I Integration

Das RIEMANN-Integral

Wir betrachten zunächst nur Funktionen, die auf einem beschränkten und abgeschlossenen Intervall $[a, b] \in \mathbb{R}$ definiert sind und Werte in $\mathbb{R}$ haben.

Definition I.1 (Treppenfunktion) *Eine Funktion $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ heißt Treppenfunktion, wenn es eine Zerlegung $Z : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ des Intervalls gibt und dazu Zahlen $c_k \in \mathbb{R}$, sodaß für jedes solche offene Intervall (x_{k-1}, x_k) gilt $\varphi(x) = c_k$ für $x \in (x_{k-1}, x_k)$. (Der Funktionswert an den Teilpunkten x_k selbst spielt keine Rolle!) Wir sagen dann auch, daß die Zerlegung zur Treppenfunktion φ "paßt".*
Die Gesamtheit aller solcher Treppenfunktionen sei mit $T[a, b]$ bezeichnet.

Satz I.2 *Die Menge $T[a, b]$ ist ein Unterraum aller Funktionen $[a, b] \to \mathbb{R}$.*

Beweis: Trivialerweise ist die Nullfunktion eine Treppenfunktion, ferner mit φ auch $\lambda\varphi$ für $\lambda \in \mathbb{R}$. Um zu sehen, daß mit φ und ψ auch $\varphi + \psi$ eine Treppenfunktion ist, muß man zu einer gemeinsamen Verfeinerung der beiden zu φ bzw. ψ gehörenden Zerlegungen übergehen. Auf den so neu entstehenden Intervallen ist dann $\varphi + \psi$ konstant. $\square$

Definition I.3 (Integral über eine Treppenfunktion) *Zu einer Treppenfunktion $\varphi \in T[a, b]$ sei $Z : a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$ eine passende Zerlegung und $\varphi(x) = c_k$ auf $x \in (x_{k-1}, x_k)$. Dann heißt*

$$\int_a^b \varphi(x)dx := \sum_{k=1}^{n} c_k(x_k - x_{k-1})$$

das Integral von φ über $[a, b]$.

Man rechnet leicht nach, daß sich der Wert des Integrals nicht ändert, wenn man beispielsweise durch Verfeinerung zu einer anderen zu φ passenden Zerlegung übergeht.

Bezeichnung I.4 *Wir notieren $\varphi \leq \psi$, wenn für alle $x \in [a, b]$ stets $\varphi(x) \leq \psi(x)$ ist.*

Damit gelten für das Integral von Treppenfunktionen offenbar die folgenden Aussagen.

Satz I.5 *Für Treppenfunktionen $\varphi, \psi \in T[a, b]$ und Zahlen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ist*

1. $\int_a^b (\alpha\varphi(x) + \beta\psi(x))dx = \alpha \int_a^b \varphi(x)dx + \beta \int_a^b \psi(x)dx.$
2. $\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx$, *sofern* $\varphi \leq \psi$.

Das Integral ist also ein Homomorphismus aus dem Raum der Treppenfunktionen nach $\mathbb{R}$, d.h. ein sogenanntes "Funktional", das überdies wegen 2. noch monoton ist.

Ist nun $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine beliebige aber beschränkte Funktion, so gibt es eine Konstante C, für die dann für alle x stets $-C \leq f(x) \leq +C$ ist. Die beiden auf ganz $[a, b]$ konstanten Funktionen mit den Werten $-C$ bzw. $+C$ sind offenbar auch Treppenfunktionen $\varphi_{-C}, \varphi_{+C}$, für die dann $\varphi_{-C} \leq f \leq \varphi_{+C}$ gilt. Damit ist die folgende Definition sinnvoll:

Definition I.6 (Ober- und Unterintegral)
Zu einer beschränkten Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei

$$\int_a^{*\,b} f(x)dx := \inf\left\{\int_a^b \psi(x)dx \mid \psi \in T[a,b], \psi \geq f\right\},$$
$$\int_{*\,a}^{b} f(x)dx := \sup\left\{\int_a^b \varphi(x)dx \mid \varphi \in T[a,b], \varphi \leq f\right\}.$$

Man nennt dies das "Ober- bzw. Unterintegral" von f auf $[a,b]$, die an seiner Bildung beteiligten Treppenfunktionen "Ober- bzw. Unterfunktionen".

Ist φ eine Unter-, ψ eine Oberfunktion zu f, so ist dann $\varphi \leq f \leq \psi$, also insbesondere $\varphi \leq \psi$ und damit nach dem vorigen Satz auch

$$\int_a^b \varphi(x)dx \leq \int_a^b \psi(x)dx.$$

Dies hat zur Folge, daß für jedes beschränkte f dann auch

$$\int_{*\,a}^{b} f(x)dx \leq \int_a^{*\,b} f(x)dx$$

ist.
Der Fall, daß Ober- und Unterintegral übereinstimmen ist nun besonders interessant.

Definition I.7 (RIEMANN-Integral) *Eine beschränkte Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ heißt "RIEMANN-integrierbar" über $[a,b]$, wenn Ober- und Unterintegral übereinstimmen, d.h.*

$$\int_{*\,a}^{b} f(x)dx = \int_a^{*\,b} f(x)dx =: \int_a^b f(x)dx.$$

Der gemeinsame Wert heißt das "RIEMANN-Integral" von f.
Statt RIEMANN-integrierbar sagen wir auch kurz "R-integrierbar" etc.

Beispiele I.8

1. *Jede Treppenfunktion ist RIEMANN-integrierbar und ihr RIEMANN-Integral stimmt mit dem für Treppenfunktionen eingeführten Integral überein.*
2. *Die Funktion*
$$f(x) := \begin{cases} 1 & x \in [0,1],\ x \text{ rational}, \\ 0 & x \in [0,1],\ x \text{ nicht rational} \end{cases}$$
ist nicht integrierbar, da jede Unterfunktion ≤ 0 und jede Oberfunktion ≥ 1 ist, und damit das Unterintegral den Wert 0, das Oberintegral den Wert 1 hat.

Nach der Definition von Ober- und Unterintegral als Infimum bzw. Supremum gibt es also Oberfunktionen, deren Integral beliebig nahe bei dem Oberintegral liegen und analoges für das Unterintegral. Dies liefert uns das folgende Kriterium für RIEMANN-Integrabilität:

Satz I.9 *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist genau dann R-integrierbar, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ Treppenfunktionen φ, ψ gibt mit*

$$\varphi \leq f \leq \psi \quad \text{und} \quad (0 \leq) \int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx < \epsilon.$$

Damit können wir die Menge der Beispiele für R-integrierbare Funktionen erheblich erweitern. Zunächst zeigen wir

Satz I.10 *Monotone Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sind R-integrierbar.*

Beweis: Sei f monoton wachsend, für fallende Funktionen schließt man analog. Wir unterteilen das Intervall $[a,b]$ äquidistant durch Punkte

$$x_k := a + k\frac{b-a}{n} \quad (k = 0, 1, ..., n).$$

Dann ist für $x \in [x_{k-1}, x_k]$ stets

$$\begin{aligned} f(x_{k-1}) \leq f(x) \leq f(x_k) &\text{ und durch} \\ \varphi(x) := f(x_{k-1}), &\quad x \in (x_{k-1}, x_k) \\ \psi(x) := f(x_k), &\quad x \in (x_{k-1}, x_k) \end{aligned}$$

sind eine Unter- und eine Oberfunktion definiert. Dafür ist

$$\begin{aligned} \int_a^b \psi(x)dx - \int_a^b \varphi(x)dx &= \sum_{k=1}^n f(x_k)(x_k - x_{k-1}) - \sum_{k=1}^n f(x_{k-1})(x_k - x_{k-1}) \\ &= \frac{b-a}{n}(f(x_n) - f(x_0)) \\ &= \frac{b-a}{n}(f(b) - f(a)) \to 0 \ (n \to \infty). \end{aligned}$$

□

Es folgen einige Sätze über die Integrierbarkeit von Funktionen bestimmter Klassen. Die Beweise stützen sich wie der eben geführte Beweis sämtlich auf den obigen Satz I.9 und seien deshalb übergangen.
Als ersten notieren wir

Satz I.11 *Jede stetige Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar.*

Weiter liefert der Satz I.9 auch das Hilfsmittel, um die Gültigkeit von Satz I.5 von Treppenfunktionen auf beliebige integrierbare Funktionen auszudehnen.

Satz I.12 *Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so ist*

1. $\int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx$,
2. *ist $f \leq g$, so ist* $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$.

Für den nächsten Satz brauchen wir folgende

Bezeichnung I.13 *Zu einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ bezeichne*

$$f_+(x) = \max\{+f(x),\, 0\} = \begin{cases} f(x) & \textit{falls } f(x) > 0, \\ 0 & \textit{sonst,} \end{cases}$$

$$f_-(x) = \max\{-f(x),\, 0\} = \begin{cases} -f(x) & \textit{falls } f(x) < 0, \\ 0 & \textit{sonst.} \end{cases}$$

Dafür ist dann

$$f = f_+ - f_- \text{ und } |f| = f_+ + f_- \,.$$

Hierfür gilt nun

Satz I.14 *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so auch f_+, f_- und $|f|$.*

Ferner bekommen wir

Satz I.15 *Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar und ist $p \in \mathbb{R}, \geq 1$, so sind auch die Funktionen $|f|^p$ und $f \cdot g$ integrierbar.*

Denselben Satz I.9 können wir auch nutzen, um Integrale über aneinanderstoßende Intervalle zu kombinieren.

