\beta = \sigma_1\sigma_2\sigma_3$.

$\beta' := \sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_v = \beta\sigma_v$ liefert ebenfalls $v \mapsto v, T \mapsto T$ und ist nach Lemma 5.12.3 von der Form $\beta' = \sigma_5\sigma_6$, also nach dem eben behandelten Fall entweder $\beta' = \text{id}$, d.h. $\beta = \sigma_v$, oder $\beta' = \sigma_t\sigma_v$, also $\beta = \sigma_t$.

Damit sind alle Fälle diskutiert und der Satz 5.11 bewiesen. □

Diese Überlegungen lassen sich alle (in der Ebene) dualisieren, wodurch die entsprechenden Begriffe der *polareuklidischen Geometrie* entstehen. (Siehe L. Locher-Ernst, Projektive Geometrie).

Polareuklidische Kongruenzen

Bezeichnung 5.13 Wir fixieren einen Punkt F , genannt (absoluter) Mittelpunkt, darin eine elliptische Strahlen-Involution ρ . Geraden-Paare von ρ nennen wir "konjugiert", Punkte $U, V, \neq F$ nennen wir "konjugiert", wenn sie auf konjugierten Geraden (durch F) liegen. Eine Gerade p durch F heißt "Polare" zu einem Punkt $P \neq F$, wenn P auf der zu p bzgl. ρ konjugierten Geraden von F liegt.

Stellt man sich die Involution ρ auf dem Strahlenbüschel F wieder als einen sich drehenden rechten Winkel vor, so sind also Punkte $U, V, \neq F$ genau dann konjugiert, wenn sie mit F ein rechtwinkeliges Dreieck mit rechtem Winkel bei F bilden.

Man beachte, daß wieder jeder Punkt eindeutig eine Polare hat, aber viele Punkte dieselbe, sodaß es nicht "den" Pol zu einer Polaren gibt.

Durch konsequentes Dualisieren erhalten wir weiterhin:

Bezeichnung 5.14 1. Eine harmonische Spiegelung σ heiße "polareuklidische Spiegelung", wenn die Achse z durch F geht und die Polare des Zentrums Z ist.

2. Die von den polareuklidischen Spiegelungen erzeugte Gruppe \mathcal{K} heißt Gruppe der "polareuklidischen Kongruenzen".

Dafür gilt analog zum Euklidischen Fall

Satz 5.15 1. Jede polareuklidische Kongruenz läßt sich als Produkt von höchstens drei polareuklidischen Spiegelungen darstellen.

2. Sind $U, V, \neq F$ Punkte, $s \in U, t \in V$ Geraden nicht durch F , so gibt es genau vier polareuklidische Kongruenzen β_i ($i = 0, 1, 2, 3$), die $U \mapsto V, s \mapsto t$ abbilden.

Ist β_0 eine solche, so sind noch

$$\beta_1 = \sigma_V\beta_0, \beta_2 = \sigma_T\beta_0$$

und

$$\beta_3 = \sigma_V\sigma_T\beta_0 = \sigma_T\sigma_V\beta_0$$

ebenfalls solche Kongruenzen, wobei σ_V die polareuklidische Spiegelung mit Zentrum V ist und σ_T die polareuklidische Spiegelung ist, deren Zentrum T auf t liegt und konjugiert zu V ist.

Elliptische, hyperbolische und Euklidische Geometrie

Die im vorigen Abschnitt behandelten Gruppen von Kollineationen wollen wir nun als *die* Kongruenzabbildungen heranziehen, und untersuchen, was für Geometrien dadurch entstehen. Zunächst seien nochmals die Begriffe erläutert.

Definition 5.16 1. Elliptische Geometrie:

Es sei π eine elliptische Polarität. Wir wählen als Gruppe \mathcal{K} der Kongruenzen alle π -Kongruenzen, d.h. alle mit π vertauschbaren Kollineationen. Unsere "elliptische Welt" \mathcal{E} sei die ganze Ebene mit allen Punkten und Geraden.

2. Hyperbolische Geometrie:

Es sei π eine hyperbolische Polarität. \mathcal{Q} sei die von π erzeugte Kurve 2-ter Ordnung. Wir wählen als Gruppe \mathcal{K} der Kongruenzen alle π -Kongruenzen d.h. alle mit π vertauschbaren Kollineationen. Unsere "hyperbolische Welt" \mathcal{E} sei das Innere von \mathcal{Q} , d.h. die Punkte von \mathcal{E} -"hyperbolische Punkte"- sind die Punkte im Innern der Kurve. Die Geraden von \mathcal{E} sind genau die Geraden der projektiven Ebene, die die Kurve in zwei Punkten schneiden -"hyperbolische Geraden"-, als Punktreihe betrachten wir aber nur die hyperbolischen Punkte darauf, d.h. das im Innern von \mathcal{Q} liegende Segment.

Die Punkte von \mathcal{Q} nennen wir "Fernpunkte".

3. Euklidische Geometrie:

Wir fixieren eine Gerade f , genannt "Fernergerade", darauf eine elliptische Involution ρ . Punkte-Paare von ρ auf f nennen wir "konjugiert", Geraden $u, v, \neq f$ nennen wir "konjugiert", wenn sie f in konjugierten Punkten schneiden. Ein Punkt $P \in f$ heißt "Pol" einer Geraden $p \neq f$, wenn p durch den zu P konjugierten Punkt von f geht. Eine harmonische Spiegelung σ heiße eine "Euklidische Spiegelung", wenn das Zentrum Z auf f liegt und zwar der Pol der Achse z ist. Die "Euklidischen Kongruenzen" sind die Kollineationen aus der von den Euklidischen Spiegelungen erzeugten Gruppe \mathcal{K} .

Die "Euklidische Welt" \mathcal{E} enthält alle Punkte -"Euklidische Punkte"-, die nicht auf der Ferngeraden f liegen, und alle von f verschiedenen Geraden -"Euklidische Geraden"-, wobei wir deren "Fernpunkt", d.h. den Schnittpunkt mit f wieder nicht zu ihren Punkten rechnen.

Zu jeder dieser drei Geometrien gibt es eine "polare". Im Falle der elliptischen bzw. hyperbolischen Geometrie entsteht sie durch Abbilden mit der zugrunde liegenden Polarität π . Damit bekommen wir also:

4. Polarelliptische Geometrie:

Sie fällt mit der elliptischen zusammen.

5. Polarhyperbolische Geometrie:

Die Kongruenzen sind wieder die π -Kongruenzen zu einer hyperbolischen Polarität π mit Kurve \mathcal{Q} . Die "polarhyperbolische Welt" \mathcal{E} besteht aus allen bezüglich \mathcal{Q} äußeren Punkten (durch die also zwei Tangenten gehen) und aus allen Geraden, die die Kurve \mathcal{Q} nicht treffen. Eine "polarhyperbolische Gerade" besitzt also alle ihr in der projektiven Ebene angehörenden Punkte, dagegen ein "polarhyperbolischer Punkt" nur das durch zwei Tangenten begrenzte Segment der durch ihn gehenden Geraden, die \mathcal{Q} nicht treffen. Tangenten an \mathcal{Q} nennt man "Fernergeraden".

6. Polareuklidische Geometrie:

Wir fixieren einen Punkt F , genannt "(absoluter) Mittelpunkt", darin eine elliptische Strahlen-Involution ρ . Geraden-Paare von ρ in F nennen wir "konjugiert", Punkte $U, V \neq F$ nennen wir "konjugiert", wenn sie auf konjugierten Geraden durch F liegen. Eine Gerade $p \in F$ heißt "Polare" eines Punktes $P \neq F$, wenn P auf dem zu p konjugierten Strahl von F liegt. Eine harmonische Spiegelung σ heiße eine "Polareuklidische Spiegelung", wenn die Achse z durch F geht und zwar die Polare des Zentrums Z ist. Die "Polareuklidischen Kongruenzen" sind die Kollineationen aus der von den polareuklidischen Spiegelungen erzeugten Gruppe \mathcal{K} .

