MI Integralrechnung im $\mathbb{R}^n$

Der im folgenden behandelte Integralbegriff erweitert auf einfache Weise das schon über $\mathbb{R}$ betrachtete RIEMANN-Integral auf den mehrdimensionalen Fall. Er ist geeignet, solange man sich mit gutartigen Funktionen auf gutartigen Definitionsbereichen beschäftigt, wie sie häufig in den Anwendungen vorliegen. Er reicht jedoch nicht aus, um etwa eine zufriedenstellende Theorie schon der klassischen in der Physik vorkommenden partiellen Differentialgleichungen zu gewinnen. Hier benötigt man den weiterführenden Integralbegriff von LEBESGUE, der etwa in dem Buch von O. FORSTER, Analysis 3 dargestellt ist. Ebenso werden allgemeinere Integralbegriffe in der Statistik benötigt.
Die folgende Darstellung ist stark an FISCHER/KAUL, Mathematik für Physiker orientiert.

Das Integral von Treppenfunktionen

Zu eigentlichen, d.h. beschränkten Intervallen $I_k \subset \mathbb{R}$ mit den Grenzen $a_k \leq b_k$ setzen wir

$$I := I_1 \times \ldots \times I_n := \{x = (x_1, \ldots, x_n) \,\big|\, x_k \in I_k, k = 1, ..., n\}$$

und nennen dies das kartesische Produkt der Intervalle $I_1, ..., I_n$, was hier als "n - dimensionales Intervall" oder "n-dimensionaler Quader" bezeichnet wird. Die hierbei benutzten eindimensionalen Intervalle I_k können keinen, einen oder beide Eckpunkte enthalten.
Ein solcher Quader $I = I_1 \times \ldots \times I_n$ ist genau dann kompakt, wenn sämtliche I_k kompakte Intervalle sind, d.h. hier also jeweils beide Randpunkte enthalten, sein Inneres besteht genau aus dem kartesischen Produkt der offenen Intervalle $\mathring{I}_k$.
Der Durchschnitt von zwei Quadern ist wieder ein Quader, die nicht zum Durchschnitt gehörenden Teile der einzelnen Quader sind aber i.a. keine Quader mehr. Man kann sie aber wieder in Quader zerschneiden:

Satz MI.1 *Sind $I_1, ..., I_m \subset \mathbb{R}^n$ kompakte Quader, so gibt es kompakte Quader $J_1, ..., J_p \subset \mathbb{R}^n$ mit paarweise disjunktem Inneren, d.h.*

$$\mathring{J}_i \cap \mathring{J}_j = \emptyset \quad (i \neq j),$$

sodaß

$$I_1 \cup ... \cup I_m = J_1 \cup ... \cup J_p.$$

Wir nennen $J_1, ..., J_p$ eine "Rasterung" der $I_1, ..., I_m$.

Beweis: In dem Fall $n = 2$ sind die Quader sämtlich Rechtecke. Deren Seitenlinien ziehe man zu Geraden aus. So entsteht eine Rasterung der gesamten Ebene, die dann alle I_k in kleinere Rechtecke "zerschneidet". Die entstehenden Teile nehmen wir als die J - Rechtecke.
Dieses Vorgehen läßt sich direkt auf höhere Dimensionen verallgemeinern. □

Für einen n-Quader I bezeichne

$$\chi_I(x) := \begin{cases} 1 & x \in I \\ 0 & x \notin I \end{cases}$$

die charakteristische Funktion des Quaders I. Mit dem kartesischen Produkt besteht hier offenbar folgender - später wichtig werdender - Zusammenhang.

Satz MI.2 *Zu Quadern $I \subset \mathbb{R}^p$, $J \subset \mathbb{R}^q$, $Q := I \times J \subset \mathbb{R}^{p+q}$ ist*

$$\chi_Q(x,y) = \chi_{I\times J}(x,y) = \chi_I(x) \cdot \chi_J(y) \quad (x \in \mathbb{R}^p, y \in \mathbb{R}^q).$$

Definition MI.3 *Sind $I_1, ..., I_m \subset \mathbb{R}^n$ je n-dimensionale Quader, so heißt jede Linearkombination*

$$\varphi := \sum_{i=1}^{m} \alpha_i \chi_{I_i}$$

ihrer charakteristischen Funktionen mit reellen Koeffizienten α_i eine "Treppenfunktion".
Liegen alle $I_1, ..., I_m$ in einem festen kompakten Quader I, so heißt φ eine Treppenfunktion auf I. Wir notieren dafür $\varphi \in T(I)$.
Zwei Treppenfunktionen φ, ψ heißen "äquivalent", geschrieben $\varphi = \psi$ f.ü. (d.h. fast überall), wenn sie sich höchstens auf Quaderrändern unterscheiden.