Satz I.16 *Es seien $f_1 : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $f_2 : [b,c] \to \mathbb{R}$ integrierbar und*

$$f : [a,c] \to \mathbb{R} : \quad f(x) := \begin{cases} f_1(x) & a \leq x \leq b \\ f_2(x) & b < x \leq c. \end{cases}$$

Dann ist auch f integrierbar und

$$\int_a^c f(x)dx = \int_a^b f_1(x)dx + \int_b^c f_2(x)dx.$$

Beweis: Sind φ_1, φ_2 Unter-Treppenfunktionen zu f_1 bzw. $f_{2,}$ so ist

$$\varphi : \quad \varphi(x) := \begin{cases} \varphi_1(x) & a \leq x \leq b \\ \varphi_2(x) & b < x \leq c. \end{cases}$$

eine Unter-Treppenfunktion für f und nach Definition des Integrals für Treppenfunktionen hierfür

$$\int_a^c \varphi(x)dx = \int_a^b \varphi_1(x)dx + \int_b^c \varphi_2(x)dx.$$

Dies geht genauso für Ober-Treppenfunktionen und über Satz I.9 folgt die Behauptung. □

Dies kann man natürlich auch auf die Integrale zu endlich vielen zusammenpassenden Intervallen verallgemeinern. Zusammen mit Satz I.10 und Satz I.11 liefert dies den

Satz I.17 *Jede stückweise stetige oder stückweise monotone Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ist integrierbar, ihr Integral die Summe der Integrale über die entsprechenden Teilintervalle.*

Bei der Definition des Integrals $\int_a^b$ hatten wir $a < b$ vorausgesetzt, ebenso bei der Formel von Satz I.16, daß $a < b < c$. Es erweist sich nun als zweckmäßig sich davon zu lösen durch die folgende

Definition I.18 *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar, so sei*

$$\int_b^a f(x)dx \ := \ -\int_a^b f(x)dx.$$

Man rechnet ganz einfach nach, daß dann auch die Formel von Satz I.16 ohne Voraussetzung über die Anordnung der Integrationsgrenzen a, b, c gilt, sofern das Integral über das maximale vorkommende Intervall existiert, und daß ferner stets

$$\int_a^a f(x)dx \ = \ 0$$

ist.
Zu "schönen" Funktionen berechnet man Integrale über Stammfunktionen, was wir im nächsten Abschnitt behandeln. Für theoretische wie praktische Zwecke braucht man aber häufig auch Abschätzungen, von denen der nächste Satz einige wichtige enthält.

Satz I.19 *Es seien $a < b, f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gelten*

1.
$$\int_a^b 1\, dx = b - a.$$

2.
$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq \int_a^b |f(x)|dx.$$

3. *Mit*
$$M := \sup \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$
$$m := \inf \{f(x) \mid x \in [a, b]\}$$
ist
$$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)dx \leq M(b-a).$$

4. ***(Mittelwertsatz der Integralrechnung)***
Sind f, g stetig, $g \geq 0$, so existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit
$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(\xi) \int_a^b g(x)dx.$$
Hier kann man insbesondere auch die Funktion $g(x) = 1$ wählen und erhält für stetige f dann mit einem $\xi \in (a, b)$
$$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a).$$

Beweis: 1. Folgt direkt aus der Definition, 2. und 3. damit über Satz I.12.
Zu 4.: Da beide Funktionen stetig sind, sind f, g und fg integrierbar, ferner ist nach Voraussetzung für alle x

$$mg(x) \leq f(x)g(x) \leq Mg(x),$$

sodaß nach Satz I.12 auch

$$m \int_a^b g(x)dx \leq \int_a^b f(x)g(x)dx \leq M \int_a^b g(x)dx$$

ist, wobei noch $\int_a^b g(x)dx \geq 0$ und somit ein $\mu : m \leq \mu \leq M$ existiert, sodaß

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = \mu \int_a^b g(x)dx.$$

Ein solches μ läßt sich dann nach dem Zwischenwertsatz als

$$\mu = f(\xi)$$

darstellen. $\square$

Wir hatten das Integral über Unter- und Oberfunktionen erklärt. Sind also $\varphi, \psi \in T(a,b)$ mit $\varphi \le f \le \psi$, so können wir annehmen, daß sie über dieselbe Zerlegung von (a,b) in Teilintervalle (x_{k-1}, x_k) definiert sind. Es ist dann für jedes dieser Teilintervalle

$$\begin{aligned}\varphi(x) \le m_k &:= \inf\{f(x) \mid x \in (x_{k-1}, x_k)\}\\ \psi(x) \ge M_k &:= \sup\{f(x) \mid x \in (x_{k-1}, x_k)\}.\end{aligned}$$

Wählen wir nun jeweils einen Wert $\mu_k : m_k \le \mu_k \le M_k$, so gilt für die dazu gebildete Treppenfunktion χ :

$$\chi(x) := \mu_k \text{ für } x \in (x_{k-1}, x_k)$$

sicher $\varphi \le \chi \le \psi$ und damit auch

$$\int_a^b \varphi(x)dx \le \int_a^b \chi(x)dx \le \int_a^b \psi(x)dx.$$

Nun können wir φ und ψ so wählen, daß sie $\int_a^b f(x)dx$ beliebig gut approximieren, folglich muß dann auch $\int_a^b \chi(x)dx$ nahe bei $\int_a^b f(x)dx$ liegen. Und speziell gilt dies auch, wenn wir setzen

$$\mu_k := f(\xi_k) \text{ mit einem } \xi_k \in (x_{k-1}, x_k).$$

Es ist dann

$$\int_a^b \chi(x)dx = \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}).$$

Die rechts stehende Summe heißt "RIEMANNsche Summe" für die Funktion f. Obige Überlegungen zeigen, daß man mit RIEMANNschen Summen das Integral beliebig gut approximieren kann. Tatsächlich gilt etwas mehr, nämlich

Satz I.20 *Sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ integrierbar. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodaß für jede Zerlegung $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, bei der für alle k stets $x_k - x_{k-1} < \delta$ ist, und jede Wahl von Stellen $\xi_k \in [x_{k-1}, x_k]$ gilt*

$$\left| \int_a^b f(x)dx - \sum_{k=1}^n f(\xi_k)(x_k - x_{k-1}) \right| < \epsilon.$$

Wir übergehen den Beweis.

Alle diese Überlegungen kann man ohne Probleme auf Funktionen $f : [a,b] \to \mathbb{C}$, also mit komplexen Werten ausdehnen und von da auch noch zu Funktionen mit Werten im $\mathbb{R}^n$ oder $\mathbb{C}^n$ übergehen, die wir etwa bei Differentialgleichungen brauchen werden:

Definition I.21

1. *Es seien $u, v : [a,b] \to \mathbb{R}$ und $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ erklärt durch $f(x) := u(x) + i \cdot v(x)$. Wir sagen "$f$ ist R-integrierbar" auf $[a,b]$, wenn u und v auf $[a,b]$ integrierbar sind und setzen dann*

$$\int_a^b f(x)dx := \int_a^b \big(u(x) + i \cdot v(x)\big)dx := \int_a^b u(x)dx + i \cdot \int_a^b v(x)dx.$$

2. *Eine Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{C}^n$ nennen wir integrierbar auf $[a,b]$, wenn ihre sämtlichen n Komponentenfunktionen auf $[a,b]$ integrierbar sind. $\int_a^b f(x)dx$ ist dann der Vektor aus den n Integralen der Komponentenfunktionen.*

Man überlegt sich leicht, daß auch dieses Integral wieder ein lineares Funktional bzw. eine lineare Abbildung ist, und sich überdies auch wieder bezüglich der Integrations-Intervalle additiv verhält.

Integration und Differentiation

Definition I.22 (Stammfunktion) *Eine auf $[a,b]$ differenzierbare Funktion F heißt Stammfunktion zu f auf $[a,b]$, wenn $F' = f$, d.h. f die Ableitung von F ist.*

Stammfunktionen sind bis auf eine additive Konstante bestimmt, d.h. es gilt

Satz I.23 *Ist F Stammfunktion zu f auf $[a,b]$, so sind genau alle Funktionen der Art $G(x) = F(x) + c$ mit $c \in \mathbb{R}$ Stammfunktionen zu f.*

Beweis: Sind F und G Stammfunktionen, so ist $(F(x) - G(x))' = 0$ auf $[a,b]$ und damit nach Satz F.66 $F(x) - G(x)$ konstant auf $[a,b]$. □

Eine der zentralen Aussagen der reellen Analysis ist nun die Tatsache, daß jede stetige Funktion eine Stammfunktion besitzt und über sie Integral- und Differentialrechnung zusammenhängen

Satz I.24 *Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, so ist für $x \in [a,b]$ das Integral*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt$$

erklärt und die damit gegebene Funktion F eine Stammfunktion zu f auf $[a,b]$.

Beweis: Für $x, x_0 \in [a,b], x \neq x_0$ ist

$$\begin{aligned} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} &= \frac{1}{x - x_0}\left(\int_a^x f(t)dt - \int_a^{x_0} f(t)dt\right) \\ &= \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt = \frac{1}{x - x_0} f(\xi)(x - x_0) = f(\xi) \end{aligned}$$

mit einem ξ zwischen x und x_0. (Mittelwertsatz der Integralrechnung (Satz I.19,4).) Da f stetig ist, geht $f(\xi) \to f(x_0)$ für $x \to x_0$, was die Behauptung liefert. □

Dies führt zu dem

Satz I.25 (Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung)
Ist $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und F Stammfunktion zu f, so ist

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$

Man schreibt dafür auch

$$\int_a^b f(x)dx = F(x)\Big|_a^b := F(b) - F(a).$$

Beweis:

$$F_0(x) := \int_a^x f(t)dt$$

ist eine Stammfunktion mit $F_0(a) = 0$. $G(x) := F(x) - F(a)$ ist ebenfalls Stammfunktion mit $G(a) = 0$ und stimmt folglich nach Satz I.23 mit F_0 überein. Damit ist

$$G(b) = F(b) - F(a) = F_0(b) = \int_a^b f(x)dx.$$

□

Bezeichnung I.26 *Sind Definitionsbereich etc. aus dem Zusammenhang klar, so schreibt man kurz*

$$F(x) = \int f(x)dx$$

für die Stammfunktion.
Dies kann allerdings zu Fehlern führen, wenn man sich nicht sauber klar macht, was damit gemeint ist.