Die "Polareuklidische Welt" \mathcal{E} besteht aus allen Geraden -"Polareuklidische Geraden"-, die nicht durch den absoluten Mittelpunkt F gehen, und aus allen Punkten $\neq F$ -"Polareuklidische Punkte"-, wobei wir deren "Ferngerade", d.h. die Verbindungsgerade mit F wieder nicht zu ihren Geraden rechnen.

In allen Fällen nennen wir die zur Welt \mathcal{E} gehörigen Punkte und Geraden auch "eigentlich", alle nicht zu \mathcal{E} gehörigen Punkte und Geraden, also auch die Fernpunkte bzw. Ferngeraden, "uneigentlich".

Mit diesen Punkten, Geraden und den dazu gewählten Kongruenzen wollen wir nun metrische Geometrie betreiben.

Wir beschränken uns im Folgenden auf die Behandlung von elliptischer, hyperbolischer und Euklidischer Geometrie.

Der Leser möge die Übertragung auf die entsprechenden polaren Geometrien selbst vornehmen.

Zunächst betrachten wir, welchen Begriff des Messens von Strecken und Winkeln diese Kongruenzen liefern. Dabei werden wir auf die Ergebnisse von Kapitel 3 zurückgreifen.

Im elliptischen und im hyperbolischen Fall haben wir die zugrunde liegende Polarität π , für die alle eigentlichen Punkte und Geraden regulär sind, und somit die von π induzierten Involutionen konjugierter Elemente tragen. Dabei sind die Involutionen in eigentlichen Punkten stets elliptisch, dagegen die auf eigentlichen Geraden vom selben Typ wie die Polarität.

Im Euklidischen Fall haben wir zunächst nur die eine Involution ρ auf der Ferngeraden f , erhalten aber daraus durch Schein in jedem eigentlichen Punkt G die zu ρ perspektive elliptische Involution ρ_G . Wir haben somit

Satz 5.17 1. Jeder eigentliche Punkt $G \in \mathcal{E}$ trägt eine eindeutig bestimmte elliptische Involution ρ_G .

2. Jede eigentliche Gerade g trägt

- im elliptischen Fall eine elliptische Involution η_g
- im hyperbolischen Fall eine hyperbolische Involution η_g .
- Im Euklidischen Fall trägt g keine Involution, aber wir haben noch den Fernpunkt $F_g := gf$.

Studieren wir zunächst das Messen von Winkeln.

Dazu wählen wir uns einen eigentlichen Punkt P , darin zwei bzgl. der Involution ρ_P konjugierte Strahlen o, e nebst einer Orientierung und bilden die nach Kapitel 3 dadurch eindeutig festgelegte elliptische Skala s mit $s(0) := o$, $s(\frac{\pi}{2}) := e$. Für sie hat dann das volle Büschel die Länge π , was gleich der Periode der elliptischen Skala s ist.

Was hat diese Skala mit unserer Geometrie zu tun, in der "gleich groß" über die Kongruenzen aus den vorgegebenen Gruppen erklärt ist? Bleiben wir zunächst im Büschel P . Nach Satz 5.7, Satz 5.8 bzw. Satz 5.11, Lemma 5.12 ist eine Kongruenz β , die P festläßt, darstellbar als Produkt von π -Spiegelungen bzw. Euklidischen Spiegelungen, die ihrerseits P festlassen. Die Einschränkung einer solchen Spiegelung σ auf das Büschel P ist dann entweder die Identität - falls P das Zentrum von σ war - oder P liegt auf der Achse von σ . Dann ist deren Pol das Zentrum, sodaß die Einschränkung $\sigma|_P$ die harmonische Spiegelung an ρ_P -konjugierten Strahlen von P ist - und auf diese Weise bekommt man auch alle solchen Spiegelungen in P . Das ist aber genau der Typ von Spiegelungen, die über die aus ihnen als Produkten von je zwei Spiegelungen gebildeten Translationen in Kapitel 3 uns die Skalen geliefert haben. Die Einschränkung einer Kongruenz β , die P festläßt, auf das Büschel P ist

also entweder eine ρ_P -Spiegelung oder eine ρ_P -Translation, überführt also die Skala s in sich selbst. Folglich haben wir

Jedes Büschel zu einem eigentlichen Punkt P trägt induziert von der gegebenen Kongruenzgruppe eine elliptische Maßbestimmung, die verträglich ist mit dem vorgegebenen Kongruenzbegriff.

Indem man dies weiter ausführt – dies ist allerdings recht technisch und sei deshalb übergangen – ergibt sich, daß die so zu verschiedenen eigentlichen Punkten P und Q entstehenden elliptischen Skalen unter Kongruenzen, die P auf Q abbilden ineinander übergehen. Analoges bekommt man für die Maßbestimmung auf den eigentlichen Geraden, wobei hier noch eine Einheitsstrecke mit zu übertragen ist. Wir haben somit

Satz 5.18 *Aus den für unsere Geometrien vorgegebenen Kongruenzgruppen ergibt sich*

1. *in jedem eigentlichen Punkt G ein Maß nach der elliptischen, also periodischen Skala,*
2. *auf jeder eigentlichen Geraden g ein Maß nach der*
 - *elliptischen Skala in der elliptischen Geometrie,*
 - *hyperbolischen Skala in der hyperbolischen Geometrie,*
 - *parabolischen Skala in der Euklidischen Geometrie.*

Im hyperbolischen bzw. Euklidischen Fall ist hier noch einmalig eine "Einheitsstrecke" vorzugeben.

Bezüglich dieser Skalen gemessene Winkel oder Strecken behalten unter Kongruenzabbildungen ihre Größe.

Von der Elementargeometrie ist etwa bekannt, daß zwei Seiten und der eingeschlossene Winkel ein Dreieck bestimmen. Eine solche Aussage gilt in den drei hier betrachteten Geometrien, wenn man etwas sorgfältig die beteiligten Begriffe wählt: Im Euklidischen oder hyperbolischen Fall zerteilt *ein* (eigentlicher) Punkt stets die (eigentlichen) Punkte einer Geraden in zwei Segmente. Im elliptischen Fall ist mit jedem Punkt einer Geraden auch der (bzgl. der gegebenen Polarität) konjugierte Punkt eigentlich, und beide Punkte liefern zusammen wieder zwei Segmente. Somit können wir in jedem Fall von den "*beiden, von einem Punkt erzeugten*" Segmenten einer Geraden sprechen.

Wir sagen

Bezeichnung 5.19 *Zwei Dreiecke ABC bzw. $A'B'C'$ in \mathcal{E} mit Gegenseiten a, b, c bzw. a', b', c' haben bei A bzw. A' "kongruente Winkel", wenn es eine Kongruenz β gibt, die bewirkt, daß*

$$\beta: A \mapsto A', \quad b \mapsto b', \quad c \mapsto c',$$

und dabei zusätzlich noch B' und $\beta(B)$ im selben von A' auf c' erzeugten Segment liegen und ebenso C' und $\beta(C)$ auf b' .

(Die Diskussion des in der elliptischen Geometrie möglichen Sonderfalls, daß etwa $\beta(B)$ oder B' zu A' konjugiert ist, sei dem Leser überlassen.)

