FT Grundbegriffe der Funktionentheorie

Analytische Funktionen

Im Vorkapitel hatten wir die komplexen Zahlen kennengelernt sowie Erstes über die komplexe Exponentialfunktion, und danach überall, wo es ohne Zusatzaufwand möglich war, jeweils den komplexen Fall mitbehandelt.
So erhielten wir (Satz Z.50), daß Potenzreihen in $\mathbb{C}$ als Konvergenzbereich eine Kreisscheibe haben, haben Stetigkeit und Differenzierbarkeit gleich auch für Funktionen $f : \mathbb{C} \supset G \to \mathbb{C}$ erklärt und zwar formal gleichlautend zum reellen Fall.
Wir setzen fest:

Definition FT.1 *Eine Funktion $f : \mathbb{C} \supset G \to \mathbb{C}$ heißt "holomorph" oder "analytisch" auf G, wenn sie auf G stetig differenzierbar ist.*

Nach dieser Definition sind also insbesondere Polynome und rationale Funktionen analytisch auf $\mathbb{C}$, – bei den letzteren sind die Nennernullstellen auszunehmen –, ferner sind Potenzreihen analytisch im Inneren ihres Konvergenzkreises.
Die Aussagen über die Differenzierbarkeit von Summen, Produkten, Quotienten von differenzierbaren Funktionen, sowie über die Kettenregel und das Ableiten von Umkehrfunktionen lauten vollkommen gleich wie aus dem Reellen gewohnt.
Weiter hatten wir unter anderem die Funktionen $e^z, \cos z, \sin z$ als durch auf ganz $\mathbb{C}$ konvergente Potenzreihen erklärte und damit überall beliebig oft differenzierbare, also analytische Funktionen kennengelernt, für die insbesondere die aus dem Reellen bekannten Funktionalgleichungen auf ganz $\mathbb{C}$ gelten.
Wenn auch die Definitionen der Differenzierbarkeit im Reellen und im Komplexen formal übereinstimmen, erweist sich doch die komplexe Differenzierbarkeit als eine überraschend starke Eigenschaft einer Funktion, was dann zu unerwarteten Konsequenzen führt. So werden wir etwa sehen, daß eine analytische, d.h. also nach Definition zunächst nur einmal stetig (komplex) differenzierbare Funktion, automatisch unendlich oft stetig differenzierbar ist.

Wir bezeichnen komplexe Zahlen vorrangig durch $z = x+iy$, mit Realteil $\operatorname{Re} z := x$, Imaginärteil $\operatorname{Im} z := y$, oder über die "Polardarstellung" $z = r \cdot e^{i\varphi} = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$, wobei $r = |z| = \sqrt{x^2+y^2}$ der "Betrag" und φ das "Argument" der Zahl z ist.
Wir untersuchen Funktionen $f : \mathbb{C} \supset G \to \mathbb{C},\ z \mapsto f(z)$ und notieren dann auch

$$z = x + iy \mapsto f(z) = u + iv\ (= u(x,y) + iv(x,y)).$$

Dabei ist G stets ein Gebiet in $\mathbb{C}$. Häufig vorkommende und für uns wichtige Beispiele von Gebieten sind neben ganz $\mathbb{C}$ etwa

- eine offene Kreisscheibe: $K(r, z_0) := \{z \mid |z - z_0| < r\}$;
- ein Kreisring: $\{z \mid 0 \le r < |z - z_0| < R\}$;
- ein Streifen: $\{z \mid x_1 < \operatorname{Re} z < x_2\}$ oder $\{z \mid y_1 < \operatorname{Im} z < y_2\}$;
- ein Sektor: $\{re^{i\varphi} \mid r > 0, \varphi_1 < \varphi < \varphi_2\}$.

Diese Gebiete können auch "punktiert" sein, d.h. aus ihnen sind noch endlich (oder auch einmal abzählbar unendlich) viele Punkte wegzunehmen. Ferner brauchen wir

- den geschlitzten Kreis, d.h. einen Kreis $K(r, z_0)$, dem ein Radius $\{z = z_0 + te^{i\varphi} \mid 0 \le t < r\}$ fehlt;

– die geschlitzte Ebene, d.h. $\mathbb{C} \setminus \{z = z_0 + te^{i\varphi} \mid 0 \leq t\}$. Häufig haben wir es hier mit der negativ reellen Achse als fehlendem Strahl zu tun.

Wir verschaffen uns nun einen ersten Überblick über das Abbildungsverhalten einiger wichtiger Funktionen.

$z \mapsto z_0 + z$: Es handelt sich um eine Translation um z_0.

$z \mapsto z_0 \cdot z$: Hier verwendet man am besten Polarkoordinaten. Für $z = re^{i\varphi}, z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$ ist dann $z_0 z = r_0 r e^{i(\varphi_0+\varphi)}$. Der "Vektor" z wird also um den Faktor r_0 gestreckt und um den Winkel φ_0 gegen der Uhrzeigersinn gedreht, d.h wir haben eine *Drehstreckung*.

$z \mapsto z^n$ $(n \in \mathbb{N})$: In Polarkoordinaten bekommen wir wie eben $re^{i\varphi} \mapsto r^n e^{in\varphi}$. Hierbei wird also der Sektor $\{re^{i\varphi} \mid r > 0, -\frac{\pi}{n} < \varphi < \frac{\pi}{n}\}$ bijektiv auf die längs der negativ reellen Achse geschlitzte Ebene abgebildet.

Wurzelziehen: Unter einer n-ten Wurzel aus z verstehen wir eine Zahl $\sqrt[n]{z}$, für die $\left(\sqrt[n]{z}\right)^n = z$ ist. Zu $z = re^{i\varphi}$ ist also $\sqrt[n]{z} := \left(\sqrt[n]{r}\right)e^{i\frac{\varphi}{n}}$, wobei $\sqrt[n]{r}$ die eindeutig bestimmte positive Wurzel der rellen, positiven Zahl r bedeutet, eine solche n-te Wurzel.

Bezeichnung FT.2 *Die durch*

$$\{z = re^{i\varphi} \mid r \geq 0, -\pi < \varphi < +\pi\} \to \{w = \rho e^{i\psi} \mid \rho \geq 0, -\frac{\pi}{n} < \psi < +\frac{\pi}{n}\} :$$
$$re^{i\varphi} \mapsto \left(\sqrt[n]{r}\right)e^{i\frac{\varphi}{n}}$$

gegebene Abbildung heißt "Hauptzweig der n-ten Wurzel".

Sie bildet die längs der negativ reellen Achse geschlitzte Ebene auf das rechtsstehende Segment ab.
Nun ist aber für $k \in \mathbb{Z}$ stets $\left(e^{i\frac{\varphi}{n}+\frac{2k\pi i}{n}}\right)^n = e^{i\varphi+2k\pi i} = e^{i\varphi}$, sodaß wir also auch noch in $\sqrt[n]{z}\cdot e^{\frac{2k\pi i}{n}}$ jeweils n-te Wurzeln aus z haben, die jedoch in anderen, um $\frac{2k\pi}{n}$ gedrehten Segmenten liegen. Sie konstituieren weitere "Nebenzweige" der Wurzelfunktion. Wir halten fest:

Fakt FT.3 *Jede komplexe Zahl $z \neq 0$ besitzt genau n verschiedene n-te Wurzeln, die auseinander durch Multiplikation mit Potenzen der "n-ten Einheitswurzel" $e^{\frac{2\pi i}{n}}$ hervorgehen.*

Exponentialfunktion und Logarithmus:
Es sei $w = e^z$, $z = x + iy$, $w = \rho e^{i\psi}$. Dann ist bekanntlich

$$\rho e^{i\psi} = e^z = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i \sin y), \quad \text{mit } \rho = e^x, \psi = y.$$

Da die reelle Exponentialfunktion ganz $\mathbb{R}$ bijektiv auf die positiven reellen Zahlen abbildet, folgt damit

Fakt und Definition FT.4 *Die Exponentialfunktion $z \mapsto w = e^z$ bildet den Streifen $\{-\pi < y = \operatorname{Im} z < \pi\}$ bijektiv auf die längs der negativ reellen Achse geschlitzte Ebene ab.*
Die Umkehrung heißt der "Hauptzweig des Logarithmus". Er bildet die längs der negativ reellen Achse geschlitzte Ebene bijektiv auf den symmetrisch zur reellen Achse liegenden Streifen $\{-\pi < y = \operatorname{Im} z < \pi\}$ ab:

$$w := \rho e^{i\psi} \mapsto \ln(\rho e^{i\psi}) = \ln \rho + i\psi \quad (\rho > 0, -\pi < \psi < \pi).$$

Dabei ist $\ln \rho$ der aus dem Reellen bekannte natürliche Logarithmus, der die reelle Exponentialfunktion umkehrt.

Wegen $e^{i\psi+2k\pi i} = e^{i\psi}$ erfüllt aber auch

$$z_k := \ln\rho + i\psi + 2k\pi i \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

die Relation

$$e^{z_k} = e^{\ln\rho+i\psi+2k\pi i} = \rho e^{i\psi} = w.$$

Man erhält so die weiteren "Nebenzweige" des Logarithmus, die die geschlitzte Ebene bijektiv auf um $2k\pi i$ verschobenen Streifen der Breite 2π abbilden.
Beim Übergang über die negativ reelle Achse machen diese Haupt- bzw. Nebenzweige des Logarithmus einen Sprung der Höhe $\pm 2\pi i$, der Übergang bleibt dagegen glatt, wenn man gleichzeitig zum nächsten Zweig übergeht.

Warnung FT.5 *Das schlampige Umgehen mit den verschiedenen Zweigen des Logarithmus ist eine häufige Fehlerquelle!*

Wir hatten die Differenzierbarkeit erklärt über die Möglichkeit, gut linear zu approximieren:

$$f(z) = f(z_o) + f'(z_0)(z - z_0) + R(z, z_0), \quad \text{wobei } \frac{R(z, z_0)}{z - z_0} \to 0 \text{ für } z \to z_0.$$

Bis auf einen von höherer Ordnung klein werdenden Fehler setzt sich also eine bei z_0 differenzierbare Funktion zusammen aus einer Translation und einer Drehstreckung (Multiplikation mit $f'(z_0)$). Ist $f'(z_0) \neq 0$, so ist also f *winkeltreu* oder *lokal konform*, denn etwa ein kleines Dreieck wird (im Wesentlichen) nur vergrößert oder verkleinert und gedreht, aber nicht verzerrt.
Insbesondere ist damit eine analytische Funktion mit $f'(z_0) \neq 0$ lokal umkehrbar und – dafür ist der Beweis etwas mühsamer – auch die Umkehrung differenzierbar. Die Ableitung kann man dann via Kettenregel nach der schon im Reellen abgeleiteten Formel berechnen.