Aufgrund des Hauptsatzes entspricht also jeder Regel zur Differentiation eine zur Integration. Wir werden hier nur auf die wichtigsten Beispiele kurz eingehen. Ausführliche Rezeptsammlungen finden sich etwa in FISCHER-KAUL, Math. f. Phys. oder im dem Klassiker von MANGOLDT-KNOPP.
Es sei nur gleich darauf hingewiesen, daß es nicht möglich ist, zu jeder durch die elementaren Funktionen darstellbaren Funktion auch eine ebenso darstellbare Stammfunktion zu finden. Etwa $\frac{\sin x}{x}$ oder e^{-x^2} sind solche Funktionen.

Regel I.27 *Für $n \in \mathbb{R}$ ist*

$$\int x^n dx \; = \; \begin{cases} \frac{1}{n+1} x^{n+1} & \text{für } n \neq -1 \\ \ln |x| & \text{für } n = -1. \end{cases}$$

Dabei ist zu beachten, daß abgesehen von $n \in \mathbb{N}$ nicht über $x = 0$ hinweg integriert werden darf, für nichtganzzahlige Exponenten hat man sich auf $x > 0$ zu beschränken.

Beweis: Siehe Beispiel F.72. Beim Logarithmus beachte man, daß für $x < 0$ die Formel $\frac{d}{dx} \ln(-x) = -\frac{1}{-x} = \frac{1}{x}$ gilt. □

Dies liefert uns auch sofort die Stammfunktionen zu Potenzreihen:

Satz I.28 *Die Potenzreihe*

$$f(x) = \sum_{j=0}^{\infty} a_j (x - x_0)^j$$

habe den Konvergenzkreis $K(x_0, r)$. Dann hat die Reihe

$$F(x) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1}{j+1} a_j (x - x_0)^{j+1}$$

aus den Stammfunktionen denselben Konvergenzkreis und stellt dort eine Stammfunktion zu f dar.

Warnung I.29 *Daß man Summation und Übergang zur Stammfunktion vertauschen darf, ist nicht allgemein gültig, sondern braucht Bedingungen, wie sie etwa bei Potenzreihen erfüllt sind. Wir werden dies noch genauer anschauen.*

Beweis: (von Satz I.28) Nach dem Majorantenkriterium konvergiert die Reihe für F mindestens im Kreis $K(x_0, r)$. Nach Satz F.63 ist diese Reihe differenzierbar, ihre Ableitung f, ferner der Konvergenzradius der abgeleiteten Reihe nicht kleiner als der der ursprünglichen. Damit haben beide Reihen denselben Konvergenzkreis und die zweite Reihe ist die Stammfunktion der ersten. □

Ferner liefern Beispiel F.55 und Beispiel F.56 die folgende

Regel I.30 *Es ist*

$$\begin{array}{rcr}\int e^x dx & = & e^x, \\ \int \cos x\, dx & = & \sin x\,, \\ \int \sin x\, dx & = & -\cos x.\end{array}$$

In Beispiel F.80 hatten wir

$$(\tan x)' = 1 + (\tan x)^2 = \frac{1}{\cos^2 x}$$

gezeigt und hieraus auf die Differenzierbarkeit der Umkehrfunktion

$$\arctan : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

geschlossen und hergeleitet, daß

$$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}.$$

Analog erhält man aus

$$(\sin x)' = \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

für die Umkehrfunktion

$$\arcsin : [-1, +1] \to \mathbb{R}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \text{für } (|x| < 1).$$

Dies beweist

Regel I.31 *Es ist*

$$\begin{array}{lcl}\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & = & \arcsin x \quad \textit{für } |x| < 1 \\[2ex] \int \frac{dx}{1+x^2} & = & \arctan x \\[2ex] \int \frac{dx}{\cos^2 x} & = & \tan x.\end{array}$$

Beim letzten Integral darf das Integrationsintervall keine Nullstelle des cos *enthalten.*

Auf diese "Grundintegrale" kann man nun viele zunächst ganz anders aussehende Integrationsaufgaben zurückführen.

Substitutionsregel

Eine der nützlichsten Techniken hierzu ist die "Substitutionsregel", die einfach die Umkehrung der Kettenregel (Satz F.60) ist. Ihre zweckmäßige Anwendung verlangt allerdings einige Übung.

Satz I.32 (Substitutionsregel) *Ist $f : [\alpha, \beta] \to \mathbb{R}$ stetig, $\varphi : [a, b] \to [\alpha, \beta]$ stetig differenzierbar, so ist mit einer Stammfunktion F zu f, für die also $F' = f$:*

$$\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt = F(t)\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)).$$

Beweis: Mit einer Stammfunktion F zu f ist

$$(F \circ \varphi)'(x) = F'(\varphi(x))\varphi'(x) = f(\varphi(x))\varphi'(x).$$

Somit gilt nach dem Hauptsatz

$$\begin{aligned}\int_a^b f(\varphi(x))\varphi'(x)dx &= \int_a^b (F \circ \varphi)'(x)dx \\ &= F(\varphi(b)) - F(\varphi(a)) = \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(t)dt.\end{aligned}$$

□

Merkregel I.33 *Bei der Substitution $x \mapsto t := \varphi(x)$ ist zu ersetzen*

$$\varphi'(x)dx = \frac{d\varphi}{dx}dx = \frac{dt}{dx}dx \mapsto dt,$$

ferner sind die Grenzen zu ersetzen gemäß

$$a \mapsto \varphi(a), \ b \mapsto \varphi(b).$$

Beispiele I.34 *1. Für jede Konstante c ist*

$$\int_a^b f(x+c)dx = \int_{a+c}^{b+c} f(t)dt \quad (\text{Setze } \varphi(x) = x + c).$$

2. Für jede Konstante $c \neq 0$ ist

$$\int_a^b f(cx)dx = \frac{1}{c}\int_{ac}^{bc} f(t)dt \quad (\text{Setze } \varphi(x) = c \cdot x).$$

3. Für jedes $n \in \mathbb{N}, \neq 0$ ist

$$\int_a^b x^{n-1} f(x^n)dx = \frac{1}{n}\int_{a^n}^{b^n} f(t)dt \quad (\text{Setze } \varphi(x) = x^n).$$

4.

$$\begin{aligned}\int_a^b xe^{-\frac{1}{2}x^2}dx &= \int_a^b -\varphi'(x)e^{\varphi(x)}dx \quad (\text{Setze } \varphi(x) = -\frac{1}{2}x^2), \\ &= -\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} e^t dt = e^{-\frac{1}{2}a^2} - e^{-\frac{1}{2}b^2}.\end{aligned}$$

5. Ist $\varphi : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $\neq 0$ auf $[a, b]$, so ist

$$\begin{aligned}\int_a^b \frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}dx &= \int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} \frac{1}{t}\,dt \qquad (\text{Setze } \varphi(x) = t) \\ &= \big(\ln |t|\big)\,\Big|_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} = \ln \frac{|\varphi(b)|}{|\varphi(a)|}.\end{aligned}$$

Ein Spezialfall ist etwa für $[a, b] \subset (-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2})$

$$\int_a^b \tan x\, dx = \int_a^b \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\ln|\cos t|\Big|_a^b.$$

6. Nach derselben Methode behandelt man generell etwa Integrale der Form

$$\int_a^b \sin x\, f(\cos x)dx \ \text{ oder } \int_a^b \cos x\, g(\sin x)dx.$$

Partialbruchzerlegung

Rationale Funktionen kann man geschlossen integrieren, wenn man die Nullstellen des Nenners kennt.
Nach dem Fundamentalsatz der Algebra – den wir erst in der Funktionentheorie beweisen werden – kann man jedes (normierte) reelle Polynom $q(x)$ darstellen als Produkt von Polynomen der Form $(x-c)$, $(x-a)^2+b^2$ mit $a,b,c \in \mathbb{R}, b>0$.
Wir betrachten die folgende Situation: Es sei

$$q(x) = \prod_{i=1}^{r}(x-c_i)\cdot\prod_{j=1}^{s}\left((x-a_j)^2+b_j^2\right),$$

wobei Faktoren mit verschiedenen Nummern auch verschieden seien.
Ferner sei $p(x)$ ein Polynom, **dessen Grad kleiner ist als der von** q. Dann gibt es eine Darstellung für den Quotienten

$$r(x) := \frac{p(x)}{q(x)} = \sum_{i=1}^{r}\frac{\gamma_i}{x-c_i} + \sum_{j=1}^{s}\frac{\alpha_j x+\beta_j}{(x-a_j)^2+b_j^2}.$$

Man kann diese Koeffizienten $\gamma_i, \alpha_j, \beta_j$ bestimmen, indem man mit dem Hauptnenner q durchmultipliziert und Koeffizientenvergleich macht. (Enthält das Polynom q sogar Potenzen der notierten Faktoren, so gelten ähnliche Formeln, die nur etwas komplizierter aussehen.)
Eine Stammfunktion zu r können wir nun aus den Stammfunktionen zu den einzelnen Summanden bestimmen. Wir bekommen für den ersten:

$$\int \frac{\gamma_i}{x-c_i}dx = \gamma_i \ln\,|(x-c_i)|.$$

Den anderen Term zerlegen wir in

$$\frac{\alpha x+\beta}{(x-a)^2+b^2} = \frac{\alpha}{2}\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2} + \frac{\beta+\alpha a}{(x-a)^2+b^2}.$$

Der erste Term ist vom Typ $\lambda\frac{\varphi'(x)}{\varphi(x)}$, somit ist

$$\int \frac{\alpha}{2}\frac{2(x-a)}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{\alpha}{2}\ln\left((x-a)^2+b^2\right).$$