Damit gilt

Satz 5.20 *Sind für zwei Dreiecke ABC bzw. $A'B'C'$ in \mathcal{E} die Winkel bei A bzw. A' sowie die anliegenden Seiten kongruent, so sind die beiden Dreiecke kongruent, d.h. es gibt dann eine Kongruenz, mit der dann alle sich entsprechenden Seiten und Winkel kongruent sind.*

Beweis: Sei β die nach Bezeichnung 5.19 die Winkel bei A bzw. A' ineinander überführende Kongruenz. Sie liefert insbesondere $A \mapsto A'$, $b \mapsto b'$ und $C \mapsto C'' := \beta(C)$. Die Seiten AC und $A'C''$ sind kongruent. Somit gibt es eine Kongruenz β' , die $A \mapsto A'$, $b \mapsto b'$ und $C \mapsto C'$ leistet. Nach Satz 5.8 bzw. Satz 5.11 unterscheiden sich β und β' eingeschränkt auf die Punktreihe b höchstens um eine Spiegelung an A , die die beiden von A erzeugten b -Segmente ineinander überführt. Da nach Voraussetzung schon C' und $C'' := \beta(C)$ im selben Segment liegen, müssen sie also übereinstimmen. Analog schließt man für die andere anliegende Seite, sodaß also β schon die gesuchte Kongruenz ist.

Die ausstehenden Behauptungen seien dem Leser zum Beweis überlassen. □

Damit arbeitend kann man auch die weiteren Kongruenzsätze der Elementargeometrie für alle drei Geometrien beweisen.

Soweit es also die reine Kongruenzgeometrie angeht, unterscheiden sich die *elliptische* bzw. *hyperbolische* Geometrie nicht wesentlich von der *Euklidischen* Geometrie. Dagegen treten signifikante Unterschiede auf, wenn wir den Begriff "parallel" hinzunehmen. Hier zeigt sich dann, wie mit der Entdeckung dieser Geometrien im Anfang des 19.ten Jahrhunderts die rund 2000 Jahre alte Frage nach der Ableitbarkeit von EUKLIDS Parallelen-Axiom aus seinen übrigen Axiomen negativ entschieden wird. (LOBATSCHESKY 1793-1850, BOLYAI 1802-1860, GAUSS 1777-1855)

Definition 5.21 Zwei Geraden heißen "parallel", wenn sie einen Fernpunkt gemeinsam haben.

Satz 5.22 Es sei g eine eigentliche Gerade, P ein eigentlicher Punkt nicht auf g . Dann gibt es, wenn unsere Geometrie

- elliptisch ist, keine,
- Euklidisch ist, genau eine,
- hyperbolisch ist, genau zwei

eigentliche Geraden durch P , die zu g parallel sind.

Beweis: Eine Gerade h durch P ist offenbar genau dann parallel zu g , wenn $h = PF$, wobei F ein Fernpunkt von g ist. Da g je nach Fall keinen, genau einen oder genau zwei Fernpunkte besitzt, folgt die Behauptung. (Siehe Abbildung 5.7.) □

Warnung! Man halte sich an die Definitionen! Im Euklidischen gelten eine ganze Reihe von Aussagen etwa über Parallelen, die in den anderen beiden Geometrien falsch sind.

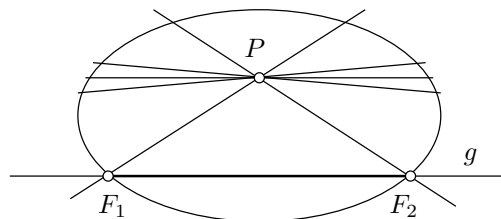


Abbildung 5.7

Allgemeiner gilt über das sich Schneiden von Geraden

Satz 5.23 g, h seien eigentliche Geraden. Dann gilt sofern unsere Geometrie

- elliptisch: g und h schneiden sich in einem eigentlichen Punkt, d.h. in \mathcal{E} .

- *Euklidisch*: g und h schneiden sich in einem eigentlichen Punkt oder sie sind parallel.
- *hyperbolisch*: g und h schneiden sich in einem eigentlichen Punkt oder sie sind parallel oder sie sind "überparallel", d.h. sie schneiden sich dann im Außenbereich der Kurve \mathcal{Q} .

Die elliptischen Involutionen in den Punkten geben uns eine natürliche Verallgemeinerung des Begriffs von orthogonal. Man erinnere sich an das zur Motivation des Euklidischen Szenarios Gesagte.

Definition 5.24 *Es seien a, b eigentliche Geraden mit eigentlichem Schnittpunkt G . Dann heißen a und b "orthogonal", wenn sie bezüglich der Involution ρ_G konjugiert sind. Statt orthogonal sagen wir auch "senkrecht", "im rechten Winkel", " a normal zu b ", " $a \perp b$ ", etc.*

In den beiden nichteuklidischen Fällen ist dies nach Definition von konjugiert dazu äquivalent, daß jeweils die eine Gerade durch den Pol der anderen geht. Unsere für das Euklidische eingeführten Begriffe von konjugiert, bzw. von Pol sind nun so gemacht, daß dies auch hier gültig ist. Also haben wir

Satz 5.25 *Zwei Geraden sind genau dann orthogonal, wenn eine durch den Pol der anderen geht. Diese Beziehung ist symmetrisch. Orthogonale Geraden bilden im Sinne von Satz 5.18 einen Winkel von $\frac{\pi}{2}$.*

Bringen wir die Begriffe "normal" und "parallel" zusammen.

Satz 5.26 (Gemeinsame Normale)

- *Elliptisch*: Je zwei Geraden a, b besitzen eine eindeutig bestimmte gemeinsame Normale. Sie ist die Polare des Schnittpunktes.
- *Hyperbolisch*: Zwei Geraden a, b besitzen genau dann eine gemeinsame Normale, wenn sie überparallel sind. Ist letzteres der Fall, so ist sie die Polare des Schnittpunktes, also eindeutig bestimmt.
- *Euklidisch*: Zwei Geraden a, b besitzen gemeinsame Normalen genau, wenn sie parallel sind. Wenn eine gemeinsame Normale n existiert, so sind genau alle zu n parallelen Geraden die gemeinsamen Normalen zu a, b .

Beweis: Es seien A, B die Pole zu den Geraden a, b .

- *Elliptisch oder hyperbolisch*: Nach Satz 5.25 geht jede Normale n zu a durch A , zu b durch B , was genau $n = AB$ ergibt, d.h. n ist die Polare des Schnittpunktes.

Im elliptischen Fall sind alle Geraden eigentlich, somit ist eine Normale gefunden und mehr kann es hier auch nicht geben.

Im hyperbolischen Fall muß die Polare n des Schnittpunktes eine eigentliche Gerade sein, was genau dann eintritt, wenn der Schnittpunkt selbst uneigentlich ist, d.h. die Ausgangsgeraden überparallel sind.

- *Euklidisch*: Hier liegen die Pole A, B auf der Ferngeraden f . Eine Gerade n mit Fernpunkt F_n ist gemeinsame Normale an a, b genau, wenn $F_n = A$ und $F_n = B$, d.h. $A = B$, also wenn a und b parallel. Ist letzteres der Fall, so ist durch die Normalenbedingung genau der Fernpunkt der Normalen festgelegt, diese selbst also nur bis auf Parallelität. □

Eine direkte Konsequenz ist etwa der folgende

Satz 5.27 *ABC sei ein Polardreieck in der elliptischen Geometrie. Dann stehen je zwei Seiten aufeinander senkrecht, das Dreieck hat also drei rechte Winkel!*

Wir werden später noch Genaueres über die Winkelsumme im Dreieck in den verschiedenen Geometrien erfahren.