Eine komplexe Funktion $f : \mathbb{C} \supset G \to \mathbb{C},\ z = x + iy \mapsto w = u(x, y) + iv(x, y)$ kann man auch als Funktion $F : \mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (u(x, y), v(x, y))$ lesen. Dafür gilt:

Satz FT.6 *Die Funktion f ist genau dann analytisch, wenn u und v als reelle Funktionen $\mathbb{R}^2 \supset G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar sind und die* CAUCHY-RIEMANN*schen Differentialgleichungen*

$$u_x = v_y, \qquad u_y = -v_x$$

gelten.

Beweis: Für $z_0 = x_0 + iy_0$ und reelles $h \neq 0$ ist insbesondere

$$\begin{aligned} f'(z_0) &= \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + h) - f(z_0)}{h} \\ &= \lim_{h\to 0} \frac{u(x_0 + h, y_0) - u(x_0, y_0)}{h} + i \lim_{h\to 0} \frac{v(x_0 + h, y_0) - v(x_0, y_0)}{h} \\ &= u_x(x_0, y_0) + iv_x(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Arbeitet man mit einer rein imaginären Differenz ih statt h, so folgt ganz analog

$$f'(z_0) = \lim_{h\to 0} \frac{f(z_0 + ih) - f(z_0)}{ih} = -iu_y(x_0, y_0) + v_y(x_0, y_0),$$

woraus durch Vergleich die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen folgen. Auf den Beweis der Umkehrung sei verzichtet. □

Dieses Faktum ist für den Physiker insofern interessant, als damit gilt

Folgerung FT.7 *Real- und Imaginärteil einer analytischen Funktion sind selbst harmonische Funktionen, erfüllen also die Potentialgleichung*

$$\Delta u = 0 \ \text{ in der Ebene.}$$

Beweis: Über die CAUCHY-RIEMANNschen Differentialgleichungen bekommen wir für den Realteil

$$u_{xx} = (v_y)_x = (v_x)_y = -u_{yy}, \text{ also } u_{xx} + u_{yy} = 0.$$

Für den Imaginärteil schließt man analog. □

Definition FT.8 *Eine analytische Funktion $F : G \to \mathbb{C}$ heißt "Stammfunktion" zu einer Funktion $f : G \to \mathbb{C}$, wenn*

$$F'(z) = f(z) \text{ auf } G.$$

Über die schon erwähnten Ableitungsregeln bekommen wir etwa:
Für $n \in \mathbb{Z}$, $n \neq -1$ ist $\frac{1}{n+1}(z - z_0)^{n+1}$ eine Stammfunktion zu $(z - z_0)^n$ auf ganz $\mathbb{C}$, sofern $n \geq 0$, und auf $\mathbb{C} \setminus \{z_0\}$ für $n < 0$.

Eine Stammfunktion zu $\frac{1}{z}$ ist $\ln z$, **wobei aber auf den Definitionsbereich zu achten ist!** Dieser ist die (längs der negativ reellen Achse) geschlitzte Ebene.
Entsprechend ist $\ln(z - z_0)$ Stammfunktion zu $\frac{1}{(z-z_0)}$ auf einer entsprechend geschlitzten Ebene.

Der Satz über die gliedweise Differenzierbarkeit von Potenzreihen liefert sofort:
Zu einer Potenzreihe

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ ist}$$
$$F(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n (z - z_0)^{n+1}$$

eine Stammfunktion auf dem für beide Potenzreihen gleichen Konvergenzkreis.

Den Begriff der Potenzreihe können wir noch etwas ausbauen zu den sog. LAURENT-Reihen:
Ist $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ein Potenzreihe mit Konvergenzradius $\rho \in (0, \infty]$, so konvergiert also diese Reihe innerhalb des Kreises $K(\rho, 0)$ absolut und lokal gleichmäßig. Setzen wir nun $\frac{1}{z}$ statt z ein, so folgt:
Die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ konvergiert außerhalb von $K(\frac{1}{\rho}, 0)$ absolut und lokal gleichmäßig.
Die Funktion $g(z) := \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$ ist analytisch in $K(\rho, 0)$ und somit ist die Funktion $f(z) := g(\frac{1}{z}) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^{-n}$ analytisch außerhalb von $K(\frac{1}{\rho}, 0)$ und via Kettenregel folgt, daß man auch hier die Ableitung durch gliedweises Differenzieren bilden darf.

Definition FT.9 *Unter einer* LAURENT*-Reihe um den Punkt $z_0 = 0$ versteht man eine Reihe der Form*

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n = \sum_{n=1}^{\infty} a_{-n} \frac{1}{z^n} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

Die erste Reihe rechts, mit den negativen Potenzen, heißt "Hauptteil" der Reihe, die zweite heißt "Nebenteil". Eine LAURENT*-Reihe heißt an einer Stelle z konvergent, wenn dort Haupt- und Nebenteil unabhängig von einander konvergieren.*

Mit den obigen Vorüberlegungen folgt sofort

Fakt FT.10 *Ist R der Konvergenzradius des Nebenteiles und $\rho := \frac{1}{r}$ der Konvergenzradius der zum Hauptteil gehörenden Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_{-n}\zeta^n$, so konvergiert die* LAURENT*-Reihe in dem offenen Kreisring $r < |z| < R$ absolut und lokal gleichmäßig, außerhalb des abgeschlossenen Ringes $r \leq |z| \leq R$ divergiert sie. In dem Kreisring stellt die Reihe eine analytische Funktion dar, deren Ableitung durch gliedweises Differenzieren erhalten wird.*

Bestimmen wir noch eine Stammfunktion zu der auf $r < |z| < R$ definierten Funktion

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n.$$

Fall 1 : Es ist $a_{-1} = 0$:
Dann ist, da der Term für $n = -1$ fehlt, offenbar

$$F(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n \frac{1}{n+1} z^{n+1}.$$

eine wohldefinierte LAURENT-Reihe, die ebenfalls auf $r < |z| < R$ konvergiert und deren (gliedweise gebildete) Ableitung gerade f ist. Somit haben wir in dieser auf dem ganzen Kreisring $r < |z| < R$ definierten Funktion eine Stammfunktion gefunden.

Fall 2 : Es ist $a_{-1} \neq 0$:
Dann ist

$$f(z) = \sum_{n=-\infty, n\neq -1}^{\infty} a_n z^n + a_{-1}\frac{1}{z}$$

und

$$F(z) = \sum_{n=-\infty, n\neq -1}^{\infty} a_n \frac{1}{n+1} z^{n+1} + a_{-1} \ln z$$

ist eine Stammfunktion. Die Reihe konvergiert wieder in dem vollen Kreisring, der Logarithmus ist aber nur auf der geschlitzten Ebene analytisch und macht an dem Schlitz einen Sprung in der Höhe von $2\pi i$. Damit folgt:
Diese Funktion $F(z)$ ist auf dem geschlitzten Kreisring $r < |z| < R, -\pi < \varphi < \pi$ eine Stammfunktion zu f. An dem Schlitz macht F einen Sprung der Höhe $a_{-1} \cdot 2\pi i$. Man nennt $a_{-1} \in \mathbb{C}$ das "Residuum" der LAURENT-Reihe.

Integration

Definition FT.11 *Es sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet, $\gamma : [t_0, t_1] \to G$ ein in G verlaufender stetig differenzierbarer Weg und $f : G \to \mathbb{C}$ stetig. Dann erklärt man das "komplexe Kurvenintegral" durch*

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt.$$

Diese Definition ist so gemacht, daß sich das Integral nicht ändert, wenn man zu einer anderen Parametrisierung des Weges übergeht, aber die Durchlaufrichtung beibehält, dagegen das Vorzeichen ändert, wenn man die Durchlaufrichtung umkehrt.
Ferner gilt wieder die Abschätzung

Fakt FT.12

$$\Big|\int_\gamma f(z)dz\Big| \leq C \cdot L(\gamma),$$

wobei $L(\gamma)$ die Länge des Integrationsweges und C eine Abschätzung für $|f(z)|$ auf diesem Weg ist.

Ein für alles weitere sehr wichtiges Beispiel ist folgendes

Beispiel FT.13 *Der Weg γ sei gegeben durch $\gamma(t) := r(t)e^{i\varphi(t)},\ t_0 \leq t \leq t_1$, wobei r, φ stetig differenzierbar und stets $r(t) > 0$ sei. Dann verläuft $\gamma(t)$ ganz in $G := \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Also ist*

$$\begin{aligned}\int_\gamma \frac{1}{z}dz &= \int_{t_0}^{t_1} \frac{1}{r(t)e^{i\varphi(t)}}\big(r'(t) + ir(t)\varphi'(t)\big)e^{i\varphi(t)}dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} \left(\frac{r'(t)}{r(t)} + i\varphi'(t)\right)dt \\ &= \ln r(t)\Big|_{t_0}^{t_1} + i\big(\varphi(t_1) - \varphi(t_0)\big).\end{aligned}$$

Ist der Weg geschlossen, d.h. $\gamma(t_1) = \gamma(t_0)$, so ist $r(t_1) = r(t_0)$ und $e^{i\varphi(t_1)} = e^{i\varphi(t_0)}$ also $\varphi(t_1) = \varphi(t_0) + 2\nu\pi$, wobei $\nu \in \mathbb{Z}$ gerade angibt, wie oft die Kurve den Nullpunkt entgegen dem Uhrzeigersinn umlaufen hat. Wir haben somit

Satz und Definition FT.14 *Umläuft der geschlossenen Weg γ den Nullpunkt genau ν mal ($\nu \in \mathbb{Z}$), so ist*

$$\int_\gamma \frac{1}{z}dz = 2\pi i\nu.$$

Man nennt daher auch die ganze Zahl

$$\nu_\gamma(0) := \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{1}{z}dz$$

die "Umlaufszahl" des geschlossenen Weges γ um den Nullpunkt.
Sinngemäß erklärt man die Umlaufszahlen um einen Punkt z_0 über das Integral $\int_\gamma \frac{1}{z-z_0}dz$.