Der zweite Term ist vom Typ

$$\lambda\frac{1}{(x-a)^2+b^2} = \frac{\lambda}{b}\frac{1}{b}\frac{1}{(\frac{x}{b}-\frac{a}{b})^2+1}$$

und über $\varphi(x) = (\frac{x}{b}-\frac{a}{b})$ und $\varphi'(x) = \frac{1}{b}$ bekommen wir

$$\int \lambda\frac{1}{(x-a)^2+b^2}\,dx = \frac{\lambda}{b}\arctan\left(\frac{x-a}{b}\right).$$

Beispiel

$$\frac{4}{1-x^4} = \frac{1}{1-x} + \frac{1}{1+x} + \frac{2}{1+x^2},$$

somit

$$\begin{aligned}\int \frac{4}{1-x^4}\,dx &= \int \frac{1}{1-x}\,dx + \int \frac{1}{1+x}\,dx + \int \frac{2}{1+x^2}\,dx \\ &= -\ln|x-1| + \ln|x+1| + 2\arctan x.\end{aligned}$$

Halbwinkelmethode

Auf die eben behandelte Integration rationaler Funktionen in x lassen sich auch Integrale über *rationale Funktionen* in $\sin x, \cos x$ zurückführen.
Die Substitution

$$\begin{aligned} u &= \tan\frac{x}{2} \quad \text{liefert} \\ du &= \big(\tan\frac{x}{2}\big)'\,dx = \frac{1}{2}\Big(1 + (\tan\frac{x}{2})^2\Big)dx, \quad \text{d.h.} \\ dx &= \frac{2du}{1+u^2}. \end{aligned}$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} \sin x &= 2\cdot\sin\frac{x}{2}\,\cos\frac{x}{2} = 2\cdot\tan\frac{x}{2}\cdot\cos^2\frac{x}{2} = \frac{2\tan\frac{x}{2}}{1+\tan^2\frac{x}{2}} = \frac{2u}{1+u^2}, \\ \cos x &= \cos^2\frac{x}{2} - \sin^2\frac{x}{2} = \cos^2\frac{x}{2}(1-\tan^2\frac{x}{2}) = \frac{1-u^2}{1+u^2}. \end{aligned}$$

Hat man die Substitution ausgeführt, so ist also eine rationale Funktion in der Variablen u entstanden, die man etwa über Partialbruchzerlegung bearbeiten kann.
Beispiel Es sei $0 < a < b < \pi$. Mit $A := \tan\frac{a}{2}$, $B := \tan\frac{b}{2}$, ist

$$\int_a^b \frac{dx}{\sin x} = \int_A^B \frac{1+u^2}{2u}\cdot\frac{2du}{1+u^2} = \int_A^B \frac{du}{u} = \ln\left|\frac{\tan\frac{a}{2}}{\tan\frac{b}{2}}\right|.$$

Partielle Integration

Eine weitere wichtige Integrationsmethode gewinnt man aus der Umkehrung der Produktregel beim Differenzieren.

Satz I.35 *Sind $f, g : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar, so ist*

$$\int_a^b f(x)g'(x)dx = f(x)g(x)\Big|_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)dx.$$

Beweis: Es ist $(fg)' = f'g + fg'$, somit fg Stammfunktion zu $f'g + fg'$, nach dem Hauptsatz also

$$f(x)g(x)\Big|_a^b = \int_a^b f'(x)g(x)dx + \int_a^b f(x)g'(x)dx.$$

□

Beispiel I.36 *Es sei $p(x)$ ein Polynom. Berechne*

$$\int_a^b p(x)e^x dx.$$

Wir setzen $f(x) := p(x), g'(x) := e^x$, also dann auch $g(x) = e^x$. Somit ist

$$\int_a^b p(x)e^x dx = p(x)e^x\Big|_a^b - \int_a^b p'(x)e^x dx.$$

Das rechtsstehende Integal ist nun von der selben Bauart, wie das ursprüngliche, aber das darin vorkommende Polynom hat kleineren Grad. Somit kann man diesen

Schluß iterieren, bis man auf ein Integral der Form $\int_a^b ce^x dx$ mit konstantem c kommt, was direkt integrierbar ist.
Etwa für $p(x) = x^2$ bekommen wir

$$\int_a^b x^2 e^x dx = x^2 e^x \Big|_a^b - \int_a^b 2xe^x dx.$$

$$\int_a^b 2xe^x dx = 2xe^x \Big|_a^b - \int_a^b 2e^x dx = 2xe^x \Big|_a^b - 2e^x \Big|_a^b.$$

Somit bekommen wir gesamt

$$\int_a^b x^2 e^x dx = (x^2 - 2x + 2)e^x \Big|_a^b.$$

Beispiel I.37 *Es sei $p(x)$ ein Polynom, $a, b > 0$. Berechne*

$$\int_a^b p(x) \ln x \, dx.$$

Wir setzen $f(x) := \ln x$, $g(x) := \int_0^x p(t)dt$. Letzteres hat die Gestalt $g(x) = x \cdot h(x)$ mit einem Polynom h. Damit liefert uns die partielle Integration

$$\int_a^b p(x) \ln x \, dx = (\ln x)\, g(x) \Big|_a^b - \int_a^b \frac{1}{x} g(x)\, dx = (\ln x)\, g(x) \Big|_a^b - \int_a^b h(x)\, dx$$

und das letzterhaltene Integral ist leicht auszuwerten.
Ein weiterer oft anwendbarer Trick wird in dem nächsten Beispiel benutzt.

Beispiel I.38 *Berechne $\int_a^b \cos^2 x \, dx$.*

Wir setzen $f(x) := g'(x) := \cos x$, damit $f'(x) = -\sin x$, $g(x) = \sin x$. Somit liefert partielle Integration

$$\begin{aligned}
\int_a^b \cos^2 x \, dx = \int_a^b \cos x \cdot \cos x \, dx &= \cos x \, \sin x \Big|_a^b + \int_a^b \sin x \cdot \sin x \, dx \\
&= \cos x \, \sin x \Big|_a^b + \int_a^b (1 - \cos^2 x)\, dx \\
&= \cos x \, \sin x \Big|_a^b + (b - a) - \int_a^b \cos^2 x \, dx.
\end{aligned}$$

Damit haben wir

$$2 \cdot \int_a^b \cos^2 x \, dx = \cos x \, \sin x \Big|_a^b + (b - a)$$

also

$$\int_a^b \cos^2 x \, dx = \frac{1}{2} \cos x \, \sin x \Big|_a^b + \frac{1}{2}(b - a).$$

Obwohl wir also im Laufe der Rechnung wieder bei dem zuerst betrachteten Integral gelandet sind, war dies kein logischer Zirkel, sondern der Weg zur Berechnung des Integrals.
Mittels zweimaliger Partieller Integration oder auch über die Darstellung durch die komplexe Exponentialfunktion erhält man die folgenden, im Zusammenhang mit FOURIER-Reihen wichtigen Relationen:

Satz I.39 (Orthogonalitätsrelation der trigonometrischen Funktionen) *Die trigonometrischen Funktionen erfüllen für alle $n, m \in \mathbb{N}$ die Relationen (δ_{nm} ist das* KRONECKER*-Symbol)*

$$\int_0^{2\pi} \cos nx \cos mx \, dx = \int_0^{2\pi} \sin nx \sin mx \, dx = \pi \cdot \delta_{nm} \qquad (m,n) \neq (0,0)$$
$$\int_0^{2\pi} \cos nx \sin mx \, dx = 0.$$

Eine numerische Integrationsmethode

Die Liste der Tricks zum Berechnen von Integralen ließe sich noch erheblich verlängern. Dennoch wird man häufig auf numerische Methoden angewiesen sein. Eine einfache aber wirkungsvolle Methode ist die sogenannte

Trapezregel I.40 *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbar und $C := \sup\{|f''(x)| : x \in [a,b]\}$. Dann ist für $n \in \mathbb{N}, \geq 1$ und $h := \frac{b-a}{n}$*

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{\nu=1}^{n-1} f(a+\nu h) + \frac{1}{2}f(b)\right) \cdot h + R,$$

mit $|R| \leq \frac{C}{12}(b-a)h^2$.

Beweis: Wir setzen $a_\nu := a+\nu h$ und betrachten zunächst nur ein Teilintervall $I_\nu := [a_\nu, a_{\nu+1}] = [a_\nu, a_\nu+h]$. Dazu bilden wir die Funktion $\varphi(x) := \frac{1}{2}(x-a_\nu)(a_{\nu+1}-x) = \frac{1}{2}(x-a_\nu)(h+a_\nu-x)$. Sie ist im Innern von I_ν streng positiv, an den Randpunkten $= 0$ und für die Ableitungen gilt $\varphi'(x) = \frac{h}{2} - (x-a_\nu)$ und $\varphi''(x) = -1$. Mittels zweimaliger Partieller Integration können wir nun das uns interessierende Integral von f über das Teilintervall I_ν wie folgt berechnen:

$$\begin{aligned}
\int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} f(x)dx &= \int_{a_\nu}^{a_\nu+h} f(x)dx = -\int_{a_\nu}^{a_\nu+h} \varphi''(x)f(x)dx \\
&= -\varphi'(x)f(x)\Big|_{a_\nu}^{a_\nu+h} + \int_{a_\nu}^{a_\nu+h} \varphi'(x)f'(x)dx \\
&= \frac{h}{2}\big(f(a_\nu)+f(a_{\nu+1})\big) + \varphi(x)f'(x)\Big|_{a_\nu}^{a_\nu+h} - \int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} \varphi(x)f''(x)dx \\
&= \frac{h}{2}\big(f(a_\nu)+f(a_{\nu+1})\big) - f''(\xi_\nu)\int_{a_\nu}^{a_{\nu+1}} \varphi(x)dx \\
&= \frac{h}{2}\big(f(a_\nu)+f(a_{\nu+1})\big) - \frac{h^3}{12}f''(\xi_\nu),
\end{aligned}$$

wobei zuletzt der Mittelwertsatz der Integralrechnung benutzt wurde und die Stelle $\xi_\nu \in (a_\nu, a_{\nu+1})$ ist.
Durch Aufsummieren folgt

$$\int_a^b f(x)dx = \left(\frac{1}{2}f(a) + \sum_{\nu=1}^{n-1} f(a+\nu h) + \frac{1}{2}f(b)\right) \cdot h + \sum_{\nu=1}^{n} \frac{h^3}{12}f''(\xi_\nu),$$

wobei sich der Rest wegen $nh = b-a$ wie behauptet abschätzen läßt. □

Uneigentliche Integrale

Bei der Einführung des Integrals $\int_a^b f(x)dx$ hatten wir vorausgesetzt,

- daß das Integrations-Intervall $[a, b]$ endlich ist und
- daß die Funktion f darauf mindestens beschränkt ist.