Analog zu dem Satz 5.26 beweist man

Satz und Definition 5.28 *Zu jeder eigentlichen Geraden g und jedem eigentlichen Punkt P gibt es eine Normale n zu g durch P , genannt "Lot" von P auf g . Ist P verschieden vom Pol von g , so ist das Lot eindeutig bestimmt. $P = \text{Pol}$ von g kann nur in der elliptischen Geometrie auftreten. In diesem Fall ist jede Gerade durch P ein Lot auf g .*

Mit diesen Begriffen gilt beispielsweise allgemein der

Satz 5.29 (Höhenschnittpunktsatz) *Es sei ABC ein Dreieck mit Gegenseiten abc in \mathcal{E} , wobei keine Ecke Pol der Gegenseite sei. Dann sind die "Höhen", d.h. die Lote h_a, h_b, h_c aus den Ecken auf die Gegenseiten eindeutig bestimmt und schneiden sich in einem Punkt.*

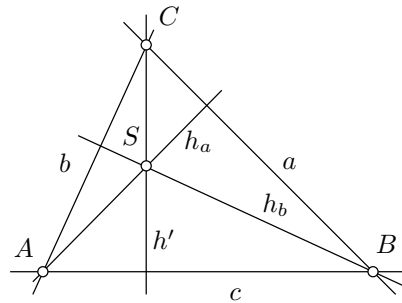


Abbildung 5.8

Beweis: Siehe Abbildung 5.8. Wählt man als S den Schnittpunkt der Höhen h_a und h_b und setzt $h' := SC$, so kann man den Involutionssatz am vollständigen Viereck anwenden, d.h. eine beliebige Gerade s wird von den Geradenpaaren (a, h_a) , (b, h_b) und (c, h') in Punktepaaren einer Involution φ geschnitten. Wir wählen nun im Euklidischen Fall $s := f$, also die Ferngerade, in den anderen Fällen als s die Polare des Schnittpunktes S : h_a, h_b, h' gehen durch S , somit liegen ihre Pole H_a, H_b, H' auf s und sind mit der auf s vorhandenen Involution ω - das ist je nach Fall die Involution ρ auf der Ferngeraden oder die Involution η_s in den nichteuklidischen Fällen - konjugiert zu den Schnittpunkten $h_{as}, h_{bs}, h's$. Nun sind die Höhen senkrecht zu den Seiten, d.h. die Pole der Höhen liegen auf den Dreiecksseiten, also $H_a = as, H_b = bs$. Folglich stimmen die Involutionen φ und ω auf zwei Paaren überein, sind also identisch. Das impliziert, daß dann h' die dritte Höhe h_c sein muß.

Bei dem verwendeten Involutionssatz am vollständigen Viereck darf die Gerade s durch keine der Ecken A, B, C gehen, was wir hier - wenigstens im elliptischen Fall - nicht ausschließen können. Dies führt aber auf spezielle Konfigurationen, die man direkt behandeln kann. \square

Der Satz über den Höhenschnittpunkt ist aus der Euklidischen Geometrie wohlbekannt, und wie wir eben gezeigt haben, gilt er auch in der elliptischen oder hyperbolischen Geometrie.

Als nächstes ein Beispiel, wo die Verallgemeinerung nicht so glatt geht. - Es sei daran erinnert, daß wir in jeder Geometrie dem rechten Winkel das Maß $\frac{\pi}{2}$ gegeben

haben und oben schon in der elliptischen Geometrie ein (Polar-)Dreieck mit drei rechten Winkeln aufgetaucht war.

Satz 5.30 Die Winkelsumme im Dreieck ist in der

- elliptischen Geometrie $> \pi$
- Euklidischen Geometrie $= \pi$
- hyperbolischen Geometrie $< \pi$.

Zum Beweis brauchen wir einige Hilfsüberlegungen.

Lemma 5.31 Es seien a, b zwei Geraden mit gemeinsamer Normale g_0 . Auf g_0 liege Z und dadurch gehe noch g_1 und g_2 . Die Schnittpunkte mit a, b seien $A_i := ag_i, B_i := bg_i, (i = 0, 1, 2)$. Es sei z die Polare von Z bzw. im Euklidischen Fall die Ferngerade. Sie werde von g_i im Punkte S_i geschnitten. Für ein $i \in \{0, 1, 2\}$ seien die Segmente $S_{A_i Z/S_i}$ und $S_{B_i Z/S_i}$ kongruent. Dann gelten

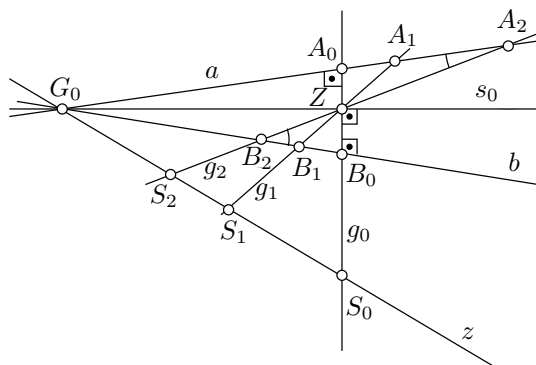


Abbildung 5.9

1. Die Segmente $S_{A_j Z/S_j}$ und $S_{B_j Z/S_j}$ sind kongruent für $j = 0, 1, 2$.
2. Die beiden Dreiecke mit den Ecken A_1, A_2, Z und B_1, B_2, Z , die je keinen Punkt von z enthalten, sind kongruent und sämtliche sich entsprechenden Strecken und Winkel gleich groß.

Beweis: Siehe Abbildung 5.9.

Wir bezeichnen mit G_i den Pol von g_i , mit $s_i = G_i Z$ die Normale auf g_i im Punkt Z . Deren Pol ist dann der Schnittpunkt $S_i = g_i z$, ebenso ist $G_i = s_i z$. Da a und b beide orthogonal zu g_0 sind, gehen sie beide durch den Pol G_0 .

1. Es seien nun für ein i die Segmente $S_{A_i Z/S_i}$ und $S_{B_i Z/S_i}$ kongruent. Die "orthogonale" Spiegelung σ_i an (S_i, s_i) ist dazu eine passende Kongruenzabbildung, überführt damit A_i in B_i , sodaß (A_i, B_i) und (S_i, Z) harmonisch getrennt sind. Folglich sind auch die Geraden (a, b) und (z, s_0) harmonisch getrennt, also auch per Schnitt dann für jedes j die Punkte (A_j, B_j) und (S_j, Z) . Die Spiegelung an S_j, s_j liefert dann die Kongruenz der Segmente $S_{A_j Z/S_j}$ und $S_{B_j Z/S_j}$.
2. Sei wieder σ_0 die Spiegelung an (S_0, s_0) , σ' die an (G_0, g_0) . Beides sind Kongruenzen unserer Geometrie. Damit ist auch $\sigma := \sigma_0 \sigma' = \sigma' \sigma_0$ eine Kongruenz und zwar die Punktspiegelung an (Z, z) , woraus 2. unmittelbar folgt. \square

In Abbildung 5.9 sind bei A_2, B_2 Winkel markiert, die unter den Voraussetzungen von Lemma 5.31 gleich sind.

Als nächstes behandeln wir das sog. SACCHERI-Viereck (GEROLAMO SACCHERI (1667-1733)). Grob gesprochen handelt es sich im folgendes:

Sind in einem einfachen Viereck $A_1A_0B_0B_1$ die Gegenseiten A_1A_0 und B_0B_1 gleich lang, und sind die Winkel bei A_0 und bei B_0 jeweils rechte, so sind die Winkel bei A_1 und bei B_1 gleich.