Diese Integrale kann man also allein über das Anschauen der Kurve bestimmen.

Bezeichnung FT.15 *Um deutlich zu machen, daß es sich um das Integral über einen geschlossenen Weg handelt, verwendet man auch das Symbol*

$$\oint_\gamma f(z)dz.$$

Das komplexe Kurvenintegral ist über ein reelles Integral definiert und somit bekommen wir via Kettenregel

Satz FT.16 *Besitzt die analytische Funktion f auf einem Gebiet G eine Stammfunktion F, so gilt für jeden ganz in G verlaufenden Weg $\gamma : [t_0, t_1] \to G$*

$$\int_\gamma f(z)dz \ = \ F(\gamma(t_1)) - F(\gamma(t_0)).$$

Insbesondere verschwindet dieses Integral für jeden geschlossenen solchen Weg.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned}\int_\gamma f(z)dz &= \int_{t_0}^{t_1} f(\gamma(t))\gamma'(t)dt \\ &= \int_{t_0}^{t_1} F'(\gamma(t))\gamma'(t)dt = \int_{t_0}^{t_1} \frac{d}{dt}\Big(F(\gamma(t))\Big)dt \\ &= F(\gamma(t_1)) - F(\gamma(t_0))\end{aligned}$$

□

Es sei daran erinnert, daß die Funktion $\frac{1}{z}$ auf der durch Wegnehmen des Nullpunkts punktierten Ebene $G = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ **keine Stammfunktion** besitzt, sondern nur auf der geschlitzten Ebene. Und nach Satz und Definition FT.14 ist das Integral über $\frac{1}{z}$ über einen den Nullpunkt tatsächlich umlaufenden Weg auch von Null verschieden. Die Kombination dieser Aussagen liefert uns eine erste Version des sog. Residuensatzes:

Satz FT.17 *Ist* $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ *eine in dem Kreisring* $r < |z| < R$ *konvergente* LAURENT*-Reihe und ist* γ *ein ganz in diesem Ring verlaufender geschlossener Weg, der den Nullpunkt genau* ν_γ *mal umläuft, so ist*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i \cdot \nu_\gamma \cdot a_{-1}$$

Dabei ist a_{-1} *der das Residuum der Reihe genannte Koeffizient von* z^{-1}.

Beweis: Wir zerlegen

$$f(z) = \sum_{n=-\infty, n\neq -1}^{\infty} a_n z^n \; + \; a_{-1}\frac{1}{z}$$

und integrieren einzeln. Der linke Teil besitzt eine Stammfunktion im Ring, somit verschwindet das Integral längs unseres geschlossenen Weges. Das Integral über $a_{-1}\frac{1}{z}$ haben wir in Satz und Definition FT.14 berechnet. □

Für einen gewöhnlichen Kreis $|z| = r_1$ mit $r < r_1 < R$ ist die Umlaufszahl gerade $= 1$. Dafür ist dann also

$$\oint_{|z|=r_1} f(z)dz = 2\pi i a_{-1} \text{ oder } a_{-1} = \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r_1} f(z)dz,$$

was den Namen "Residuum" (= das, was übrigbleibt) erklärt.

Diese ganzen Überlegungen bleiben richtig, wenn man auch Wege zuläßt, die endlich viele "Ecken" haben oder anders gesagt, die aus endlich vielen glatten Teilen zusammengesetzt sind. Sind $\gamma_1, ..., \gamma_k$ solche Wegstücke, so setzt man für die Vereinigung aller den Weg $\gamma := \gamma_1 + ... + \gamma_k$ und erklärt dafür

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_{\gamma_1} f(z)dz + ... + \int_{\gamma_k} f(z)dz.$$

Ferner ist für jeden Weg γ ja

$$\int_\gamma f(z)dz = -\int_{-\gamma} f(z)dz,$$

wobei $-\gamma$ den rückwärts durchlaufenen Weg bezeichnet. Dafür ist dann also

$$\int_{\gamma+(-\gamma)} f(z)dz := \int_\gamma f(z)dz + \int_{-\gamma} f(z)dz = 0,$$

sodaß das Einfügen solcher hin und her durchlaufener Wege das Gesamtintegral nicht ändert.
Damit kann man etwa mehrere disjunkt liegende Kreise – oder allgemeiner geschlossene Wege – durch Einfügen von Geradenstücken, die man je einmal in beiden Richtungen durchläuft, zu einem einzigen geschlossenen Weg kombinieren. Das Integral über diesen Weg ist dann gleich der Summe der Integrale über die ursprünglich gegebenen Wege.

Wir kommen nun zu dem zentralen Integralsatz von CAUCHY.

Definition FT.18 *Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Dann heißt jeder Punkt von G "regulär", jeder Punkt $\notin G$ "singulär".*
Ein Punkt z_0 heißt "isolierter singulärer Punkt" oder "isolierte Singularität" von f, wenn er selbst singulär ist, also $\notin G$, aber eine hinreichend kleine punktierte Kreisscheibe $\{z \,|\, 0 < |z - z_0| < \rho\}$ ganz in G liegt.

Beispiel FT.19 *Die Funktion $f(z) = \ln z + \frac{1}{2-z}$ ist analytisch auf der geschlitzten Ebene ohne den Punkt $z_0 = 2$. Dieser ist ein isolierter singulärer Punkt, alle anderen singulären Punkte sind nicht isoliert.*

In Satz FT.16 hatten wir die Existenz einer Stammfunktion gefordert, um auf das Verschwinden von Integralen über geschlossenen Kurven schließen zu können. Dies können wir nun durch eine Vorausetzung an die Kurve ersetzen.

Integralsatz von CAUCHY FT.20 *Es sei $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch, γ eine geschlossene Kurve in G, die keinen nicht zu G gehörigen, also singulären, Punkt umläuft, für die also die Umlaufsszahl $\nu_\gamma(z) = 0$ für jedes $z \in \mathbb{C} \setminus G$. Dann ist*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 0.$$

Vom **Beweis** sei nur die Hauptidee erwähnt. Es sei etwa γ der Rand eines Quadrates mit Seitenlänge ℓ, das vollständig im Analytizitätsgebiet G von f liegt. Wir unterteilen dieses Quadrat für jedes $n \in \mathbb{N}$ in n^2 viele kleine Quadrate der Seitenlänge $\frac{\ell}{n}$ und wenn man alle diese Quadratränder etwa positiv durchläuft, so ist die Summe der Integrale über alle diese Quadratränder gleich dem Integral über den ursprünglichen Weg γ.
Für den Rand γ_n eines solchen kleinen Quadrates mit Seitenlänge $\frac{\ell}{n}$ kann man dann folgendermaßen schließen: Es sei z_0 der Mittelpunkt des (kleinen) Quadrates. Dann ist für z auf γ_n ja

$$f(z) = f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0) + R(z - z_0),$$

wobei der Rest abschätzbar ist durch

$$\big|R(z - z_0)\big| \le C \cdot \frac{\ell}{n} \cdot \epsilon(\frac{\ell}{n}), \text{ wobei } \epsilon(t) \to 0 \text{ für } t \to 0.$$

Damit ist

$$\oint_{\gamma_n} f(z)dz = \oint_{\gamma_n} \big(f(z_0) + (z - z_0)f'(z_0)\big)dz + \oint_{\gamma_n} R(z - z_0)dz.$$

Die lineare Funktion hat eine Stammfunktion, somit verschwindet ihr Integral über den geschlossenen Weg γ_n, das Integral über den Rest schätzt man nach Fakt FT.12 ab durch

$$\left|\oint_{\gamma_n} R(z-z_0)dz\right| \leq 4\cdot\frac{\ell}{n}\cdot\left(C\cdot\frac{\ell}{n}\cdot\epsilon(\frac{\ell}{n})\right) = C_1\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\epsilon(\frac{\ell}{n}).$$

Summiert man alle Integrale über die n^2 vielen kleinen Quadratränder, so fällt der Faktor $\frac{1}{n^2}$ heraus, aber der Term $\epsilon(\frac{\ell}{n})$ bleibt und geht mit $n \to \infty$ selbst gegen Null, sodaß das ganze Integral, das ja nicht von n abhängt, verschwinden muß.

Interessant wird es nun, wenn wir mit diesem Satz Integrale über Wege bearbeiten, die doch Singularitäten umlaufen.
Zunächst

Definition und Satz FT.21 *Ist f analytisch in der punktierten Kreisscheibe*

$$G_{z_0} := \{z \,|\, 0 < |z-z_0| < \epsilon\},$$

so ist für $0 < r < \epsilon$ das Integral

$$\oint_{|z|=r} f(z)dz$$

unabhängig von r. Man nennt

$$\operatorname{Res}_{z_0} f := \frac{1}{2\pi i}\oint_{|z|=r} f(z)dz$$

das "Residuum" von f an z_0. Ist f durch eine LAURENT-*Reihe gegeben, so stimmt dies mit der alten Bezeichnung überein.*

Beweis: Sind $0 < r_1 < r_2 < \epsilon$, so orientiere man den größeren Kreis positiv, den kleineren negativ und verbinde beide durch ein in beiden Richtungen durchlaufenes Geradenstück. Dann ist für jeden Punkt außerhalb von G_{z_0}, insbesondere also auch für den "Mittelpunkt" z_0 zu diesem Weg γ die Umlaufszahl $\nu_\gamma = 0$. Damit kann man den CAUCHY-Satz anwenden und erhält, daß die beiden Integrale über die beiden nun jeweils positiv orientierten Kreise übereinstimmen. □

Damit kommen wir zu dem gerade auch für den Physiker wichtigen

Residuensatz FT.22 *Es sei G ein Gebiet, darin seien $z_1, ..., z_n \in G$ endlich viele Punkte und $f : G \setminus \{z_1, ..., z_n\} \to \mathbb{C}$ analytisch. (f hat also die isolierten Singularitäten $z_1, ..., z_n$.) Ist dann γ ein geschlossener Weg, der ganz in G verläuft, keinen der Punkte $z_1, ..., z_n$ trifft und keinen außerhalb von G gelegenen singulären Punkt umläuft, so ist*

$$\oint_\gamma f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\nu_\gamma(z_k)\cdot\operatorname{Res}_{z_k} f,$$

wobei wieder $\nu_\gamma(z_k)$ die Umlaufszahl ist, also angibt, wie oft γ den Punkt z_k umläuft.