Ausdrücke wie

$$\int_0^\infty e^{-x}dx \text{ oder } \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

sind also zunächst sinnlos. Mit gewissen Vorsichtsmaßnahmen können wir ihnen aber einen Sinn zuweisen.

Definition I.41 *Die Funktion $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ sei über jedem Intervall $[a, R]$ mit $a < R < \infty$ integrierbar. Falls dann der Grenzwert*

$$\lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx$$

existiert, heißt das Integral $\int_a^\infty f(x)dx$ "konvergent" und wir setzen

$$\int_a^\infty f(x)dx := \lim_{R\to\infty} \int_a^R f(x)dx.$$

Man spricht dann auch von einem "uneigentlichen Riemann*-Integral". Analog bekommt man solche uneigentlichen Integrale der Form*

$$\int_{-\infty}^b f(x)dx$$

Beispiel I.42 $\int_0^\infty e^{-x}dx$ *konvergiert; denn es ist*

$$\int_0^R e^{-x}dx = -e^{-x}\Big|_0^R = 1 - e^{-R} \to 1 \quad (R \to \infty).$$

Sinngemäß gehen wir vor, wenn etwa das Intervall endlich, aber die Funktion nicht beschränkt ist.

Definition I.43 *Die Funktion $f : (a, b] \to \mathbb{R}$ sei über jedem Intervall $[a + \epsilon, b]$ (mit $a < a + \epsilon < b$) integrierbar. Falls dann der Grenzwert*

$$\lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx$$

existiert, heißt das "uneigentliche" Integral

$$\int_a^b f(x)dx$$

konvergent und wir setzen

$$\int_a^b f(x)dx := \lim_{\epsilon\to 0} \int_{a+\epsilon}^b f(x)dx.$$

Analog für die obere Grenze.

Beispiel I.44 $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$ *konvergiert; denn es ist*

$$\int_\epsilon^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2\sqrt{x}\Big|_\epsilon^1 = 2(1-\sqrt{\epsilon}) \to 2 \quad (\epsilon \to 0.)$$

Bleibt noch der Fall, daß beide Integrationsgrenzen "kritisch" sind.

Definition I.45 *Es sei* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}, b \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ *und die Funktion* $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *sei über jedem Intervall* $[\alpha,\beta] \subset (a,b)$ *integrierbar. Wenn dann für ein beliebig gewähltes* $c \in (a,b)$ *beide Integrale*

$$\int_\alpha^c f(x)dx \text{ und } \int_c^\beta f(x)dx$$

für $\alpha \to a$ *bzw. für* $\beta \to b$ *konvergieren, so heißt das uneigentliche Integral* $\int_a^b f(x)dx$ *konvergent und wir setzen*

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{\alpha \to a+} \int_\alpha^c f(x)dx + \lim_{\beta \to b-} \int_c^\beta f(x)dx.$$

Beispiel I.46 *Es ist*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{1+x^2} = \pi.$$

Denn es ist

$$\int_0^\beta \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_0^\beta = \arctan \beta \to \frac{\pi}{2} \quad (\beta \to \infty)$$

und auch

$$\int_\alpha^0 \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x\Big|_\alpha^0 = -\arctan \alpha \to \frac{\pi}{2} \quad (\alpha \to -\infty).$$

Analog erhält man über den arcsin:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi.$$

Warnung *Für die Konvergenz des Integrals*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx$$

ist ***nicht*** *ausreichend, daß*

$$\lim_{R \to \infty} \int_{-R}^{+R} f(x)dx$$

konvergiert, sondern es müssen die Grenzübergänge an den beiden Enden ***unabhängig voneinander*** *möglich sein.*

Als Beispiel hierfür sei etwa $f(x) = \sin x$ betrachtet. Dies ist eine ungerade Funktion und damit ist stets

$$\int_{-R}^{+R} \sin x \, dx = 0,$$

während etwa

$$\int_0^R \sin x \, dx = -\cos x\Big|_0^R = 1 - \cos R$$

für $R \to \infty$ nicht konvergiert.
Solche gekoppelten Grenzwerte sind allerdings gelegentlich doch sinnvoll. Man nennt sie den "CAUCHY-Hauptwert" des uneigentlichen Integrals.

Zwischen uneigentlichen Integralen und Zahlenreihen besteht ein Zusammenhang, der für Abschätzungszwecke oft nützlich ist.

Satz I.47 (Integral-Vergleichskriterium) *Es sei $f : [1, \infty) \to \mathbb{R}, \geq 0$ eine monoton fallende Funktion. Dann konvergiert die Reihe*

$$\sum_{n=1}^{\infty} f(n)$$

genau dann, wenn das uneigentliche Integral

$$\int_1^{\infty} f(x)dx$$

konvergiert.

Beweis: Für $n - 1 \leq x \leq n$ ist $f(n) \leq f(x) \leq f(n-1)$, folglich

$$f(n) \leq \int_{n-1}^{n} f(x)dx \leq f(n-1).$$

Also ist

$$\sum_{n=2}^{m} f(n) \leq \int_1^m f(x)dx \leq \sum_{n=1}^{m-1} f(n).$$

Wegen $f(x) \geq 0$ ist für $m \to \infty$ Konvergenz äquivalent mit Beschränktheit, was die Behauptung liefert. □

Wir notieren hierzu noch folgendes

Beispiel I.48 *Für $f(x) := \frac{1}{x}$ liefert dies*

$$\sum_{n=2}^{m} \frac{1}{n} \leq \int_1^m \frac{1}{x}\,dx \leq \sum_{n=1}^{m-1} \frac{1}{n}$$

oder

$$\left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}\right) - 1 \leq \int_1^m \frac{1}{x}\,dx = \ln m \leq \left(\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{m}.$$

Die Partialsummen der harmonischen Reihe wachsen also wie der natürliche Logarithmus.

Vertauschen von Grenzübergängen

Wir hatten gesehen (Satz F.63, Satz I.28), daß man zu einer durch eine Potenzreihe dargestellten Funktion

$$f(x) = \sum_0^{\infty} a_j (x - x_0)^j$$

Ableitung f' bzw. Stammfunktion $\int f$ bekommt, indem man die Reihe der Ableitungen bzw. der Stammfunktionen bildet:

$$f'(x) = \sum_0^\infty \left(a_j(x-x_0)^j\right)' = \sum_0^\infty j \cdot a_j(x-x_0)^{j-1},$$

$$\int_0^x f(t)dt = \sum_0^\infty \int_0^x a_j(t-x_0)^j dt = \sum_0^\infty \frac{1}{j+1} \cdot a_j(x-x_0)^{j+1}.$$

Beide neuerhaltenen Reihen haben denselben Konvergenzradius wie die ursprüngliche Reihe.
Bei der Bildung von f' haben wir also zunächst den Grenzprozess "Konvergenz der Reihe" und danach den Grenzprozess "Differenzieren" auszuführen. Wir sehen, daß man *hier* auch in der umgekehrten Reihenfolge vorgehen kann.
Entsprechendes liegt *hier* beim Integrieren vor.
In der Situation der Potenzreihen können wir also die beiden Grenzprozesse "Konvergenz der Reihe" und "Differenzieren" bzw. "Integrieren" vertauschen, ohne am Ergebnis etwas zu ändern.

Im allgemeinen Fall ist dies falsch!

Wir haben das Vorliegen geeigneter Voraussetzungen zu prüfen, ehe wir eine solche Vertauschung von Grenzprozessen vornehmen dürfen.

Es sei D entweder ein Intervall in $\mathbb{R}$ oder eine Kreisscheibe in $\mathbb{C}$.

Definition I.49 *Gegeben sei eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Funktionen $f_n : D \to \mathbb{C}$, für die an jeder Stelle $x \in D$ der Grenzwert*

$$f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

existiert. Dann sagen wir: "Die Funktionen-Folge (f_n) konvergiert auf D punktweise gegen die Grenzfunktion f."

Beispiel I.50 1. *Für $|x| < 1$ und $f_n(x) := \sum_{j=0}^n x^j$ ist*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := \frac{1}{1-x}.$$

(geometrische Reihe) und hier ist diese Grenzfunktion beliebig oft stetig differenzierbar.

2. *Für eine feste Zahl $k \in \mathbb{N}, \geq 1$ betrachte*

$$f_n(x) := \begin{cases} (1-n^2x^2)^{k+1} & \text{für } |x| < \frac{1}{n} \\ 0 & \text{für } |x| \geq \frac{1}{n}. \end{cases}$$

Dann ist

$$f_n(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \text{ und jedes } n, \\ 0 & \text{für } x \neq 0 \text{ und jedes } n > \frac{1}{|x|}. \end{cases}$$

Somit ist

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := \begin{cases} 1 & \text{für } x = 0 \\ 0 & \text{für } x \neq 0. \end{cases}$$

Die Funktionen f_n sind sämtlich k-mal stetig differenzierbar. Wir haben also zu einer Folge von k-mal stetig differenzierbaren Funktionen eine Grenzfunktion, die nichteinmal stetig ist. (Denselben Effekt kann man sogar mit beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen erreichen.)