Damit dies wirklich stimmt, muß man allerdings noch ein paar technische Vorsichtsmaßnahmen ergreifen, unter denen wirklich nur noch die in Abbildung 5.10 gezeichnete Situation entstehen kann.

Lemma 5.32 *Es sei g eine eigentliche Gerade mit Pol G , auf g seien A_0, B_0 zwei eigentliche Punkte. Es bezeichne $S_{A_0B_0}$ im Falle der Euklidischen oder hyperbolischen Geometrie das eindeutig bestimmte, von A_0, B_0 begrenzte Segment aus eigentlichen Punkten, im elliptische Fall sei es eines der beiden.*

Es seien a, b jeweils das Lot auf g in A_0 bzw. B_0 , und darauf seien (eigentliche) Punkte A_1 bzw. B_1 gegeben, sodaß

- die Segmente $S_{A_0A_1/G}$ und $S_{B_0B_1/G}$ kongruent sind, ferner
- die Gerade $h := A_1B_1$ die Gerade g in einem Punkt T trifft, der nicht in $S_{A_0B_0}$ liegt.

Dann ist das Geradensegment im Büschel A_1 , das von a und h begrenzt wird und die Gerade A_1B_0 enthält, kongruent zu dem Segment in B_1 , das von b und h begrenzt wird und die Gerade B_1A_0 enthält.

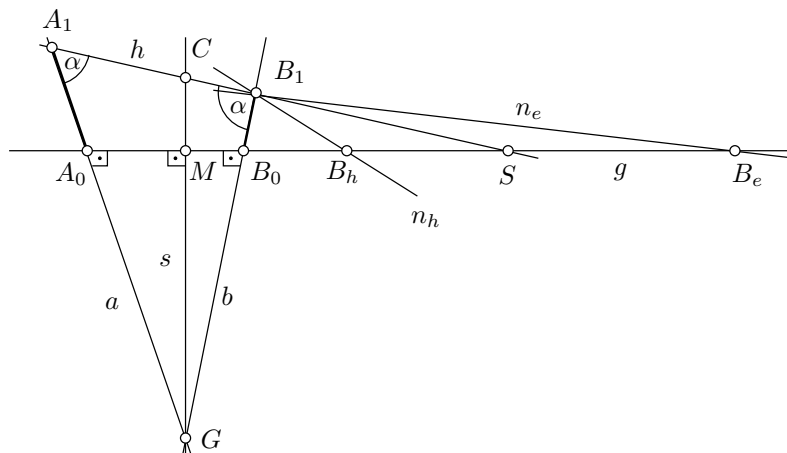


Abbildung 5.10

Beweis: Es sei M der Mittelpunkt des Segmentes $S_{A_0B_0}$, dazu $s := GM$ mit Pol S . Der liegt auf g . Die harmonische Spiegelung σ_S an (S, s) ist dann eine Kongruenzabbildung. Sie liefert

$$\sigma_S(a) = b, \sigma_S(b) = a \text{ und damit } \sigma_S(A_0) = B_0, \sigma_S(B_0) = A_0.$$

Da M in $S_{A_0B_0}$ liegt, gehört dann S nicht zu $S_{A_0B_0}$. Ferner ist $\sigma_S(G) = G$ und mit $B'_1 := \sigma_S(A_1)$ sind dann A_1, B'_1, S kollinear.

Nehmen wir vorweg, daß $B'_1 = B_1$ ist. Dann ist $S = T$, $\sigma_S(h) = h$, und σ_S bewirkt offenbar genau die beschriebene Kongruenz der Winkel bei A_1 und B_1 , was das Lemma beweist.

Die Gleichheit von B_1 und B'_1 sieht man so:

Nach Konstruktion sind die Segmente $S_{B_0B_1/G}$ und $S_{B_0B'_1/G}$ kongruent. Nun gibt es auf b nur genau einen von B_1 verschiedenen Punkt B , mit dem die Segmente $S_{B_0B/G}$ und $S_{B_0B'_1/G}$ kongruent sind, nämlich der Punkt, für den (G, B, B_0, B_1) einen harmonischen Wurf bilden. Wäre also $B'_1 \neq B_1$, so wäre $B'_1 = B$. Dann würden sich aber - Perspektive aus A_1 auf g ! - die Punkte (A_0, S, B_0, T) trennen. Nach Voraussetzung liegt T nicht in $S_{A_0B_0}$. Damit läge aber notwendig S in diesem Segment, obwohl wir doch oben festgestellt hatten, daß es nicht darin liegt. Also ist notwendig $B_1 = B'_1$, womit dann alles gezeigt ist. \square

Lemma 5.33 Die Winkelsumme in einem Viereck $A_1A_0B_0B_1$, das den Voraussetzungen des vorigen Lemmas genügt - einem sog. "SACCHERI-Viereck" -, ist falls die Geometrie

- elliptisch : $> 4\frac{\pi}{2}$
- Euklidisch : $= 4\frac{\pi}{2}$
- hyperbolisch : $< 4\frac{\pi}{2}$.

Beweis: Bezeichnen wir den nach Lemma 5.32 bei A_1 und bei B_1 auftretenden Winkel mit α , so ist offenbar die gesuchte Winkelsumme gerade $2\frac{\pi}{2} + 2\alpha$. Wir sind also fertig, wenn wir zeigen, daß je nach Geometrie der Winkel α größer als ein rechter, gleich oder kleiner ist.

Dazu betrachten wir das Lot n auf b in B_1 (siehe Abbildung 5.10). n schneidet g in einem Punkt B und da ja b durch G geht, ist dieser Schnittpunkt B der Pol von b .

Nun haben wir zu unterscheiden in welcher der verschiedenen Geometrien wir sind:

- *Euklidisch:* Pole sind Fernpunkte, S ist der Pol von s und somit ist $B = S =$ Fernpunkt der von g . Dann ist $n = h$ und α ist rechter Winkel, d.h. $\alpha = \frac{\pi}{2}$.
- *Nichteuklidisch:* Dann sind die Paare (B_0, B) und (M, S) jeweils konjugierte Paare der auf g induzierten Involution η_g .
- *elliptisch:* Die Involution η_g ist elliptisch, (B_0, B) und (M, S) trennen sich Dann hat n die in Abbildung 5.10 mit n_e angedeutete Lage und somit ist $\alpha > \frac{\pi}{2}$.
- *hyperbolisch:* Die Involution η_g ist hyperbolisch, (B_0, B) und (M, S) trennen sich nicht.

Dann hat n die in Abbildung 5.10 mit n_h angedeutete Lage und somit ist $\alpha < \frac{\pi}{2}$. Man beachte, daß B ein uneigentlicher Punkt ist, somit nicht "zwischen" M und B_0 liegen kann, da dies lauter eigentliche Punkte enthält. \square

Daraus gewinnen wir nun den Satz 5.30 über die Winkelsumme im Dreieck. Wir erlauben uns hier wieder eine laxere Redeweise und überlassen es dem Leser als Übung zu zeigen, daß keine Verwechslung von zwei durch dieselben Punkte bzw. dieselben Geraden begrenzten Segmenten auf einer Geraden oder in einem Büschel möglich ist.

Siehe Abbildung 5.11. Es seien in dem Dreieck ABC , M_a, M_b die Seitenmitten, $g := M_aM_b$ mit Pol G , ferner s das Lot von C auf g und a', b' die Lote von A bzw. B auf g mit Fußpunkten A_0, B_0 . s teile den Winkel bei C in γ_1, γ_2 .