Beweis: Wir legen um jeden der singulären Punkte einen so kleinen Kreis, daß er keine weiteren singulären Punkte mehr enthält und verbinden jeden Kreis durch einen in G verlaufenden "Stichweg" mit γ. Wir erhalten dann einen neuen Weg $\tilde{\gamma}$ indem wir

– zunächst auf γ laufen, bis wir den nächsten Stichweg treffen,

- dann den Stichweg bis zum Kreis um die Singularität gehen,
- dann diesen Kreis $(-\nu_\gamma(z_k))$ mal (also umgekehrt!) durchlaufen,
- dann den Stichweg zurückgehen und
- auf γ weiter bis zum nächsten Stichweg (bzw. schließlich bis zum Startpunkt) laufen.

Auf diesen Weg kann man nun den CAUCHY-Satz anwenden, sodaß

$$0 = \oint_{\tilde{\gamma}} f(z)dz = \oint_\gamma f(z)dz + \int_{\text{Stichwege}} f(z)dz + \sum_{k=1}^{n} (-\nu_\gamma(z_k)) \oint_{\text{Kreis um } z_k} f(z)dz.$$

Die Stichwege werden hin und her durchlaufen, somit fallen ihre Integrale weg, und die ganz rechts stehenden Integrale sind ja im wesentlichen die Residuen. Wir haben also

$$\oint_\gamma f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \nu_\gamma(z_k) \oint_{\text{Kreis um } z_k} f(z)dz = \sum_{k=1}^{n} \nu_\gamma(z_k) \cdot 2\pi i \cdot \operatorname{Res}_{z_k} f.$$

□

Der Witz dieses Satzes liegt darin, daß wir Methoden kennenlernen werden, die Residuen ohne Integration zu bestimmen. Dann wird der Residuensatz ein Mittel zum Berechnen von Integralen über geschlossenen Wegen und über einige Tricks auch zum Berechnen häßlicher reeller Integrale. Ein erstes wichtiges Beispiel für eine Residuenberechnung ist

Satz FT.23 *Es sei f analytisch in G und $z_0 \in G$. Dann ist*

$$\operatorname{Res}_{z_0}\left(\frac{f(z)}{z - z_0}\right) = f(z_0).$$

Beweis: Die Funktion $g(z) := \frac{f(z)}{z-z_0}$ ist analytisch in $G \setminus \{z_0\}$, und somit ist nach Definition und Satz FT.21

$$\operatorname{Res}_{z_0}\left(\frac{f(z)}{z - z_0}\right) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz$$

und zwar für jedes hinreichend kleine (positive) r. Diese Integraldarstellung kann man umschreiben zu

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} dz + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z_0)}{z - z_0} dz.$$

Wie schon früher ausgerechnet hat das ganz rechts stehende Integral den Wert $f(z_0)$. Da f ja in G analytisch ist, ist es insbesondere bei z_0 differenzierbar, somit der Integrand des ersten Integrals rechts beschränkt. Der Integrationsweg ist ein Kreis mit Radius r, seine Länge geht also mit r selbst gegen Null. Wegen Fakt FT.12 muß also dieses Integral gleich Null sein, womit unsere Formel gezeigt ist. □

Indem wir dies noch ein wenig umformulieren, erhalten wir die berühmte und wichtige

CAUCHY-Formel für die Kreisscheibe FT.24 *Es sei f analytisch in dem Gebiet G, das die* **abgeschlossene** *Kreisscheibe $\{z \,|\, |z - z_0| \le r\}$ enthalte. Dann gilt für jedes z mit $|z - z_0| < r$, d.h. im Innern der Kreisscheibe die Darstellung*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta,$$

d.h. die Werte einer analytischen Funktion im Inneren eines Kreises sind bestimmt durch die Werte auf dessen Rand!

Der **Beweis** besteht aus zwei, jetzt einfachen Schritten.
Die Funktion $g(\zeta) := \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}$ hat als einzige hier interessierende isolierte Singularität die Stelle z, sodaß nach dem Residuensatz gilt

$$\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta = \mathrm{Res}_z\, g.$$

und dieses Residuum ist nach Satz FT.23 (geänderte Bezeichnung!) gerade gleich $f(z)$. □
Indem man den Residuensatz statt auf den Kreis $|\zeta - z_0| = r$ auf einen geschlossenen Weg γ anwendet, der aus einem negativ durchlaufenen Kreis $|\zeta - z_0| = r$, einem positiv durchlaufenen Kreis $|\zeta - z_0| = R$, (wobei $r < R$,) und einem dazwischen hin und her durchlaufenen Geradenstück besteht, bekommt man die

CAUCHY-Formel für die Kreisring FT.25 *Es sei f analytisch in dem Gebiet G, das den* **abgeschlossenen** *Kreisring $\{z \,|\, r \le |z - z_0| \le R\}$ enthalte. Dann gilt für jedes z mit $r < |z - z_0| < R$, d.h. im Innern des Kreisrings die Darstellung*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = R} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta$$

d.h. die Werte einer analytischen Funktion im Inneren eines Kreisringes sind bestimmt durch die Werte auf dessen Rand!
(Beachten Sie die Form des Nenners im zweiten Integral!)

Die Darstellung analytischer Funktionen durch Potenz- und LAURENT-Reihen.

Wie hatten schon gesehen, daß Potenz- bzw. LAURENT-Reihen in ihren Konvergenzgebieten analytische Funktionen darstellen. Diese Aussage können wir nun mit Hilfe der CAUCHY-Formeln umkehren.

Potenzreihen-Entwicklungssatz FT.26 *Es sei f analytisch in G und die offene Kreisscheibe $K(\rho, z_0) := \{z \,|\, |z - z_0| < \rho\}$ liege ganz in G. Dann läßt sich f um z_0 in eine Potenzreihe entwickeln, die mindestens in dieser Kreisscheibe konvergiert, d.h. für $|z - z_0| < \rho$ gilt eine Darstellung*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n \text{ mit Konvergenzradius } \ge \rho.$$

Für die Koeffizienten gelten mit einem beliebigen $r : 0 < r < \rho$ die Formeln

$$a_n = \frac{1}{n!} f^{(n)}(z_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Beweis: Haben wir gezeigt, daß f durch eine Potenzreihe darstellbar ist, so folgt natürlich die Darstellung der Koeffizienten als Werte von Ableitungen aus der Möglichkeit gliedweise zu differenzieren. Die Integraldarstellung werden wir bei der Ableitung der Entwickelbarkeit miterhalten.
Sei z mit $|z - z_0| < \rho$ gegeben. Wir wählen ein r mit $|z - z_0| < r < \rho$ und nutzen damit die CAUCHY-Formel für die Kreisscheibe. Dies liefert

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}.$$

Nun bauen wir den im Integral auftretenden Term $\frac{1}{\zeta - z}$ um zu einer Potenzreihe um den Punkt z_0 :

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{(\zeta - z_0) - (z - z_0)} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}},$$

Nach Voraussetzung ist $\left|\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right| = \left|\frac{z - z_0}{r}\right| < 1$, sodaß wir die erhaltene Größe als Grenzwert einer geometrischen Reihe lesen können, die zudem für alle $|\zeta - z_0| = r$ absolut gleichmäßig konvergiert, sodaß

$$\frac{1}{\zeta - z} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \frac{1}{1 - \frac{z - z_0}{\zeta - z_0}} = \frac{1}{\zeta - z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{z - z_0}{\zeta - z_0}\right)^n.$$

Setzen wir dies in das Integral ein, so darf man wegen der absoluten gleichmäßigen Konvergenz gliedweise integrieren und erhält

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta\right) (z - z_0)^n,$$

womit alles gezeigt ist.
Man beachte, daß das den Koeffizienten a_n darstellende Integral nach dem Integralsatz von CAUCHY FT.20 unabhängig von dem gewählten r $(0 < r < \rho)$ ist.

□

Entsprechend liefert die CAUCHY-Formel für die Kreisring FT.25 den

LAURENT-Reihen-Entwicklungssatz FT.27 *Es sei f analytisch in G und der offene Kreisring $\{z \,|\, 0 \leq \rho_1 < |z - z_0| < \rho_2\}$ liege ganz in G. ($\rho_1 = 0$, d.h. z_0 als isolierte Singularität ist ein wichtiger hier eingeschlossener Fall!)*
Dann läßt sich f in diesem Kreisring um z_0 in eine LAURENT-Reihe entwickeln, die mindestens in diesem Kreisring konvergiert, d.h. für $\rho_1 < |z - z_0| < \rho_2$ gilt eine Darstellung

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n.$$

Für die Koeffizienten gelten mit einem beliebigen $r : \rho_1 < r < \rho_2$ für alle $n \in \mathbb{Z}$ die Formeln

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}} d\zeta.$$

Beweis: Mit $\rho_1 < r_1 < |z - z_0| < r_2 < \rho_2$ ist nach der CAUCHY-Formel für die Kreisring FT.25

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r_2} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta + \frac{1}{2\pi i} \oint_{|\zeta - z_0| = r_1} \frac{f(\zeta)}{z - \zeta} d\zeta$$

Im ersten Integral ist $|\zeta - z_0| = r_2 > |z - z_0|$ und wir verfahren wie bei dem letzten Beweis. Das erste Integral wird damit als gewöhnliche Potenzreihe dargestellt.
Im zweiten Integral ist $|\zeta - z_0| = r_1 < |z - z_0|$ und wir haben die Darstellung etwas zu modifizieren:

$$\frac{1}{z-\zeta} = \frac{1}{(z-z_0)-(\zeta-z_0)} = \frac{1}{z-z_0} \cdot \frac{1}{1-\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}}$$
$$= \frac{1}{z-z_0} \cdot \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\zeta-z_0}{z-z_0}\right)^n = \sum_{n=-1}^{-\infty} \frac{(z-z_0)^n}{(\zeta-z_0)^{n+1}}.$$

Nun schließt man wie oben weiter und bekommt aus dem zweiten Integral den nach negativen Potenzen fortschreitenden Hauptteil der LAURENT-Reihe. □

Hieraus bekommen wir ein ganze Reihe von wichtigen Folgerungen.

Satz FT.28 *Eine analytische, d.h. einmal komplex stetig differenzierbare Funktion ist automatisch beliebig oft komplex differenzierbar.*

Beweis: Für Potenzreihen ist dies bekannt und analytische Funktionen lassen sich ja lokal in Potenzreihen entwickeln. □

Ferner bekommen wir ein häufig anwendbares Kriterium zur Bestimmung der Konvergenzradien von Potenzreihen.