3. *Modifizieren wir dieses Beispiel und setzen etwa*

$$f_n(x) := \begin{cases} n\big(1 - n^2(x - \frac{1}{n})^2\big) & \text{für } 0 < x < \frac{2}{n} \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so folgt für alle x der triviale Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) := 0.$$

Die Funktionen f_n und ihre Grenzfunktion f sind also alle stetig und damit integrierbar. Man berechnet

$$\int_0^2 f_n(x)dx = \int_0^{\frac{2}{n}} n(1 - n^2(x - \frac{1}{n})^2)dx = \frac{4}{3},$$
$$\int_0^2 f(x)dx = \int_0^2 0dx = 0.$$

Die Folge der Integrale $\int f_n(x)dx$ konvergiert also, aber **nicht** *gegen das Integral der Grenzfunktion.*

Diese Beispiele mögen als Warnung genügen dafür, daß die bei Potenzreihen angetroffenen Verhältnisse nicht ohne weiteres verallgemeinerbar sind.

Warnung *Im allgemeinen sind der Übergang zur Grenzfunktion einer Funktionenfolge nicht mit Differentiation oder Integration vertauschbar.*

Die Situation ändert sich, wenn wir zu einem stärkeren Konvergenzbegriff übergehen. In Satz F.5 hatten wir für die auf D beschränkten Funktionen die "Supremum-Norm" eingeführt:

$$|f|_\infty := \sup_{x\in D} |f(x)|.$$

Definition I.51 *Für auf D beschränkte Funktionen f_n, f sagen wir: "Die Folge (f_n) konvergiert gleichmäßig auf D gegen f", wenn gilt, daß bezüglich dieser Norm $|f_n - f|_\infty \to 0$ für $n \to \infty$.*

Im obigen Beispiel haben wir im Falle der geometrischen Reihe gleichmäßige Konvergenz in jeder Kreisscheibe $|x| \le q$ mit $q < 1$, bei den Beispielen 2. und 3. liegt jedoch keine gleichmäßige Konvergenz vor.

Satz I.52 *Konvergiert die Folge (f_n) auf D gleichmäßig gegen f, so auch punktweise.*

Beweis: Für $x \in D$ ist

$$|f_n(x) - f(x)| \le \sup\{|f_n(x') - f(x')|; x' \in D\} = |f_n - f|_\infty \to 0 \qquad (n \to \infty).$$

□

Satz I.53 *Konvergiert die Folge (f_n) auf D gleichmäßig gegen f und sind für ein $x_0 \in D$ alle f_n stetig in x_0, so auch die Grenzfunktion f.*

Beweis: Zu $\epsilon > 0$ wähle n mit $|f_n - f|_\infty < \epsilon$ und bestimme dazu $\delta > 0$, sodaß $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon$ für $|x - x_0| < \delta$. Dann ist für solche x

$$|f(x) - f(x_0)| \le |f(x) - f_n(x)| + |f_n(x) - f_n(x_0)| + |f_n(x_0) - f(x_0)| < 3\epsilon.$$

□

Wir haben also

Stetigkeit bleibt unter gleichmäßiger Konvergenz erhalten.

Analoges haben wir für das Integrieren:

Satz I.54 *Es sei (f_n) eine Folge integrierbarer Funktionen $f_n : [a,b] \to \mathbb{R}$, die auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann ist auch f integrierbar und für jedes $x \in [a,b]$ ist*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^x f_n(t)\,dt = \int_a^x f(t)\,dt.$$

Beweis: Zu $\epsilon > 0$ wähle n mit $|f_n - f|_\infty < \epsilon$, sodaß also für alle x dann

$$f_n(x) - \epsilon < f(x) < f_n(x) + \epsilon$$

ist. Da f_n integrierbar ist, gibt es nach Satz I.9 Treppenfunktionen

$$\varphi \le f_n \le \psi \text{ mit } \int_a^b (\psi(x) - \varphi(x))dx < \epsilon.$$

Dann sind auch $\varphi - \epsilon$ und $\psi + \epsilon$ Treppenfunktionen, für die dann

$$\varphi(x) - \epsilon \le f_n(x) - \epsilon < f(x) < f_n(x) + \epsilon \le \psi(x) + \epsilon$$

gilt und ferner

$$\int_a^b \Big((\psi(x) + \epsilon) - (\varphi(x) - \epsilon)\Big)dx = \int_a^b \Big((\psi(x) - \varphi(x)) + 2\epsilon\Big)dx < \epsilon + 2\epsilon(b-a).$$

Da $\epsilon > 0$ beliebig war, ist damit f integrierbar.
Dann ist aber für $x \in [a,b]$

$$\begin{aligned}\left|\int_a^x f(t)dt - \int_a^x f_n(t)dt\right| &= \left|\int_a^x \big(f(t) - f_n(t)\big)dt\right| \\ &\le \left|\int_a^x \big|f - f_n\big|_\infty dt\right| \\ &\le |b-a| \cdot \big|f - f_n\big|_\infty \to 0 \quad (n \to \infty.)\end{aligned}$$

□

Für stetige Funktionen folgt natürlich die Integrierbarkeit der Grenzfunktion schon aus dem vorigen Satz I.53.

Bei gleichmäßiger Konvergenz darf man Integration und (Folgen-)Grenzübergang vertauschen.

Etwas komplizierter liegen die Verhältnisse beim Differenzieren; die gleichmäßige Konvergenz reicht hier nicht, um einen entsprechenden Vertauschungssatz zu bekommen.

Beispiel I.55 *Die Folge der Funktionen*

$$f_n(x) := \frac{1}{n} \cdot \sin n^2 x$$

konvergiert offenbar gleichmäßig gegen die konstante Funktion 0. Für die Ableitungen haben wir aber

$$f_n'(x) := \frac{1}{n} n^2 \cdot \cos n^2 x = n \cdot \cos n^2 x$$

und diese Folge ist sicher an jeder Stelle der Form $x = q \cdot 2\pi$ mit rationalem q divergent.

Für das Differenzieren bekommen wir

Satz I.56 *Es sei (f_n) ein Folge von auf $[a, b]$ stetig differenzierbaren Funktionen, für die gelten*

1. *$f_n(x) \to f(x)$ punktweise auf $[a, b]$ (es reicht Konvergenz an* einer *Stelle x_0) und*
2. *$f_n' \to g$ gleichmäßig auf $[a, b]$.*

Dann ist auch f auf $[a, b]$ stetig differenzierbar und $f' = g$, d.h. für alle $x \in [a, b]$ ist

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{d}{dx} f_n(x) \right) = \frac{d}{dx} \left(\lim_{n\to\infty} f_n(x) \right).$$

Beweis: Nach dem Hauptsatz ist

$$f_n(x) = f_n(x_0) + \int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt.$$

Für $n \to \infty$ haben wir nach Voraussetzung $f_n(x) \to f(x)$, $f_n(x_0) \to f(x_0)$ und $f_n' \to g$ gleichmäßig auf dem ganzen Intervall. Da die f_n' stetig sind, ist dann auch g stetig, ferner gilt nach Satz I.54

$$\int_{x_0}^{x} f_n'(t)\, dt \to \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt.$$

Somit ist auch

$$f(x) = f(x_0) + \int_{x_0}^{x} g(t)\, dt,$$

und da g stetig ist, bekommen wir nach dem Hauptsatz, daß $f' = g$. □

Alle diese Aussagen gelten sinngemäß für Reihen von Funktionen, die als Grenzfunktion zu der Folge der Partialsummen-Funktionen zu lesen sind (vergl. Potenzreihen).

Daß wir Potenzreihen gliedweise integrieren und differenzieren dürfen, ist im Lichte der jetzt gezeigten Sätze die simple Folge davon, daß Potenzreihen in jeder abgeschlossenen Kreisscheibe innerhalb des Konvergenzgebietes gleichmäßig konvergieren und die Potenzreihe aus den Ableitungen den selben Konvergenzradius besitzt (Satz Z.50) .

Wird eine Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ auf $[a, b]$ durch eine Potenzreihe dargestellt,

$$f(x) = \sum_j a_j (x - x_0)^j \quad (x \in [a, b]),$$

so ist also f gleichmäßiger Limes der Partialsummen-Polynome

$$f_n(x) = \sum_{j=0}^{n} a_j (x - x_0)^j.$$

Hier sind jedoch die approximierenden Polynome f_n so gebaut, daß sich je zwei aufeinanderfolgende nur um einen reinen Potenzterm $a_{n+1}(x-x_0)^{n+1}$ der richtigen Ordnung unterscheiden. Diese Zusatzbedingung führt zu dem schönen Differenzierbarkeitsverhalten von Potenzreihen. Läßt man sie weg, so bekommt man noch den

Approximationssatz von WEIERSTRASS I.57 *Zu jeder stetigen Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ gibt es eine Folge (p_n) von Polynomen, die auf $[a,b]$ gleichmäßig gegen f konvergiert.*

Den etwas umfangreichen Beweis übergehen wir.