Wir zeigen, daß die Dreiecke M_bAA_0 und M_bCD sowie M_aBB_0 und M_aCD jeweils kongruent sind: a', s haben g als gemeinsame Normale, darauf liegt M_b und nach Konstruktion sind die Strecken AM_b und M_bC kongruent. Das ist die in Lemma 5.31 behandelte Situation, wonach unsere Zwischenbehauptung folgt. Damit sind insbesondere gleich

- die beiden mit γ_1 , bzw. die beiden mit γ_2 bezeichneten Winkel, ferner
- die Strecken A_0A , CD , B_0B .

Damit folgt, daß die Winkelsumme in dem Viereck ABB_0A_0 den Wert

$$2\frac{\pi}{2} + \alpha + \gamma_1 + \beta + \gamma_2 = \text{Winkelsumme}(ABC) + \pi$$

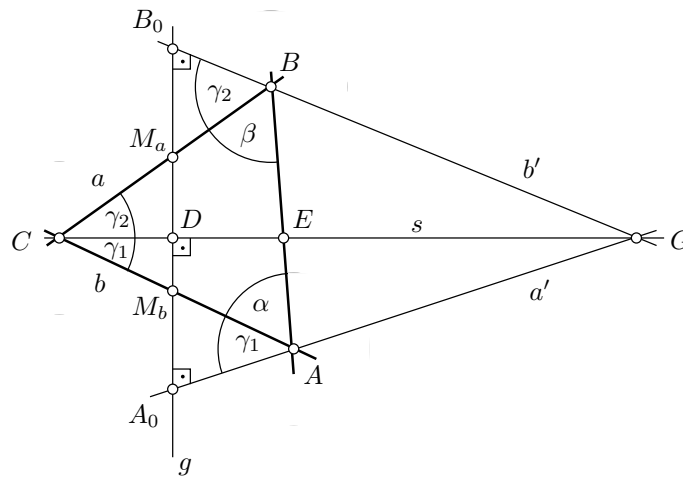


Abbildung 5.11

hat, und da das Viereck ABB_0A_0 die Bedingungen des vorigen Lemma 5.33 erfüllt, ist unser Satz von der Winkelsumme im Dreieck bewiesen. \square

In der Euklidischen Geometrie bilden die Punkte, die konstanten Abstand von einem festen Punkt haben, einen Kreis, bzw. die mit konstantem Abstand von einer festen Geraden bilden ein Paar von dazu parallelen Geraden. Untersuchen wir diese Sachverhalte im allgemeinen Fall.

Definition 5.34 1. Es seien M, A eigentliche Punkte,

$$\mathcal{K}(M, A) := \{X \in \mathcal{E} \mid \text{Strecke}(MX) \text{ kongruent Strecke}(MA)\},$$

d.h. $\mathcal{K}(M, A)$ besteht aus allen Punkten, die von M den selben Abstand haben wie A . Wir nennen $\mathcal{K}(M, A)$ einen "Kreis" mit Mittelpunkt M und Radius MA .

2. Es seien m eigentliche Gerade, A eigentlicher Punkt und zu einem beliebigen eigentlichen Punkt X , sei X_m der Fußpunkt des Lotes von X auf m . Wir setzen

$$\mathcal{K}(m, A) := \{X \in \mathcal{E} \mid \text{Strecke}(XX_m) \text{ kongruent Strecke}(AA_m)\},$$

d.h. $\mathcal{K}(m, A)$ besteht aus allen Punkten, die von m denselben senkrechten Abstand haben wie der Punkt A . Wir nennen $\mathcal{K}(m, A)$ "Abstandskurve" zu m und A .

Dafür gilt der folgende

Satz 5.35 1. Ein Kreis \mathcal{K} mit Mittelpunkt M ist eine Kurve zweiter Ordnung. Die Polare m von M bzgl. \mathcal{K} ist die Polare bzgl. der der Geometrie zugrunde liegenden Polarität π , bzw. die Ferngerade und die \mathcal{K} -Involution auf m ist die zur Geometrie gehörige Involution auf m .

2. Eine Abstandskurve \mathcal{K} zu einer Geraden m ist in der Euklidischen Geometrie ein Parallelen-Paar zu m , im Nichteuklidischen eine Kurve 2-ter Ordnung. Der \mathcal{K} -Pol M von m ist der π -Pol von m und die von \mathcal{K} in M induzierte Involution ist die durch π gegebene.

Beweis:

1. *Kreise:* Es sei m die π -Polare von M bzw. die Ferngerade, η die aus der Geometrie gegebene Involution auf m , die dann notwendig elliptisch ist, da M ein eigentlicher Punkt. Dann gibt es nach Kapitel 2 eine Kurve \mathcal{K} 2-ter Ordnung, mit folgenden Eigenschaften:
 - Ein gegebener Punkt $A \neq M, \notin m$ liegt auf \mathcal{K} ,
 - (M, m) sind polar bzgl. \mathcal{K} ,
 - die von \mathcal{K} auf m induzierte Involution ist η .

Wir zeigen, daß diese Kurve \mathcal{K} unser Kreis ist. Siehe Abbildung 5.12.

Da \mathcal{K} auf m die elliptische Involution η erzeugt, muß M ein innerer Punkt von \mathcal{K} sein. Somit schneidet jede Gerade g durch M die Kurve \mathcal{K} in zwei Punkten G, G' . Wir zeigen nun, daß diese Punkte alle den selben Abstand von M haben wie A . Zunächst betrachte $G := A'$. Dann sind die Punkte (A, A') und (M, A_m) harmonisch getrennt. Da $A_m \in m$ ist dies der Pol einer Geraden \hat{a} durch M . Dann ist die Spiegelung an (A_m, \hat{a}) eine Kongruenz, die A in A' abbildet. Damit sind die Strecken AM und $A'M$ kongruent.

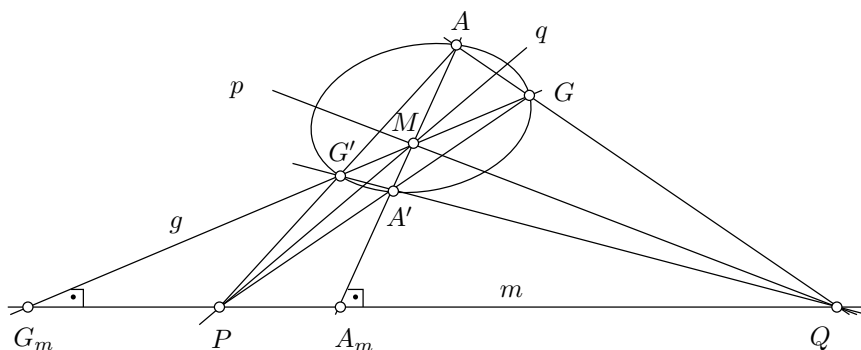


Abbildung 5.12

Sei nun G ein von A, A' verschiedener Punkt der Kurve \mathcal{K} . Dann ist die Gerade $g := GM$ verschieden von der Geraden AM . Also ist $AGA'G'$ ein Kurvenviereck, mit einer Nebenecke M . Dann liegen die anderen Nebenecken P, Q auf m und die Verbindungen mit M sind die Polaren q, p . Damit sind P, Q konjugiert bzgl. der Involution η . Nach Voraussetzung sind sie dann auch konjugiert bzgl. der gegebenen Polarität π bzw. Euklidisch konjugiert und folglich sind die Spiegelungen an den Paaren (P, p) oder (Q, q) Kongruenzen unserer Geometrie. Aus Abbildung 5.12 liest man ab, daß etwa die Spiegelung an (Q, q) gerade $G \mapsto A, M \mapsto M$ bewirkt, was zeigt, daß Strecke (AM) und Strecke (GM) kongruent.

Da jeder Punkt auf einer Geraden durch M liegt und es auf jeder Geraden durch M genau zwei Punkte gibt, die einen festen Abstand von M haben, ist dann auch gezeigt, daß diese Kurve unser Kreis ist.