Überlegen Sie selbst die folgenden Eigenschaften von Treppenfunktionen.

Satz MI.4

1. *Jeder Treppenfunktion kann man via Rasterung eine äquivalente Darstellung mittels paarweise disjunkter Quader geben. Man nennt dies eine "disjunkte Darstellung".*
2. *Zu je zwei Treppenfunktionen gibt es eine Darstellung, die für beide dieselben charakteristischen Funktionen benutzt. (Benutze Rasterung!)*
3. *Summe, Linearkombinationen und Produkt von Treppenfunktionen sind wieder Treppenfunktionen. Sind alle beteiligten Funktionen Treppenfunktionen auf einem Quader I, so auch das Ergebnis der jeweiligen Operation.*
4. *Zu jeder Treppenfunktion gibt es eine äquivalente, die auf allen Quaderrändern den Wert 0 hat. (Man arbeite mit dem Inneren $\overset{\circ}{I}_k$ der Quader.)*

Insbesondere haben wir damit

Satz MI.5 *Die Treppenfunktionen auf einem kompakten Quader I bilden einen linearen Raum, auf dem mit*

$$|\varphi|_\infty := \max\{|\varphi(x)| \,\big|\, x \in I\}$$

eine Norm gegeben ist.

Zu einem Intervall $I_k \subset \mathbb{R}^1$ mit Eckpunkten $a_k \leq b_k$ heißt $V(I_k) := b_k - a_k$ die "Länge" oder das (eindimensionale) "Volumen" des Intervalls. Für einen n-dimensionalen Quader $I = I_1 \times ... \times I_n$ sei

$$V(I) := (b_1 - a_1) \cdot ... \cdot (b_n - a_n) = V(I_1) \cdot ... \cdot V(I_n)$$

das Volumen von I. Offenbar ist für beliebige Quader I, J dann

$$V(I \times J) = V(I) \cdot V(J).$$

Das Volumen ist translationsinvariant, d.h. es ändert sich nicht, wenn man den ganzen Quader verschiebt. Ferner ist das Volumen $V(I)$ stets positiv, es sei denn, daß der Quader entartet, d.h. daß wenigstens ein Seiten-Intervall nur aus einem Punkt besteht.

Definition MI.6 *Zu einer Treppenfunktion $\varphi \in T(I)$ in disjunkter Darstellung*

$$\varphi = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k \chi_{I_k}$$

sei

$$\int_I \varphi(x) d^n x := \int_I \varphi := \sum_{k=1}^{m} \alpha_k V(I_k)$$

das "Integral" von φ über I.
Zu einem Quader $J \subset I$ setzen wir

$$\int_J \varphi(x) d^n x := \int_J \varphi := \int_I (\varphi \cdot \chi_J)$$

Bei dieser Definition spielt es keine Rolle, ob wir einem Quader I_k einen Rand ganz, teilweise oder garnicht zurechnen. Dies führt zu

Satz MI.7 *1. Zum Integral einer Treppenfunktion liefern die Funktionswerte auf den Quaderrändern keinen Beitrag.*

2. Äquivalente Treppenfunktionen haben dieselben Integrale.

3. Das Integral einer Treppenfunktion ist unabhängig von der gewählten Darstellung.

Das so definierte Integral für Treppenfunktionen hat eine Reihe von Eigenschaften, die wir schon von der eindimensionalen Integration kennen und die uns bei den kommenden Verallgemeinerungen des Integralbegriffs erhalten bleiben werden:

Satz MI.8 *1. Es ist* $\int_I (\alpha\varphi + \beta\psi) = \alpha \int_I \varphi + \beta \int_I \psi$. *(Linearität)*

2. Ist $\varphi \geq 0$ f.ü., so ist $\int_I \varphi \geq 0$. (Positivität)

3. Ist $\varphi \leq \psi$ f.ü., so ist $\int_I \varphi \leq \int_I \psi$. (Monotonie)

4. Mit der in Satz MI.5 eingeführten Norm $|\varphi|_\infty$ ist

$$\left| \int_I \varphi \right| \leq \int_I |\varphi(x)| d^n x \leq |\varphi|_\infty \cdot V(I). \quad \textit{(Stetigkeit)}$$