Satz FT.29 *Es sei f analytisch in G, $z_0 \in G$ und $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ die (*TAYLOR*)-Potenzreihe zu f um z_0. Dann konvergiert die Reihe mindestens in dem größten Kreis um z_0, der noch ganz in G liegt und stellt dort die Funktion dar.*

Beweis: Mit dem Potenzreihen-Entwicklungssatz FT.26 können wir f in diesem größten Kreis in eine Potenzreihe entwickeln und erhalten die TAYLOR-Reihe. □

Beispiel FT.30 *$f(z) = \ln(1+z)$ ist analytisch in der geschlitzten Ebene $G := \mathbb{C} \setminus \{z = x + iy \,|\, y = 0, x \le -1\}$. Somit können wir f um $z_0 = 0$ in eine Potenzreihe entwickeln, wobei der maximale singularitätenfreie Kreis gerade den Radius 1 hat. Die Koeffizienten bekommen wir (einfach) aus den Ableitungen bei $z_0 = 0$. Somit folgt*

$$\ln(1+z) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n} z^n,$$

diese Reihe konvergiert für $|z| < 1$ und stellt dort die Funktion dar.

Vergleichen Sie dies mit Beispiel F.79, wo wir die Konvergenz zunächst nur für $|z| < \frac{1}{2}$ nachweisen konnten. Auf diese Weise sind in Kapitel F fast alle Konvergenzradien bestimmt.

Wir nutzen die Darstellbarkeit durch Potenzreihen weiter zur Klassifikation von Nullstellen.

Definition FT.31 *Es sei f analytisch in G und $a \in \mathbb{C}$. Wir sagen "f hat an z_0 eine a-Stelle", wenn $f(z_0) = a$ ist. Die a-Stelle heißt einfach, zweifach,..., n-fach, wenn*

$$f(z_0) = a, \; f'(z_0) = ... = f^{(n-1)}(z_0) = 0, \; \text{aber } f^{(n)}(z_0) \neq 0$$

ist. Es heißt dann n die "Ordnung " der a-Stelle.

Eine a-Stelle von $f(z)$ ist offenbar eine Nullstelle von $f(z) - a$ und zwar von derselben Ordnung. Wir betrachten daher künftig nur Nullstellen.
Trivialerweise folgt aus der Definition

Fakt FT.32 *Es ist z_0 genau dann eine n-fache Nullstelle von f, wenn die (*TAYLOR*)-Potenzreihe von f um z_0 genau mit dem n-ten Term beginnt, d.h wenn mit $a_n \neq 0$*

$$\begin{aligned} f(z) &= a_n(z-z_0)^n + a_{n+1}(z-z_0)^{n+1} + \ldots.. \\ &= a_n(z-z_0)^n \cdot \big(1 + \frac{a_{n+1}}{a_n}(z-z_0) + \frac{a_{n+2}}{a_n}(z-z_0)^2 + \ldots..\big). \end{aligned}$$

Die rechts in Klammern stehende Potenzreihe ist ja bei $z = z_0$ stetig und hat dort den Wert 1. Somit gibt es eine ganze Umgebung $U(z_0)$, in der sie $\neq 0$ ist. Also folgt

Fakt FT.33 *Die Nullstellen endlicher Ordnung einer analytischen Funktion liegen sämtlich isoliert, d.h. zu jeder solchen Nullstelle z_0 gibt es eine ganze Umgebung, in der keine weitere Nullstelle von f liegt.*

Neben den Nullstellen endlicher Ordnung kann es also nur noch Nullstellen der "Ordnung ∞" geben, an denen dann sämtliche Koeffizienten der TAYLOR-Reihe verschwinden. Dann ist offenbar $f(z) = 0$ für alle Stellen im Geltungsbereich dieser Potenzreihenentwicklung, d.h. im größten Kreis, in dem keine Singularitäten auftreten. Dann kann man aber durch Variation der Entwicklungsstelle schließen, daß überall $f(z) = 0$ gelten muß. Wir haben also

Fakt FT.34 *Ist f analytisch auf G und besitzt f dort eine ∞-fache a-Stelle, so ist f konstant $= a$ auf ganz G.*

Zusammengenommen ergibt dies

Satz FT.35 *Ist f eine auf G analytische Funktion und nicht konstant, so liegen die Nullstellen isoliert. (Analog für a-Stellen mit beliebigem a.)*

Dies ist nun schon fast der zentrale Identitätssatz, der besagt, daß die volle Information über eine analytische Funktion schon in kleinsten Teilen von ihr enthalten ist:

Identitätssatz FT.36 *Sind f und g beide analytisch auf einem Gebiet G und stimmen sie auf einer Punktmenge $M \subset G$ überein, die in G einen Häufungspunkt besitzt, so sind sie identisch, d.h. es ist*

$$f(z) = g(z) \quad \text{für alle } z \in G.$$

Typische solche als M auftretenden Punktmengen sind

- *eine Folge $(z_n)_{n=1}^{\infty}$ in G mit einem Grenzwert z_0, der selbst noch zu G gehört.*
- *ein kleines Kurvenstück γ in G. (Hier ist jeder Punkt von γ ein solcher Häufungspunkt.)*

Beweis: Nach Voraussetzung ist $h(z) := f(z) - g(z)$ analytisch in G und besitzt dort alle Punkte von M als Nullstellen. Da z_0 Häufungspunkt von M und in G ist, ist auch $h(z_0) = 0$. Somit ist z_0 eine Nullstelle von h, die aber nach Konstruktion nun eben gerade **nicht** isoliert liegt. Also kann nach dem Satz FT.35 die Funktion h nur auf G konstant sein und zwar mit dem Wert Null. Dies bedeutet aber, daß $f(z) = g(z)$ auf ganz G ist. □

Dieser Satz macht auch klar, welche reellen Funktionen ins Komplexe zu einer analytischen Funktion fortgesetzt werden können, nämlich genau die, die durch ihre (reelle) TAYLOR-Reihe dargestellt werden. Denn diese konvergiert dann sogar in einem ganzen Kreis der komplexen Ebene, stellt dort eine analytische Funktion dar,

die auf der reellen Achse mit der gegebenen übereinstimmt, und der Identitätssatz sagt, daß es gar nicht anders gehen kann.
Die Funktion

$$f : \mathbb{R} \ni x \mapsto \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & , x \neq 0 \\ 0 & , x = 0 \end{cases}$$

ist bekanntlich beliebig oft reell differenzierbar, wobei an der Stelle $x_0 = 0$ sämtliche Ableitungen verschwinden. Es wird also f **nicht** durch ihre TAYLOR-Reihe um 0 dargestellt und in der Tat ist f als Funktion auf $\mathbb{C}$ bei z_0 nicht einmal stetig geschweige denn analytisch. Aber die angegebene reelle Funktion f kann auch nicht auf irgend eine andere, von der durch die Formel gegebenen abweichende Weise so ins Komplexe fortgesetzt werden, daß sie in einer Umgebung von $z_0 = 0$ analytisch würde.

Residuenbestimmung und Integralauswertung

Ist $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch, so hatten wir eine Stelle $z_0 \notin G$ eine isolierte Singularität von f genannt, wenn die punktierte Kreisscheibe $\{z \,|\, 0 < |z - z_0| < \rho\}$ für hinreichend kleines ρ ganz in G liegt.
So ist etwa bei $f(z) := \ln z + \frac{1}{2-z}$ die Stelle $z_0 = 2$ eine isolierte Singularität, während etwa $z_0 = 0$ zu einem "Schlitz" im Definitionsbereich gehört und damit **nicht** isoliert ist.
An einer isolierten Singularität läßt sich eine analytische Funktion in eine LAURENT-Reihe entwickeln

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$$

und je nach Gestalt des Hauptteils $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$ werden die Singularitäten klassifiziert.

Definition FT.37 *Eine isolierte Singularität z_0 einer analytischen Funktion f mit* LAURENT*-Reihe $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ heißt*

- *"hebbar", wenn der Hauptteil verschwindet, d.h. die Reihe eine gewöhnliche Potenzreihe ist,*
- *"Pol k-ter Ordnung", wenn der Hauptteil abbricht, d.h. die Form*

$$\frac{a_{-k}}{(z - z_0)^k} + \frac{a_{-(k-1)}}{(z - z_0)^{k-1}} + ... + \frac{a_{-1}}{(z - z_0)} \quad \textit{mit } a_{-k} \neq 0 \;\; \textit{hat,}$$

- *"wesentlich", wenn der Hauptteil ∞-viele nichttriviale Summanden hat.*

Eine hebbare Singularität ist eigentlich nur solange singulär, bis wir gemerkt haben, daß sie in Wirklichkeit gar nicht singulär ist! f wird ja in $\{z \,|\, 0 < |z - z_0| < \rho\}$ durch die Potenzreihe $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n$ dargestellt, die ja in der vollen Kreisscheibe $\{z \,|\, |z - z_0| < \rho\}$ konvergiert und dort eine analytische Funktion darstellt. Wir setzen einfach $f(z_0) := a_0$ und die Singularität ist verschwunden.

Beispiel FT.38

$$f(z) = \frac{\sin z}{z} = \frac{1}{z}\big(z - \frac{1}{3!}z^3 + \frac{1}{5!}z^5 \mp ...\big) = 1 - \frac{1}{3!}z^2 + \frac{1}{5!}z^4 \mp .....$$

Somit ist $f(z) = \frac{\sin z}{z}$ eine überall analytische Funktion mit $f(0) = 1$.