2. *Abstandskurven:* Im *elliptischen* und im *hyperbolischen Fall* haben wir damit auch schon die Abstandskurve von m gefunden. Beginne mit m und dem π -Pol M und konstruiere wie oben die Kurve \mathcal{K} . Jede eigentliche Gerade g durch M und einen eigentlichen Punkt G ist Lot auf m , sodaß wir wieder Abbildung 5.12 verwenden können. Die Spiegelung an (Q, q) , wie oben konstruiert, ist wieder

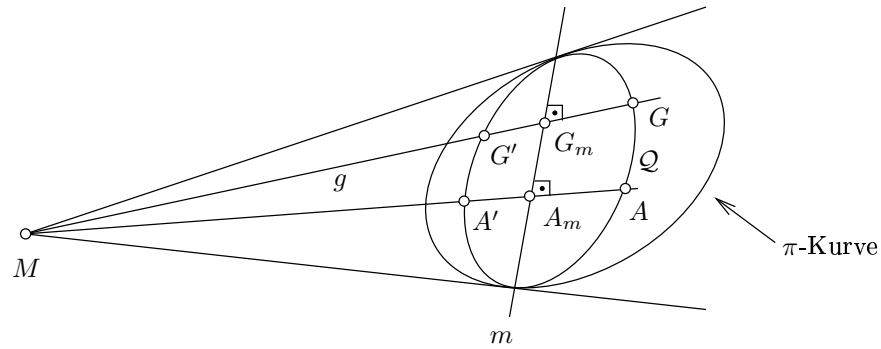


Abbildung 5.13

eine Kongruenz, und überführt $G \mapsto A, G_m \mapsto A_m$, sodaß also die Strecken AA_m und GG_m kongruent.

Im *hyperbolischen Fall* wird M äußerer Punkt und es entsteht - ohne daß wir an der Argumentation etwas ändern müßten - das in Abbildung 5.13 dargestellte Bild.

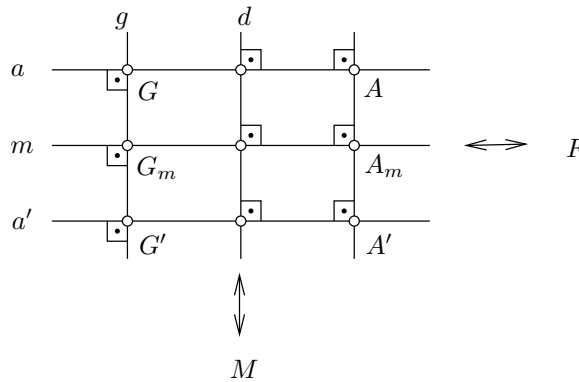


Abbildung 5.14

Der *Euklidische Fall* ist in Abbildung 5.14 dargestellt. Es sei M der Pol, F der Fernpunkt von m , $a = AF$ die Parallele durch A zu m und a' die durch Spiegelung an (M, m) daraus hervorgehende Gerade. Für $G \in a$ bilde d als Mittelsenkrechte auf der Geraden AG . Spiegelung an (F, d) liefert uns wieder, daß die Strecken AA_m und GG_m kongruent sind. Punkte von a' spiegele man erst an (M, m) nach a und verfähre dann wie eben. \square

Bemerkung 5.36 In der elliptischen Geometrie kann der Sonderfall eintreten, daß A und M konjugiert bzw. A und m polar sind. Dann versagt obiger Beweis. Der Leser möge selbst herausfinden, wie dann die entsprechenden Kurven aussehen.

Wir haben den Kreis als Abstandslinie definiert. Es liegt nahe eine Gerade als *Durchmesser* zu bezeichnen, wenn sie durch den Mittelpunkt des Kreises geht. In der Euklidischen Geometrie folgt daraus sofort die bekannte Konstruktion rechtwinkliger Dreiecke durch den

Satz des Thales 5.37 (Euklidische Geometrie) *Es sei \mathcal{K} ein Kreis mit Mittelpunkt M und a ein Durchmesser, der \mathcal{K} in A und A' schneide. Dann gilt für jeden Kreispunkt G : Die Geraden AG und $A'G$ bilden einen rechten Winkel.*

Beweis: Benutze Abbildung 5.12. Da wir im Euklidischen sind, ist m die Ferngerade mit der absoluten Involution, die durch Scheinbildung in jedem Punkt die für die Winkelmessung zuständige Involution erzeugt. Nach Abbildung 5.12 gehen die Geraden AG und $A'G$ durch konjugierte Punkte Q, P auf m , sind also orthogonal. \square

Winkelsumme und Abstandskurven geben uns auch den Zugang zum *Flächenmaß* von durch Geradenstücken begrenzten Figuren. Solche Figuren können wir aus Dreiecken aufbauen, sodaß dies die hier entscheidende Figur ist. An ein Flächenmaß (Area) stellen wir die folgenden

Forderungen 5.38

1. *Kongruente Figuren haben dasselbe Flächenmaß*
2. *Wird eine Figur F in zwei Teile F_1, F_2 zerlegt, so ist*

$$\text{Area}(F) = \text{Area}(F_1) + \text{Area}(F_2)$$

Im Euklidischen Fall liefert die bekannte Formel $\frac{1}{2} \times (\text{Grundlinie} \times \text{Höhe})$ ein solches Maß für Dreiecke. Anders liegen die Verhältnisse in den beiden anderen Geometrien. Hier hängt der Flächeninhalt eines Dreiecks mit dem Überschuß (Excess) bzw. Unterschuß (Defect) der Winkelsumme zu π zusammen.

Bezeichnung 5.39 *Die Winkelsumme eines Dreiecks Δ sei mit $WS(\Delta)$ bezeichnet.*

Satz 5.40 *In der elliptischen oder hyperbolischen Geometrie ist für ein Dreieck Δ stets*

$$\text{Area}(\Delta) = \lambda |\pi - WS(\Delta)|.$$

Dabei ist $\lambda \in \mathbb{R}$ eine normierende Proportionalitätskonstante.

Beweis: Wir gehen zurück auf den Beweis des Satzes über die Winkelsumme und betrachten in Abbildung 5.11 speziell das Viereck ABB_0A_0 . Die Dreiecke AA_0M_b und CDM_b bzw. BB_0M_a und CDM_a hatten wir als kongruent nachgewiesen. Nach unseren Forderungen ist somit

$$\text{Area}(ABB_0A_0) = \text{Area}(\Delta(ABC))$$

Ferner ist

$$WS(ABB_0A_0) = WS(\Delta(ABC)) + \pi.$$

Nun denken wir uns Abbildung 5.11 ergänzt durch die Abstandskurve \mathcal{K} zu g durch C . Wir halten die Ecken A, B fest und lassen C auf \mathcal{K} variieren. Dabei bewegt sich natürlich das Lot s von C auf g mit und entsprechend die Punkte D, M_a, M_b . Über Lemma 5.31 zeigt man aber, daß dabei die Punkte M_a, M_b die Mitten der Seiten AC bzw. BC bleiben und die gesamte Abbildung 5.11 prinzipiell erhalten bleibt, wobei aber das Viereck ABB_0A_0 stets fix bleibt. Nach den eben abgeleiteten Formeln haben wir also:

(1) *Das Verschieben der Ecke C auf der Abstandskurve \mathcal{K} ändert an dem Dreieck ABC weder Fläche noch Winkelsumme.*

Dies bedeutet insbesondere:

(2) *Zu einem gegebenen Dreieck ABC gibt es ein Dreieck ABC' mit der selben Fläche und Winkelsumme, bei der die Seite AC' eine vorgegebene Länge hat.*