FOURIER-Reihen

Eine auf ganz $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ definierte Funktion f mit reellen oder komplexen Werten heißt "periodisch mit Periode $\omega > 0$", wenn

$$f(x+\omega) = f(x) \quad \text{für alle } x$$

gilt. Setzt man

$$F(x) := f(\frac{\omega}{2\pi}x),$$

so ist offenbar

$$F(x+2\pi) = f(\frac{\omega}{2\pi}(x+2\pi)) = f(\frac{\omega}{2\pi}x+\omega) = f(\frac{\omega}{2\pi}x) = F(x),$$

sodaß also die neue Funktion die Periode 2π hat. Diese Normierung setzen wir im folgenden stets voraus.
Beispiele 2π-periodischer Funktionen sind etwa $\cos kx, \sin kx, e^{ikx}$ jeweils für beliebige $k \in \mathbb{Z}$ sowie die daraus gebildeten "trigonometrischen Polynome"

$$S_n(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n} \big(a_k \cos kx + b_k \sin kx\big) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ikx},$$

wobei man über

$$\cos kx = \frac{1}{2}\big(e^{ikx} + e^{-ikx}\big), \ \sin kx = \frac{1}{2i}\big(e^{ikx} - e^{-ikx}\big)$$

zwischen beiden Darstellungen wechseln kann. Man bekommt ($k \geq 1$)

$$c_0 = \frac{a_0}{2}, \quad c_k = \frac{1}{2}(a_k - ib_k), \quad c_{-k} = \frac{1}{2}(a_k + ib_k).$$

Geben wir eine Folge $(c_k)_{k\in\mathbb{Z}}$ vor, sodaß die Reihe

$$|c_0| + \sum_{k=1}^{\infty}(|c_k| + |c_{-k}|)$$

konvergiert, so bilden wegen $\left|e^{ikx}\right| \leq 1$ (für alle $x \in \mathbb{R}$) die damit gebildeten trigonometrischen Summen

$$S_n(x) = \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ikx}$$

eine auf ganz $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergente Folge, die somit gegen eine stetige und (trivialerweise wieder) 2π-periodische Grenzfunktion konvergiert. Wir schreiben dafür

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

und nennen dies eine "trigonometrische Reihe". Physikalisch interpretiert haben wir durch Überlagerung von Sinus-Cosinus-Schwingungen eine Funktion f beschrieben. Hier lassen sich die Koeffizienten c_k auch wieder aus f zurückgewinnen. Wir nutzen dazu

Satz I.58 *Für $k, n \in \mathbb{Z}$ ist*

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx}e^{-inx}dx = \delta_{kn} = \begin{cases} 1 & k = n, \\ 0 & k \neq n. \end{cases}$$

Beweis: Der Fall $k = n$ ist trivial, für $k \neq n$ haben wir

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{ikx}e^{-inx}dx = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{i(k-n)x}dx = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{1}{i(k-n)}e^{i(k-n)x}\right)\Bigg|_0^{2\pi} = 0,$$

da ja $e^{i(k-n)x}$ die Periode 2π hat. □

Damit folgt etwa

Satz I.59 *Ist die trigonometrische Reihe*

$$f(x) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

auf $\mathbb{R}$ gleichmäßig konvergent, so ist für alle $n \in \mathbb{Z}$

$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx.$$

Beweis: Wegen der gleichmäßigen Konvergenz darf man die Reihe gliedweise integrieren, woraus mit Satz I.58 sofort die Behauptung folgt. □

Wir nehmen dies nun zum Ausgangspunkt, um relativ beliebige 2π-periodische Funktionen durch trigonometrische Reihen darzustellen.

Definition I.60 *$f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei 2π-periodisch und über $[0, 2\pi]$ integrierbar. Dann heißen die Zahlen*

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx \qquad (k \in \mathbb{Z})$$

die "FOURIER-Koeffizienten" von f und die damit (zunächst nur formal) gebildete trigonometrische Reihe

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k e^{ikx}$$

die "FOURIER-Reihe" von f.

Warnung *Ohne geeignete Voraussetzungen über f braucht die FOURIER-Reihe von f weder überall zu konvergieren noch dort, wo sie konvergiert den Funktionswert $f(x)$ zu ergeben!*

Konvergenz tritt allerdings stets im sog. "quadratischen Mittel" ein. Dies bedeutet folgendes:
Auf dem Vektorraum V der 2π-periodischen (und über eine Periode quadratisch integrierbaren) Funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ – dieser Raum enthält insbesondere alle

beschränkten und auf dem Periodenintervall bis auf endlich viele Stellen stetigen Funktionen – ist ein Skalarprodukt erklärt durch die Vorschrift

$$\langle u, v\rangle := \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \overline{u(x)}v(x)dx.$$

Benennen wir nun die Exponentialfunktionen durch

$$e_k(x) := e^{ikx} \qquad (k \in \mathbb{Z}),$$

so besagt Satz I.58 gerade

$$\langle e_n, e_k\rangle = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} e^{-inx}e^{ikx}dx = \delta_{kn},$$

was bedeutet, daß diese Funktionen ein Orthonormalsystem bilden. Die FOURIER-Koeffizienten können wir damit auch darstellen als

$$c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx = \langle e_k, f\rangle.$$

Das Skalarprodukt $\langle\ ,\ \rangle$ erzeugt auf dem Raum V die Norm

$$|v|_2 := \big(\langle v, v\rangle\big)^{\frac{1}{2}} = \left(\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |v(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Genau genommen brauchen wir die Stetigkeit, damit es eine Norm ist, da dieser Ausdruck auch 0 wird wenn die Funktion v noch an endlich vielen Stellen im Integrationsintervall $\neq 0$ ist. Dies spielt aber im weiteren keine wichtige Rolle.
Damit gilt nun

Satz I.61 *Ist $S_n := \sum_{k=-n}^{+n} c_k e_k$ die n-te Partialsumme der* FOURIER*-Reihe zu f, so ist*

1. $$\big|S_n\big|_2^2 = \sum_{k=-n}^{+n} |c_k|^2,$$
2. *der "Rest" $f - S_n$ orthogonal zu S_n*
3. *und für die Normen gilt*

$$\big|f - S_n\big|_2^2 = \big|f\big|_2^2 - \big|S_n\big|_2^2 = \big|f\big|_2^2 - \sum_{k=-n}^{+n} |c_k|^2.$$

Beweis: 1. ist Satz V.40, 2. ist Satz V.43. Zu 3.: Wir bekommen damit

$$\begin{aligned}\big|f - S_n\big|_2^2 &= \langle f - S_n, f - S_n\rangle = \langle f, f\rangle - \langle S_n, f\rangle - \langle f - S_n, S_n\rangle \\ &= \langle f, f\rangle - \langle \sum_{k=-n}^{+n} c_k e_k, f\rangle \\ &= \big|f\big|_2^2 - \sum_{k=-n}^{+n} \overline{c_k}c_k = \big|f\big|_2^2 - \sum_{k=-n}^{+n} |c_k|^2.\end{aligned}$$

□

Aus der letzten Gleichung liest man unmittelbar ab

Satz I.62 *Hat f die* FOURIER-*Koeffizienten c_n und sind die S_n die Partialsummen der* FOURIER-*Reihe, so gelten*

1. *die* BESSEL*sche Ungleichung: Für alle n ist*

$$\sum_{k=-n}^{+n} |c_k|^2 \leq \left|f\right|_2^2 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left|f(x)\right|_2^2 dx.$$

2. *Es sind äquivalent für $n \to \infty$:*

$$\left|f - S_n\right|_2 \to 0 \ \ \text{und} \ \ \sum_{k=-n}^{+n} |c_k|^2 \to \left|f\right|_2^2.$$

Die Konvergenz im Sinne der $| \quad |_2$ - Norm heißt "Konvergenz im quadratischen Mittel".

Letzteres bedeutet, daß die BESSELsche Ungleichung zu einer Gleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k|^2 = \left|f\right|_2^2$$

wird, der sog. PACEVALschen Gleichung.
Man braucht also nur von einer Zahlenfolge die Konvergenz gegen den "richtigen" Grenzwert zu beweisen, um auf die Konvergenz im quadratischen Mittel der FOURIER-Reihe schließen zu können. Es gilt nun

Satz I.63 *Zu $0 \leq a < 2\pi$ gilt für die 2π-periodische Funktion t_a mit*

$$t_a(x) = \begin{cases} 1 & 0 \leq x < a \\ 0 & a \leq x < 2\pi \end{cases}$$

die PACEVAL*sche Gleichung, d.h. die* FOURIER-*Reihe konvergiert im quadratischen Mittel.*

Den recht umfangreichen und sehr technischen Beweis kann man etwa bei FORSTER, Analysis 1, S. 195 nachlesen.
Jede 2π-periodische Treppenfunktion t läßt sich offensichtlich als eine Linearkombination $t(x) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j t_j(x)$ schreiben, wobei die $t_j(x)$ Funktionen der in Satz I.63 betrachteten Art sind, und über eine relativ einfache Abschätzung erhält man daraus auch hierfür die Konvergenz der FOURIER-Reihe im quadratischen Mittel:

Satz I.64 *Für jede 2π-periodische Treppenfunktion t konvergiert die* FOURIER-*Reihe im quadratischen Mittel gegen t.*

Nun haben wir die Integrale für RIEMANN-integrierbare Funktionen durch Approximation über die Integrale von Treppenfunktionen erklärt und, indem man dies hier geeignet anwendet (in FORSTER, Analysis 1, ist das ausgeführt), erhält man

Satz I.65 *Für jede 2π-periodische, über $[0, 2\pi]$ quadratisch integrierbare Funktion f konvergiert die* FOURIER-*Reihe im quadratischen Mittel gegen f.*

Beispiel I.66 *Wir betrachten die 2π-periodische Funktion h mit*

$$h(x) = \begin{cases} +1 & 0 \leq x < \pi \\ -1 & \pi \leq x < 2\pi. \end{cases}$$

Man bestimmt die FOURIER-Koeffizienten zu

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} h(x)dx = 0$$

und für $k \neq 0$

$$\begin{aligned} c_k &= \frac{1}{2\pi} \left[\int_0^{\pi} e^{-ikx} dx - \int_{\pi}^{2\pi} e^{-ikx} dx \right] \\ &= \frac{-1}{2\pi i k} \left(e^{-ikx} \Big|_0^{\pi} - e^{-ikx} \Big|_{\pi}^{2\pi} \right) = \frac{i}{2\pi k} (2e^{-ik\pi} - 2). \end{aligned}$$

Nun ist

$$e^{-ik\pi} = \begin{cases} 1 & k \text{ gerade} \\ -1 & k \text{ ungerade} \end{cases}$$

und damit

$$c_k = \begin{cases} 0 & k \text{ gerade} \\ \frac{2}{ik\pi} & k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

Die FOURIER-Reihe lautet also

$$\frac{2}{\pi i} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{2m+1} \left(e^{+i(2m+1)x} - e^{-i(2m+1)x} \right) = \frac{4}{\pi} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\sin(2m+1)x}{2m+1}.$$

Für $x = k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$) ist stets $\sin(2m+1)x = 0$, sodaß hier die FOURIER-Reihe gegen 0 konvergiert, also nicht gegen $h(x)$. In jedem abgeschlossenen Intervall, das keine Stelle der Form $k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$ enthält, konvergiert dagegen die Reihe gleichmäßig gegen h, wie wir später sehen werden.