Als Kriterium für die Hebbarkeit haben wir den

Hebbarkeitssatz von RIEMANN FT.39 *Eine isolierte Singularität z_0 von f ist genau dann hebbar, wenn f in einer Umgebung $\{z \,|\, 0 < |z - z_0| < \rho\}$ von z_0 beschränkt ist.*

Beweis: Nach dem LAURENT-Reihen-Entwicklungssatz FT.27 gilt für die Koeffizienten der LAURENT-Entwicklung die Darstellung

$$a_n = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z-z_0|=r} \frac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz,$$

wobei über einen beliebig kleinen Kreis um z_0 integriert werden kann. Für negative n, d.h. $n = -m$ mit $m > 0$ ist also

$$a_{-m} = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \cdot (re^{it})^{m-1} r \cdot i \cdot e^{it} dt = \frac{r^m}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z_0 + re^{it}) \cdot e^{imt} dt.$$

f ist nach Voraussetzung beschränkt, der Term e^{imt} vom Betrag 1. Damit ist der Integrand beschränkt und für $r \to 0$ ergibt sich $a_{-m} = 0$ für $m = 1, 2, \dots$.
Bei Beschränktheit von f haben wir also eine hebbare Singularität. Die Umkehrung ist trivial. □

An einem Pol k-ter Ordnung hat die LAURENT-Entwicklung definitionsgemäß die Gestalt

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} \cdot \left(1 + \frac{a_{-(k-1)}}{a_{-k}}(z-z_0) + \frac{a_{-(k-2)}}{a_{-k}}(z-z_0)^2 + \dots\dots\right),$$

wobei $a_{-k} \neq 0$ ist. Dies bewirkt

Fakt FT.40 *Ist z_0 ein Pol, so ist $\lim\limits_{z \to z_0} |f(z)| = \infty$ und f hat in einer Umgebung von z_0 keine Nullstelle.*

Ferner liest man ab:

Satz FT.41 *Es hat f an der Stelle z_0 genau dann einen Pol der Ordnung $\leq k$, wenn z_0 eine hebbare Singularität von $g(z) := (z - z_0)^k f(z)$ ist.*

Indem wir die obige Darstellung geringfügig verallgemeinern bekommen wir

Satz FT.42 *Sind f und g analytisch bei z_0 und hat f dort eine k-fache, g dort eine m-fache Nullstelle, so hat*

$$h(z) := \frac{f(z)}{g(z)}$$

bei z_0

- *eine hebbare Singularität, wenn $k \geq m$,*
- *eine $(k - m)$-fache Nullstelle, wenn $k > m$ und*
- *einen Pol der Ordnung $m - k$, wenn $k < m$ ist.*

Beweis: Es ist $f(z) = (z - z_0)^k \tilde{f}(z)$, $g(z) = (z - z_0)^m \tilde{g}(z)$, wobei $\tilde{f}, \tilde{g}$ analytisch bei z_0 und dort $\neq 0$ sind. Damit ist auch

$$\tilde{h}(z) := \frac{\tilde{f}(z)}{\tilde{g}(z)}$$

bei z_0 analytisch und $\neq 0$, hat somit eine Potenzreihendarstellung

$$\tilde{h}(z) = a_0 + a_1(z - z_0) + \dots.$$

mit $a_0 \neq 0$. Damit ist dann

$$h(z) = \frac{(z-z_0)^k}{(z-z_0)^m}\tilde{h}(z) = (z-z_0)^{k-m}\big(a_0 + a_1(z-z_0) + ...\big),$$

woraus man alles abliest. □

Beispiel FT.43 *Die Funktion $f(z) = \sin z$ hat einfache Nullstellen bei $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$, somit hat $h(z) := \frac{1}{\sin z}$ einfache Pole bei $k\pi$ $(k \in \mathbb{Z})$.*

An einer wesentlichen Singularität ist f weder beschränkt, noch wächst der Betrag von f dort definitiv gegen ∞. Wenn Sie sich ein Bild von dem schon etwas sonderbaren Verhalten einer analytischen Funktion in der Nähe einer wesentlichen Singularität machen wollen, so studieren Sie selbst die Funktion $f(z) := e^{\frac{1}{z}}$ bei $z_0 = 0$!

Beim sog. "Residuenkalkül" geht es darum, reelle Integrale mit dem Residuensatz zu bearbeiten, wobei dann die Residuen einer gegebenen analytischen Funktion an gewissen ihrer isolierten Singularitäten zu bestimmen sind. In den Anwendungen sind diese Singularitäten meist Pole, häufig sogar von erster Ordnung. Hierfür zeigen wir

Satz FT.44 *Hat $f(z)$ bei z_0 einen Pol der Ordnung $\leq k$, so ist $(z-z_0)^k f(z)$ (nach "Heben der Singularität") analytisch bei z_0 und*

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!}\frac{d^{k-1}}{(dz)^{k-1}}\Big((z-z_0)^k f(z)\Big)\Big|_{z=z_0},$$

d.h. das Residuum ist der Koeffizient von $(z-z_0)^{k-1}$ in der Potenzreihenentwicklung von $(z-z_0)^k f(z)$ um z_0.

Beweis: Nach Voraussetzung hat f die LAURENTentwicklung

$$f(z) = \frac{a_{-k}}{(z-z_0)^k} + ... + \frac{a_{-1}}{z-z_0} + a_0 + a_1(z-z_0) + ...,$$

somit ist

$$(z-z_0)^k f(z) = a_{-k} + ... + a_{-1}(z-z_0)^{k-1} + a_0(z-z_0)^k + ...,$$

woraus man alles abliest. □

Spezialfall FT.45 *Ist f schon gegeben als*

$$f(z) = \frac{1}{(z-z_0)^k}\cdot g(z),$$

wobei $g(z)$ analytisch bei z_0 ist, so ist

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \frac{1}{(k-1)!}\cdot g^{(k-1)}(z)\Big|_{z=z_0},$$

d.h. das Residuum von f ist einfach der $(k-1)$-te Koeffizient in der Potenzreihenentwicklung von g.

Der häufig vorkommende Fall von einfachen Polen sei noch besonders angeschaut: Ist $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$ mit bei z_0 analytischem g, so ist nach der zuletzt gezeigten Formel einfach

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = g(z_0).$$

Ist $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$, wobei g, h analytisch bei z_0 sind und $h(z)$ dort eine einfache Nullstelle hat, so ist ja nach Satz FT.44 für $k = 1$ das Residuum von f gerade

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = (z - z_0)\frac{g(z)}{h(z)}\bigg|_{z=z_0},$$

wobei der rechtsstehende Wert als Wert an einer hebbaren Singularität durch Grenzübergang bestimmt wird. Nun ist aber wegen $h(z_0) = 0$:

$$(z - z_0)\frac{g(z)}{h(z)} = g(z)\frac{1}{\frac{h(z)-h(z_0)}{z-z_0}} \to \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Also ist hier

$$\mathrm{Res}_{z_0} f = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}.$$

Wir halten fest:

Formeln für das Residuum bei einfachen Nullstellen FT.46 *Es seien g und h analytisch bei z_0, h habe dort eine einfache Nullstelle. Dann gelten:*

- *Für $f(z) = \frac{g(z)}{z-z_0}$ ist $\mathrm{Res}_{z_0} f = g(z_0)$,*
- *Für $f(z) = \frac{g(z)}{h(z)}$ ist $\mathrm{Res}_{z_0} f = \frac{g(z_0)}{h'(z_0)}$.*

Wir wenden uns nun der Berechnung reeller Integrale mit dem Residuensatz zu. Zunächst folgendes

Beispiel FT.47

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Mit reellen Methoden schließt man so:
Der Integrand hat als Stammfunktion den arcus tangens, somit ist das gesuchte Integral gleich dem Grenzwert von

$$\lim_{\substack{R_1\to+\infty \\ R_2\to-\infty}} \big(\arctan R_1 - \arctan R_2\big) = \frac{\pi}{2} - (-\frac{\pi}{2}) = \pi.$$

Nun berechnen wir dies mit Hilfe des Residuensatzes. Dazu sei γ_R der Weg, der auf der reellen Achse von $-R$ nach $+R$ verläuft und dann in einem Halbkreis um 0 mit Radius R durch die obere Halbebene zurück nach $-R$ geht. Der Integrand

$$f(z) = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$$

hat genau bei $z = \pm i$ Singularitäten und zwar einfache Pole. Davon wird – wenn R groß genug ist – genau die bei $+i$ von γ_R umlaufen und zwar einmal. Das Residuum von f bei i berechnet sich nach den Formeln für das Residuum bei einfachen Nullstellen FT.46 zu

$$\mathrm{Res}_i f = \frac{1}{2i}.$$

Folglich ist für $R > 1$ also

$$\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^2} = 2\pi i \cdot \frac{1}{2i} = \pi.$$

Dieser Wert ist also (für $R > 1$) unabhängig von R.
Nun lassen wir $R \to \infty$ gehen. Dabei erweist sich das Integral über den Halbkreis $\{z = Re^{i\varphi} \,|\, 0 \leq \varphi \leq \pi\}$ als harmlos: Denn schätzen wir nach der Formel (Fakt FT.12)

$$|\int_\gamma f(z)dz| \leq (\text{Schranke für } |f| \text{ auf } \gamma) \cdot (\text{ Länge von } \gamma)$$

ab, so ist ja die Länge des Halbkreises gerade πR und der Integrand ist für $|z| = R$ abschätzbar durch

$$|\frac{1}{1+z^2}| \leq \frac{1}{R^2-1}.$$

Somit gilt für das Integral

$$|\int_{\text{Halbkreis}} \frac{1}{1+z^2} dz| \leq \frac{\pi R}{R^2-1} \to 0 \quad (R \to \infty).$$

Also ergibt sich, daß das Integral $\int_{-R}^{+R} \frac{1}{1+z^2} dz$ längs der reellen Achse für $R \to \infty$ gegen π konvergiert.

Diese Idee funktioniert natürlich auch bei anderen Beispielen. Was dazu wirklich wesentlich ist, enthält der folgende

Satz FT.48 *Es sei $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}$ Quotient zweier Polynome, sodaß folgende Voraussetzungen gelten:*

1. *Das Nennerpolynom hat keine reelle Nullstelle,*
2. *Der Grad des Nenners ist um wenigstens 2 größer als der Grad des Zählers.*

Dann ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{\substack{k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{Res}_{z_k} f,$$

d.h. das Integral ist $2\pi i$ mal die Summe der Residuen von f an den in der oberen Halbebene gelegenen Singularitäten, die hier sämtlich Pole sind.

Der **Beweis** baut einfach nach, was wir hier bei dem Beispiel schon gemacht haben. Als Polynom hat $Q(z)$ nur endlich viele Nullstellen, somit $f(z)$ nur endlich viele Singularitäten und die liegen (nach Voraussetzung) nicht auf der reellen Achse. Mit hinreichend großem R können wir also den Residuensatz mit dem oben notierten Weg

$$\begin{aligned} \gamma_R := &\text{ reelle Achse von } -R \text{ nach } +R \text{ und} \\ &\text{ auf Halbkreis in der oberen Halbebene zurück nach } -R \end{aligned}$$

auf f anwenden und erhalten

$$\oint_{\gamma_R} f(z)dz = 2\pi i \cdot \sum_{\substack{k \\ \operatorname{Im} z_k > 0}} \operatorname{Res}_{z_k} f,$$

was dann (für $R \to \infty$) schließlich unabhängig von R ist.