(3) Betrachten wir noch eine spezielle Situation: Zwei Dreiecke ABC und ABC' mögen liegen, wie in Abbildung 5.15 skizziert. Dann ist nach Voraussetzung

$$\text{Area}(ABC) = \text{Area}(ABC') + \text{Area}(AC'C),$$

und ferner

$$\begin{aligned} \pi - \text{WS}(ABC) &= \pi - (\alpha + \gamma + \delta) \\ &= \pi - (\alpha' + (\alpha - \alpha') + \gamma + (\epsilon + \gamma' - \pi) + \delta') \\ &= (\pi - (\alpha' + \gamma' + \delta')) + (\pi - ((\alpha - \alpha') + \gamma + \epsilon)) \\ &= \pi - \text{WS}(ABC') + \pi - \text{WS}(AC'C) \end{aligned}$$

d.h.

$$\pi - \text{WS}(ABC) = (\pi - \text{WS}(ABC')) + (\pi - \text{WS}(AC'C)).$$

Nach Satz 5.30 sind diese zuletzt notierten Größen im elliptischen Fall alle < 0 , im hyperbolischen Fall alle > 0 , sodaß sich also in jedem Fall die Beträge addieren. Die Area-Funktion und der Betrag des Excesses bzw. Defectes der Winkelsumme, erfüllen somit die selbe triviale Funktionalgleichung.

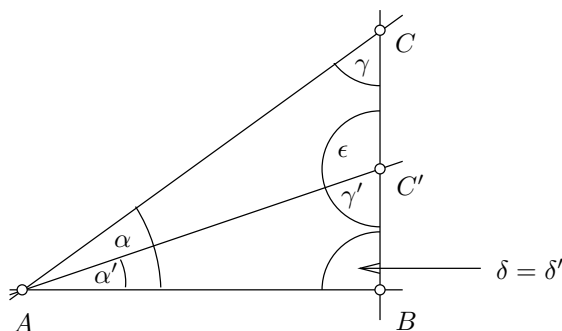


Abbildung 5.15

Nun seien zwei beliebige Dreiecke ABC und $A_1B_1C_1$ gegeben, wobei ohne Einschränkung $\text{Area}(ABC) > \text{Area}(A_1B_1C_1)$ gelte. Wir modifizieren $A_1B_1C_1$ in mehreren Schritten, ohne dabei Fläche oder Winkelsumme zu ändern, bis die Situation von Abbildung 5.15 erreicht ist:

- (a) Ersetze nach (2) die Ecke B_1 durch ein B'_1 , sodaß AB kongruent zu $A_1B'_1$.
- (b) Mit einer Kongruenzabbildung lege diese kongruenten Seiten aufeinander, d.h. wir können $A = A_1, B = B'_1$ annehmen. Dabei werde C zu C'_1 .
- (c) Verschiebe nach (1) den Punkt C'_1 , bis er auf der Geraden BC liegt.

Entweder ist nun eines der Dreiecke im anderen enthalten, oder sie liegen "auf verschiedenen Seiten" von AB . Dann spiegele ABC'_1 an der Geraden AB und wiederhole (c). Da ABC die größere Fläche hat, muß (spätestens) jetzt die Situation von Abbildung 5.15 erreicht sein.

Wir haben somit

$$\text{Area}(ABC) > \text{Area}(ABC') = \text{Area}(A_1B_1C_1)$$

und nach den Überlegungen zu (3) gleichzeitig

$$|\pi - \text{WS}(ABC)| > |\pi - \text{WS}(ABC')| = |\pi - \text{WS}(A_1B_1C_1)|$$

Die Fläche $\text{Area}(ABC)$ ist also eine monoton wachsende Funktion f vom Betrag $|\pi - \text{WS}(ABC)|$ des Excesses bzw. Defectes der Winkelsumme, die nach (3) noch der trivialen Funktionalgleichung

$$f(x_1 + x_2) = f(x_1) + f(x_2)$$

genügt, somit von der Form $f(x) = \lambda x$ mit einem $\lambda \in \mathbb{R}$ ist, was

$$\text{Area}(ABC) = \lambda |\pi - \text{WS}(ABC)|$$

bedeutet.

Den Faktor λ bestimmt man natürlich aus der Winkelsumme eines Dreiecks, das man willkürlich als Figur mit "Einheitsfläche" ausgewählt hat. \square

Ein aus der Schulgeometrie bekannter Satz, der in allen drei Geometrien gilt, möge diese Betrachtungen abschließen. (Siehe Abbildung 5.16.)

Satz 5.41 *Es sei ABC ein Dreieck mit Seitenmittelpunkten M_a, M_b, M_c und Mittelsenkrechten m_a, m_b, m_c . Dann gelten in jeder der drei Geometrien*

1. *Die Mittelsenkrechten gehen durch einen Punkt S .*
2. *Sie sind die Höhen in dem Dreieck $M_a M_b M_c$,*
3. *Die Seiten von ABC und von $M_a M_b M_c$ besitzen entsprechend paarweise gemeinsame Normalen. Genau im Euklidischen sind sie paarweise parallel.*

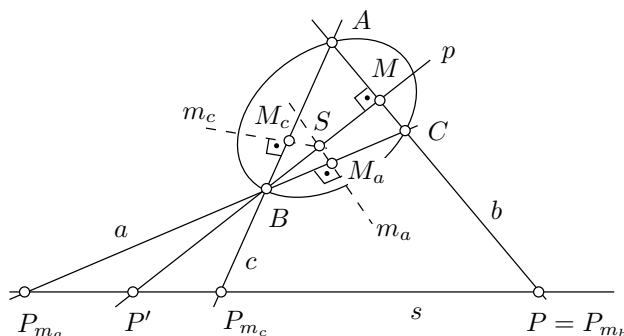


Abbildung 5.16

Beweis:

1. Es sei $S := m_a m_c$ dazu s die Polare bzw. Ferngerade mit der π -Involution bzw. absoluten Involution η . Für die Pole der Mittelsenkrechten gilt $P_{m_a} = as, P_{m_c} = cs$. Setze $P := bs, P' := \eta(P), p := P'S$. Dann ist P der Pol von p und wegen P auf s ist p das Lot durch S auf b . Der Fußpunkt sei M . Wir zeigen, daß M die "Mitte" von AC , d.h. p die Mittelsenkrechte ist. Spiegelung an m_c liefert die Kongruenz der Strecken AS und BS , Spiegelung an m_a die der Strecken BS und CS . Somit liegen die Punkte ABC auf einem Kreis \mathcal{K} um S und nach Satz 5.35 erzeugt \mathcal{K} auf s die vorgegebene Involution η . P und P' sind η -konjugiert, somit auch konjugiert bzgl. der von \mathcal{K} auf s erzeugten Involution und, da $P \in s, p = P'S$ sind, auch (P, p) \mathcal{K} -konjugiert. Damit liegen aber (P, M) und (A, C) harmonisch getrennt, d.h. M ist die Mitte. Dies liefert 1.

2. Die Pole $P_{m_a}, P_{m_b}, P_{m_c}$ liegen auf der Geraden s , ferner sind etwa $CM_aBP_{m_a}$ und $AM_cBP_{m_c}$ harmonische Würfe, offenbar perspektiv aus P_{m_b} . Damit sind P_{m_b}, M_a, M_c kollinear. Dies bedeutet, daß der Pol P_{m_b} der Mittelsenkrechten m_b auf der Geraden M_aM_c liegt, diese beiden Geraden also senkrecht aufeinander stehen. Dies liefert 2., woraus 3. unmittelbar folgt. \square