Zur Frage der punktweisen oder gar gleichmäßigen Konvergenz der FOURIER-Reihe zeigen wir

Satz I.67 *Es sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ 2π-periodisch, stetig und stückweise stetig differenzierbar, d.h. es gebe eine Zerlegung von $[0, 2\pi] : 0 = t_0 < t_1 < ... < t_r = 2\pi$, sodaß f in $[t_j, t_{j+1}]$ jeweils stetig differenzierbar ist.*
Dann konvergiert die FOURIER-Reihe (auf ganz $\mathbb{R}$) gleichmäßig gegen f.

Beweis: Nach Voraussetzung ist f in jedem offenen Teilintervall (t_j, t_{j+1}) stetig differenzierbar und darüberhinaus existieren jeweils noch die einseitigen Grenzwerte von f' für x von links oder von rechts gegen t_j.
Wir erklären die Funktion φ für $x \in [0, 2\pi)$ durch

$$\varphi(x) = \begin{cases} f'(x) & \text{wenn } x \text{ kein Teilpunkt,} \\ \lim\limits_{x' \to t_j^+} f'(x') & \text{für } x = t_j. \end{cases}$$

Diese Funktion ist stückweise stetig, beschränkt, damit quadratisch integrierbar und für ihre FOURIER-Koeffizienten γ_k gilt nach der BESSELschen Ungleichung

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |\gamma_k|^2 \leq |\varphi|_2^2 < \infty.$$

Für die FOURIER-Koeffizienten c_k von f rechnen wir mittels partieller Integration

$$\begin{aligned}\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x)e^{-ikx}dx &= \frac{-1}{ik}f(x)e^{-ikx}\Big|_{t_j}^{t_{j+1}} - \frac{-1}{ik}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi(x)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{i}{k}f(x)e^{-ikx}\Big|_{t_j}^{t_{j+1}} - \frac{i}{k}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi(x)e^{-ikx}dx.\end{aligned}$$

Summiert man dies über $j = 0, 1, ..., r-1$, so fallen die ausintegrierten Teile weg und wir bekommen

$$\begin{aligned}c_k = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-ikx}dx &= \sum_{j=0}^{r-1}\frac{1}{2\pi}\int_{t_j}^{t_{j+1}} f(x)e^{-ikx}dx \\ &= \sum_{j=0}^{r-1}\frac{-i}{k}\frac{1}{2\pi}\int_{t_j}^{t_{j+1}} \varphi(x)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{-i}{k}\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(x)e^{-ikx}dx \\ &= \frac{-i}{k}\gamma_k.\end{aligned}$$

Also ist $c_k = \frac{-i}{k}\gamma_k$.
Nun ist stets $|\alpha \cdot \beta| \le \frac{1}{2}\big(|\alpha|^2 + |\beta|^2\big)$, also $|c_k| \le \frac{1}{2}\big(\frac{1}{k^2} + |\gamma_k|^2\big)$, woraus

$$\sum_{k=-\infty}^{+\infty} |c_k| < \infty$$

folgt.
Nach dem Majorantenkriterium konvergiert damit die FOURIER-Reihe zu f gleichmäßig gegen eine (dann) stetige Funktion g. Da aus gleichmäßiger Konvergenz auch die Konvergenz im quadratischen Mittel folgt, konvergiert die FOURIER-Reihe also in der $|\ \ |_2$-Norm gegen f sowie gegen g, sodaß notwendig $|f - g|_2 = 0$. Da f und g stetig sind, folgt damit $f = g$. □

Ergänzungen

Wir geben zunächst eine geschlossene Darstellung für die Partialsummen der FOURIER-Reihe: Es ist

$$\begin{aligned}S_n(x) &= \sum_{k=-n}^{+n} c_k e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-n}^{+n}\int_0^{2\pi} f(t)e^{-ikt}dt \cdot e^{ikx} \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left(\sum_{k=-n}^{+n} e^{ik(x-t)}\right) f(t)dt.\end{aligned}$$

Die innen stehende Summe kann man über die geometrische Reihe umformen zu

$$\sum_{k=-n}^{+n} e^{ik(x-t)} = \frac{\sin\big((n+\frac{1}{2})(x-t)\big)}{\sin\big(\frac{1}{2}(x-t)\big)},$$

sodaß wir gesamt bekommen

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})(x-t)\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}(x-t)\right)} f(t)dt \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})u\right)}{\sin(\frac{1}{2}u)} f(x-u)du, \end{aligned}$$

wobei der Integrand die Periode 2π hat, somit über irgend ein Periodenintervall integriert werden kann. Die Funktion $\frac{\sin((n+\frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{1}{2}u)}$ ist gerade. Damit ist über die Substitution $v := -u$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi}\int_\pi^{2\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})u\right)}{\sin(\frac{1}{2}u)} f(x-u)du &= \frac{1}{2\pi}\int_{-2\pi}^{-\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})v\right)}{\sin(\frac{1}{2}v)} f(x+v)dv \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})v\right)}{\sin(\frac{1}{2}v)} f(x+v)dv. \end{aligned}$$

Dies liefert uns die folgende Darstellung

Satz I.68 *Es ist*

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\sin\left((n+\frac{1}{2})u\right)}{\sin(\frac{1}{2}u)} \big(f(x+u)+f(x-u)\big)du.$$

Diese auf DIRICHLET zurückgehende Darstellung werden wir gleich nutzen. Zunächst brauchen wir noch

Satz I.69 (RIEMANN-LEBESGUE) *Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{C}$ stückweise stetig, $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx \to 0 \qquad \textit{für } |\lambda| \to \infty.$$

Beweis: Ist f sogar stetig differenzierbar, so liefert partielle Integration

$$\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx = \frac{1}{i\lambda}f(x)e^{i\lambda x}\Big|_a^b - \frac{1}{i\lambda}\int_a^b f'(x)e^{i\lambda x}dx.$$

Somit ist

$$\Big|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx\Big| \le \frac{1}{|\lambda|}\Big(|f(b)|+|f(a)|+(b-a)\max|f'(x)|\Big) \to 0 \quad (|\lambda|\to\infty).$$

Ist f nur stückweise stetig, so kann man zu jedem $\epsilon > 0$ eine stetig differenziebare Funktion φ_ϵ finden, für die

$$\int_a^b |f(x)-\varphi_\epsilon(x)|dx < \epsilon.$$

Dann ist

$$\Big|\int_a^b f(x)e^{i\lambda x}dx\Big| \le \Big|\int_a^b \varphi_\epsilon(x)e^{i\lambda x}dx\Big| + \int_a^b |f(x)-\varphi_\epsilon(x)|\cdot\left|e^{i\lambda x}\right|dx.$$

Der letzte Term ist $< \epsilon$, der mittlere geht nach dem eben bewiesenen gegen 0, was unseren Satz beweist. □

Damit bekommen wir den

Satz I.70 (Lokalisationssatz) *Das Konvergenzverhalten der* FOURIER-*Reihe zu f an einer Stelle x hängt nur von den Werten von f in einer beliebig kleinen Umgebung von x ab, d.h. genauer:*
Ist für $\delta > 0$

$$g(t) := \begin{cases} f(t) & \text{für } x - \delta \le t \le x + \delta, \\ 0 & \text{sonst,} \end{cases}$$

so konvergieren an der Stelle x entweder die beiden FOURIER-*Reihen zu f und zu g und dann gegen denselben Wert, oder es konvergiert keine an der Stelle x.*

Beweis: Für die Partialsummen S_n zu f und T_n zu g gilt nach Satz I.68

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin((n+\frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{1}{2}u)} \big(f(x+u) + f(x-u)\big) du,$$
$$T_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^\pi \frac{\sin((n+\frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{1}{2}u)} \big(g(x+u) + g(x-u)\big) du.$$

Nach Definition von g ist dann

$$S_n(x) - T_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_\delta^\pi \frac{\sin((n+\frac{1}{2})u)}{\sin(\frac{1}{2}u)} \big(f(x+u) + f(x-u)\big) du.$$

Nun ist $\sin((n+\frac{1}{2})u) = \frac{1}{2i}\left(e^{i(n+\frac{1}{2})u} - e^{-i(n+\frac{1}{2})u}\right)$, sodaß wir die Situation des RIEMANN-LEBESGUE-Satzes haben, was $S_n(x) - T_n(x) \to 0$ bedeutet. □

Baut man dies aus, so bekommt man etwa das folgende Ergebnis:

Satz I.71 *Zu der 2π-periodischen Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ gebe es Stellen $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 2\pi$, sodaß in jedem Teilintervall (t_j, t_{j+1}) f stetig differenzierbar ist und zudem die einseitigen Grenzwerte der Ableitung an den Punkten t_j jeweils existieren. An den Stellen t_j kann f Sprünge haben.*
Dann konvergiert die FOURIER-*Reihe überall punktweise, in jedem abgeschlossenen Intervall $[\alpha, \beta] \subset (t_j, t_{j+1})$ gleichmäßig gegen f und in den kritischen Punkten t_j gegen den Mittelwert*

$$\frac{1}{2}\big(f(t_j-) + f(t_j+)\big)$$

aus den beiden einseitigen Grenzwerten der Funktion f bei t_j.