Nach Voraussetzung ist der Nennergrad um wenigstens 2 größer als der Zählergrad, somit wird mit analoger Abschätzung wie oben das Integral über den Halbkreisbogen für wachsendes R beliebig klein, sodaß schließlich nur das Integral über die reelle Achse übrig bleibt. $\square$

Eine nützliche Variante bringt der folgende

Zusatz FT.49 *Ist $f(-x) = f(x)$, so ist dann*

$$\int_0^{+\infty} f(x)dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

und auf das rechte Integral kann man unter Umständen den obigen Satz anwenden.

Will man obige Methode auf andere Funktionen anwenden, so ist **Vorsicht angebracht!**

Beispiel FT.50 *Es sei $a > 0$. Was ist*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{4})^2 + a^2}\, dx\ ?$$

"Lösung": Der Cosinus ist betraglich ≤ 1, der Nenner wächst für $R \to \infty$ wie R^2, somit kann man abschätzen wie oben und erhält $2\pi i \cdot \mathrm{Res}_{z_0}(f)$, wobei $z_0 = \frac{\pi}{4} + i \cdot a$ die einzige Singularität in der oberen Halbebene ist.

Schade! Das ist leider falsch!

Die Abschätzung $|\cos z| \leq 1$ ist nur für reelle Argumente richtig und etwa für $z = iy$ ist ja $\cos iy = \frac{1}{2}\big(e^{-y} + e^{y}\big)$, was nicht daran denkt, beschränkt zu sein!

Also Vorsicht!

Für obiges Beispiel können wir etwa so vorgehen:
Es ist $\cos x = \mathrm{Re}\, e^{ix}$ und somit hiernach auch

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{4})^2 + a^2}\, dx \ = \mathrm{Re}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x-\frac{\pi}{4})^2 + a^2}\, dx\right).$$

Das Integral über unseren Standard-Halbkreisweg γ_R also

$$\int_{\gamma_R} \frac{e^{iz}}{(z-\frac{\pi}{4})^2 + a^2}\, dz$$

können wir nun nach dem Residuensatz bestimmen und wegen $e^{i(x+iy)} = e^{ix} \cdot e^{-y}$ hat also der Zähler e^{iz} tatsächlich in der ganzen oberen Halbebene den Betrag $|e^{iz}| = e^{-y} \leq 1$, sodaß dafür unsere Abschätzung funktioniert.
Das Residuum an der relevanten Stelle $z_0 = \frac{\pi}{4} + i \cdot a$ ist gerade

$$\frac{e^{i(\frac{\pi}{4}+i\cdot a)}}{2(\frac{\pi}{4} + i\cdot a - \frac{\pi}{4})} = \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-a}}{2i \cdot a},$$

sodaß

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{ix}}{(x-\frac{\pi}{4})^2 + a^2}\, dx = 2\pi i \cdot \frac{e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot e^{-a}}{2i \cdot a} = e^{i\frac{\pi}{4}} \cdot \frac{e^{-a}}{a} \cdot \pi$$

ist. Das eigentlich gesuchte Integral ist der Realteil davon und wegen

$$\mathrm{Re}(e^{i\frac{\pi}{4}}) = \cos\frac{\pi}{4} = \frac{1}{2}\sqrt{2}$$

folgt das Ergebnis

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos x}{(x-\frac{\pi}{4})^2+a^2}\,dx = \frac{1}{2}\sqrt{2}\cdot\frac{e^{-a}}{a}\cdot\pi.$$

□

Bei dieser Herleitung haben wir sehr grob für alle $y \geq 0$ einfach $e^{-y} \leq 1$ abgeschätzt, um zu zeigen, daß der Hilfsbogen letztlich für das Intergal harmlos ist. Hier ist noch "viel Luft" drin und indem man etwas mehr Arbeit investiert, bekommt man folgendes Resultat, bei dem der Nennergrad nur noch um 1 (statt um 2) größer sein muß als der Zählergrad:

Satz FT.51 *Es sei $f(z) = \frac{P(z)}{Q(z)}e^{iz}$, dabei seien P und Q zwei Polynome, wobei die folgenden Voraussetzungen gelten:*

1. *Das Nennerpolynom hat keine reellen Nullstellen,*
2. *Der Grad des Nennerpolynoms Q ist größer als der des Zählerpolynoms P.*

Dann ist

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}e^{ix}\,dx = 2\pi i \sum_{\substack{k\\ \mathrm{Im}\, z_k>0}} \mathrm{Res}_{z_k} f$$

Über Real- und Imaginärteil erhält man dann (bei reellen Polynomen P und Q) auch die Integrale

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\cos x\,dx \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{P(x)}{Q(x)}\sin x\,dx.$$

Bei diesen Beispielen hatten wir stets das vorgegebene reelle Integrationsintervall für den komplexen Integrationsweg mitbenutzt und geeignet ergänzt. Ein ganz anderer Trick ist es, ein reelles Integral gleich als Parametrisierung eines komplexen Kurvenintegrals über einen geschlossenen Weg zu lesen. Dies geht etwa so:

Beispiel FT.52 *Berechne*

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{5+4\cos x}\,.$$

Der Einheitskreis wird ja parametrisiert über $t \mapsto \gamma(t) := e^{it}$ $(0 \leq t \leq 2\pi)$, und dabei ist $\cos t = \frac{1}{2}\big(e^{it}+\frac{1}{e^{it}}\big)$, $\sin t = \frac{1}{2i}\big(e^{it}-\frac{1}{e^{it}}\big)$. Damit können wir unser Integral umschreiben als

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+4\cos t} &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{5+2\big(e^{it}+\frac{1}{e^{it}}\big)}\frac{i\,e^{it}}{i\,e^{it}}dt\\ &= \frac{1}{i}\int_0^{2\pi} \frac{\gamma'(t)}{2\gamma(t)^2+5\gamma(t)+2}dt\\ &= \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2+5z+2}.\end{aligned}$$

Jetzt erscheint unser Integral direkt als komplexes Integral über den Einheitskreis, sodaß wir direkt den Residuensatz anwenden können.
Die Nenner-Nullstellen sind $z_1 = -2$ und $z_2 = -\frac{1}{2}$, von denen genau $-\frac{1}{2}$ im Innern des Einheitskreises liegt. Das Residuum ist dort nach der zweiten der Formeln für das Residuum bei einfachen Nullstellen FT.46

$$\frac{1}{(2z^2+5z+2)'}\bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{4z+5}\bigg|_{z=-\frac{1}{2}} = \frac{1}{3}.$$

Damit ist

$$\int_0^{2\pi} \frac{dt}{5+4\cos t} = \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} \frac{dz}{2z^2+5z+2} = \frac{1}{i}\cdot 2\pi i \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3}\pi.$$

Das Ganze geht wieder allgemeiner:

Satz FT.53 *$R(u,v)$ bezeichne eine rationale Funktion in zwei Variablen. Dann ist*

$$\int_0^{2\pi} R(\cos t, \sin t)dt \;=\; \frac{1}{i}\oint_{|z|=1} R\big(\frac{1}{2}(z+\frac{1}{z}), \frac{1}{2i}(z-\frac{1}{z})\big)\frac{dz}{z}$$

und dies kann man mit dem Residuensatz bearbeiten.

Weitere Ideen, den Residuensatz für reelle Probleme einzusetzen, sind im nächsten Abschnitt zusammengestellt. Mehr findet man etwa bei JÄNICH, Analysis für Physiker und Ingenieure.

Weitere Anwendungen des Residuensatzes

Die Funktion

$$\varphi(z) := \pi \operatorname{ctan} \pi z = \pi \frac{\cos \pi z}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} - \frac{\pi^2}{3}z - \frac{\pi^4}{45}z^3 - \frac{2\pi^6}{945}z^5 - ...$$

ist in der ganzen komplexen Ebene analytisch, ausgenommen die Nullstellen von $\sin \pi z$, die genau bei $z = k \in \mathbb{Z}$ liegen. Somit hat φ genau an diesen Stellen $k \in \mathbb{Z}$ Singularitäten und zwar einfache Pole. Nach den Formeln für das Residuum bei einfachen Nullstellen FT.46 berechnet sich dort das Residuum zu

$$\operatorname{Res}_k \varphi = \pi \frac{\cos \pi z}{(\sin \pi z)'}\bigg|_{z=k} = \frac{\pi \cos \pi z}{\pi \cos \pi z}\bigg|_{z=k} = 1.$$

Wir haben also:
Die Funktion $\varphi(z) = \pi \operatorname{ctan} \pi z$ hat genau an den ganzzahligen Stellen $k \in \mathbb{Z}$ Singularitäten und zwar jeweils einfache Pole mit Residuum 1.
Ist jetzt f irgendeine Funktion, die in einer Umgebung von $k \in \mathbb{Z}$ holomorph ist, so hat die Funktion $f(z)\varphi(z)$ an der Stelle k einen einfachen Pol mit dem Residuum $\operatorname{Res}_k(f\varphi) = f(k)\cdot 1 = f(k)$ (bzw. eine hebbare Singularität, falls $f(k) = 0$).

Der Residuensatz stellt Integrale als Summen von Residuen dar. Wir versuchen nun dies umzudrehen, um etwa eine Reihe der Gestalt $\sum_{k\in\mathbb{Z}} f(k)$ zu berechnen.
Dazu

Satz FT.54 *Es seien p, q Polynome, teilerfremd (also ohne gemeinsame Nullstelle), $\deg q \geq 2 + \deg p$ und $\varphi(z) := \pi \operatorname{ctan} \pi z$.*
Dann ist

$$\sum_{\substack{n=-\infty \\ q(n)\neq 0}}^{+\infty} \frac{p(n)}{q(n)} = -\sum_{\substack{z \\ q(z)=0}} \operatorname{Res}_z \big(\frac{p}{q}\varphi\big).$$

Dabei wird rechts über alle (das sind nur endlich viele) Nullstellen des Nennerpolynoms summiert.

Beispiel FT.55 *Mit dieser Methode erhalten wir etwa*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \frac{\pi^4}{90}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \frac{\pi^6}{945}.$$

Um diese Formeln aus dem obigen Satz FT.54 zu bekommen, setze man für $k = 1, 2, 3, \ldots$ jeweils $p(z) := 1,\ q_k(z) := z^{2k}$. Dann ist also

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{2k}} = \frac{1}{2} \sum_{\substack{n\in\mathbb{Z}\\ q_k(n)\neq 0}} \frac{p(n)}{q_k(n)} \overset{Satz}{=} -\frac{1}{2}\operatorname{Res}_{z=0}\left(\frac{1}{z^{2k}}\pi \operatorname{ctan} \pi z\right)$$

Das rechts stehende Residuum ist definitionsgemäß der Koeffizient von z^{2k-1} in der Reihe von $\pi \operatorname{ctan} \pi z$, deren Koeffizienten man aus formaler Division der cos - und sin - Reihen gewinnen kann.

Beweis von Satz FT.54.
Zu einer Zahl $N \in \mathbb{N}$ sei der Weg γ_N der positiv durchlaufene Rand des achsenparallelen Quadrates mit dem Ursprung als Mittelpunkt und mit Seitenlänge $2(N + \frac{1}{2})$. Wir wählen N so groß, daß alle Nullstellen des Nennerpolynoms q im Innern des Quadrates liegen. Dann ist nach dem Residuensatz

$$\oint_{\gamma_N} \frac{p(z)}{q(z)}\varphi(z)dz = 2\pi i \sum_{\substack{z_k\\ \nu_{\gamma_N}(z_k)\neq 0}} \operatorname{Res}_{z_k}\left(\frac{p}{q}\varphi\right)$$

(hier wird über alle von γ_N umlaufenen Singularitäten summiert)

$$= 2\pi i \left(\sum_{\substack{-N\\ q(n)\neq 0}}^{+N} \frac{p(n)}{q(n)} + \sum_{\substack{z\\ q(z)=0}} \operatorname{Res}_z \left(\frac{p}{q}\varphi\right). \right)$$

Wenn wir nun zeigen, daß für $N \to \infty$ das Integral verschwindet, so ist unser Satz offenbar bewiesen.
Hierzu zeigen wir zunächst:
Die Funktion $\varphi(z) = \pi \operatorname{ctan} \pi z$ *bleibt auf* γ_N *für* $N \to \infty$ *beschränkt:*
Es ist

$$|\varphi(z)| = \pi \left|\frac{e^{i\pi z} + e^{-i\pi z}}{e^{i\pi z} - e^{-i\pi z}}\right| = \pi \left|\frac{e^{-\pi y}e^{i\pi x} + e^{\pi y}e^{-i\pi x}}{e^{-\pi y}e^{i\pi x} - e^{\pi y}e^{-i\pi x}}\right|$$
$$= \pi \left|\frac{e^{2\pi i x} + e^{2\pi y}}{e^{2\pi i x} - e^{2\pi y}}\right| = \pi \left|\frac{e^{-2\pi y} + e^{-2\pi i x}}{e^{-2\pi y} - e^{-2\pi i x}}\right|.$$

Auf den senkrechten Stücken von γ_N ist $x = \pm(N + \frac{1}{2})$, somit $e^{2\pi i x} = e^{2\pi i(\pm\frac{1}{2})} = e^{\pi i} = -1$, also dort

$$|\varphi(z)| = \pi \left|\frac{-1 + e^{2\pi y}}{+1 + e^{2\pi y}}\right| \leq \pi.$$

Auf den waagerechten Stücken ist $y = \pm(N + \frac{1}{2})$, somit

$$|\varphi(z)| = \pi \left|\frac{e^{2\pi i x} + e^{2\pi(N+\frac{1}{2})}}{e^{2\pi i x} - e^{2\pi(N+\frac{1}{2})}}\right| \quad \text{für } y = +(N + \frac{1}{2})$$

bzw.

$$|\varphi(z)| = \pi \left|\frac{e^{2\pi(N+\frac{1}{2})} + e^{-2\pi i x}}{e^{2\pi(N+\frac{1}{2})} - e^{-2\pi i x}}\right| \quad \text{für } y = -(N + \frac{1}{2}).$$

Wegen $|e^{2\pi i x}| = 1$ gehen beide Quotienten für $N \to \infty$ gegen 1 und zwar gleichmäßig in x. Somit ist für hinreichend große N jedenfalls

$$|\varphi(z)| \leq 2\pi \text{ auf } \gamma_N.$$

Da $\deg q \geq 2 + \deg p$ ist für große N mit einer Konstante C auf γ_N stets

$$\left|\frac{p(z)}{q(z)}\right| \leq \frac{C}{N^2},$$

ferner hat der Weg γ_N die Länge $4(2N+1)$. Somit ist für große N

$$\left|\oint_{\gamma_N} \frac{p(z)}{q(z)}\varphi(z)dz\right| \leq 4(2N+1)\frac{C}{N^2}2\pi \quad \to 0 \quad (N \to \infty),$$

womit der Satz gezeigt ist. □

Betrachten wir noch einige uneigentliche Integrale.

Beispiel FT.56 *Bestimme* $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3}$.

Dazu betrachten wir das Integral

$$\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^3},$$

wobei der geschlossene Weg γ_R der Rand eines Drittel - "Tortenstücks" vom Radius $R > 1$ ist, der sich zusammensetzt aus

$$\begin{aligned} \gamma_{1,R}: &\quad \text{Geradenstück von } 0 \text{ nach } R\cdot 1, \\ \gamma'_R: &\quad \text{Segment der Kreislinie } R\cdot e^{it} \text{ mit } 0 \leq t \leq \frac{2}{3}\pi, \\ \gamma_{2,R}: &\quad \text{Geradenstück von } R\cdot e^{\frac{2\pi i}{3}} \text{ nach } 0. \end{aligned}$$

Es ist

$$(1+z^3) = (z+1)(z-e^{i\frac{\pi}{3}})(z-e^{-i\frac{\pi}{3}}).$$

Von diesen Nulstellen wird genau die Stelle $e^{i\frac{\pi}{3}}$ von γ_R (einmal, positiv) umlaufen. Damit ist

$$\oint_{\gamma_R} \frac{dz}{1+z^3} = 2\pi i \operatorname{Res}_{(z=e^{i\frac{\pi}{3}})}\left(\frac{1}{1+z^3}\right) = 2\pi i \frac{1}{(e^{i\frac{\pi}{3}}+1)(e^{i\frac{\pi}{3}}-e^{-i\frac{\pi}{3}})}$$

(Das können Sie selbst noch weiter ausrechnen!)
Betrachten wir nun die Integrale über die Teilwege:
Auf dem Bogen γ'_R mit Länge $\frac{2}{3}\pi R$ ist $|z| = R$, somit der Integrand $< \frac{1}{R^3-1}$, sodaß dieses Integral für $R \to \infty$ verschwindet.

Ferner ist

$$\int_{\gamma_{2,R}} \frac{dz}{1+z^3} = \int_R^0 \frac{e^{\frac{2\pi i}{3}}}{1+(te^{\frac{2\pi i}{3}})^3}dt = -e^{\frac{2\pi i}{3}}\int_0^R \frac{dt}{1+t^3} = -e^{\frac{2\pi i}{3}}\int_{\gamma_{1,R}} \frac{dz}{1+z^3}.$$

Das Integral über den Weg $\gamma_{2,R}$ verschwindet also nicht, ist aber einfach ein Vielfaches des Integrals über den Weg $\gamma_{1,R}$. Wir haben also

$$\left(1-e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)\int_0^R \frac{dx}{1+x^3} + \int_{\gamma'_R} \frac{dz}{1+z^3} = 2\pi i \operatorname{Res}_{(z=e^{i\frac{\pi}{3}})}\left(\frac{1}{1+z^3}\right)$$

und da das zweite Integral für $R \to \infty$ gegen Null geht, folgt

$$\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^3} = \frac{2\pi i}{1-e^{\frac{2\pi i}{3}}} \operatorname{Res}_{(z=e^{i\frac{\pi}{3}})}\left(\frac{1}{1+z^3}\right) = \text{.... siehe oben!.}$$

Analog lassen sich alle Integrale vom Typ

$$\int_0^\infty \frac{p(x^k)}{q(x^k)} dx$$

behandeln, wobei p, q Polynome, dabei $q(x) \neq 0$ für $x \geq 0, \deg q > \deg p$ und $k \in \mathbb{N}, \geq 2$.

Als letztes Beispiel behandeln wir

Satz FT.57 (Berechnung von FOURIER-INTEGRALEN) *Es sei f auf ganz C analytisch bis auf endlich viele isolierte Singularitäten z_k, die nicht auf der reellen Achse liegen. Ferner gelte mit einer Konstanten C die Abschätzung $|f(z)| \leq \frac{C}{|z|^2}$ für $z \to \infty$. Dann ist für $x \in \mathbb{R}$*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{ixt} dt = \begin{cases} +2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z_k > 0} \mathrm{Res}_{z_k}(f(z)e^{ixz}) & x > 0 \\ -2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z_k < 0} \mathrm{Res}_{z_k}(f(z)e^{ixz}) & x < 0. \end{cases}$$

Beweis Zunächst sei $x > 0$.
Es sei γ_R der positiv durchlaufene Halbkreis um Null mit Radius R in der oberen Halbebene, parametrisiert als $Re^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq \pi$. Es ist dann für große R

$$\int_{-R}^{+R} f(t) e^{ixt} dt + \int_{\gamma_R} f(z) e^{ixz} dz = 2\pi i \sum_{\mathrm{Im}\, z_k > 0} \mathrm{Res}_{z_k} \left(f(z) e^{ixz} \right).$$

Wir haben somit zu zeigen, daß für $R \to \infty$ das Integral über γ_R gegen Null geht.
Der Integrationsweg γ_R, also unser Halbkreis, hat die Länge πR.
Für z auf γ_R, d.h für $z = Re^{i\varphi}$ mit $0 \leq \varphi \leq \pi$ ist wegen $x > 0$

$$\left| e^{ixz} \right| = \left| e^{ixRe^{i\varphi}} \right| = \left| e^{ix(R\cos\varphi + iR\sin\varphi)} \right| = e^{-Rx\sin\varphi} \leq 1.$$

Damit ist mit der vorausgesetzten Abschätzung für f

$$\left| \int_{\gamma_R} f(z) e^{ixz} dz \right| \leq \pi R \frac{C}{R^2} = \frac{\pi C}{R},$$

geht also für $R \to \infty$ gegen Null, was wir ja zeigen sollten.
Für $x < 0$ schließt man völlig analog mit einem Bogen in der unteren Halbebene.