5. Für jede Zerlegung eines Quaders I in $I = \bigcup_{k=1}^m I_k$ mit $\mathring{I}_i \cap \mathring{I}_j = \emptyset$ für $i \neq j$ und jede Treppenfunktion φ auf I ist

$$\int_I \varphi = \sum_k \int_{I_k} \varphi.$$

Beweis: Zu 1.: Gibt man φ und ψ eine gemeinsame Darstellung, so kann man die Behauptung direkt aus der Definition des Integrals ablesen.
Zu 2.: Es sei $\varphi = \sum \alpha_k \chi_{I_k}$ disjunkt dargestellt und dabei seien alle I_k nicht ausgeartet. Dann ist $\varphi \geq 0$ f.ü. genau, wenn alle $\alpha_k \geq 0$, woraus man die Behauptung abliest.
Zu 3.: Dies folgt aus dem vorigen für die Treppenfunktion $\psi - \varphi$.
Zu 4.: Bei disjunkter Darstellung $\varphi = \sum \alpha_k \chi_{I_k}$ ist $|\varphi|_\infty = \max\limits_k |\alpha_k|$ und damit

$$\left| \int_I \varphi \right| = \left| \sum \alpha_k V(I_k) \right| \leq \sum |\alpha_k| V(I_k) \leq |\varphi|_\infty \cdot \sum V(I_k) = |\varphi|_\infty \cdot V(I).$$

Zu 5.:Man nehme eine Rasterung aus den I_k und den bei der Darstellung von φ benutzten Quadern und stelle φ damit dar. Dann folgt die Behauptung direkt aus der Definition des Integrals. $\square$

Die bisher betrachteten Eigenschaften des Integrals einer Treppenfunktion sind für den eindimensionalen Fall wohlbekannt. Einen neuen Aspekt bringt die folgende, erst im mehrdimensionalen Fall auftretende Situation.
Wir hatten schon oben für $n = p + q$ den $\mathbb{R}^n$ aufgefaßt als $\mathbb{R}^n = \mathbb{R}^p \times \mathbb{R}^q$ und entsprechend Elemente zerlegt in

$$z = (z_1, ..., z_n) = (x_1, ..., x_p, y_1, ..., y_q) = (x, y).$$

Für kompakte (mehrdimensionale) Intervalle $I \subset \mathbb{R}^p, J \subset \mathbb{R}^q$ ist dann $I \times J$ ein kompaktes Intervall in $\mathbb{R}^n$ und nach Satz MI.2 gilt für die charakteristischen Funktionen

$$\chi_{I\times J}(x, y) = \chi_I(x) \cdot \chi_J(y).$$

Dies kann man auf Treppenfunktionen erweitern und dann deren Integral "sukzessive" berechnen.

Satz MI.9 *Es seien $I \subset \mathbb{R}^p, J \subset \mathbb{R}^q$ kompakte Intervalle, φ eine Treppenfunktion auf $I \times J$. Dann gelten*

1. *Für jedes $x \in I$ ist die Abbildung*

$$J \ni y \mapsto \varphi(x, y)$$

eine Treppenfunktion auf J.

2. $$\psi(x) := \int_J \varphi(x, y) d^q y$$

ist Treppenfunktion auf I.

3. *Es ist*

$$\int_{I\times J} \varphi(z) d^{p+q} z = \int_I \psi(x) d^p x = \int_I \left(\int_J \varphi(x, y) d^q y \right) d^p x.$$

Beweis: Jeder in der Darstellung von φ vorkommende Quader $Q \subset \mathbb{R}^{p+q}$ besitzt trivialerweise eine Darstellung als $Q = I' \times J'$ mit p- bzw. q-dimensionalen Intervallen $I' \subset I, J' \subset J$. Alle so auftretenden I', J' erzeugen Rasterungen $I = \bigcup I_i, J = \bigcup J_j$. Damit hat dann φ eine Darstellung als

$$\varphi(x, y) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \chi_{I_i \times J_j}(x, y) = \sum_{i,j} \alpha_{ij} \chi_{I_i}(x) \cdot \chi_{J_j}(y).$$

Für festes $x \in I$ ist dann

$$\varphi(x, y) = \sum_j \big(\sum_i \alpha_{ij} \chi_{I_i}(x) \big) \cdot \chi_{J_j}(y)$$

eine Treppenfunktion (bezüglich y) auf J. Ihr Integral ist definitionsgemäß

$$\psi(x) := \int_J \varphi(x, y) d^q y = \sum_j \left(\sum_i \alpha_{ij} \chi_{I_i}(x) \right) \cdot V(J_j) = \sum_i \left(\sum_j \alpha_{ij} V(J_j) \right) \cdot \chi_{I_i}(x),$$

somit wieder eine Treppenfunktion auf I. Deren Integral ist dann

$$\begin{aligned}\int_I \psi(x)d^p x &= \int_I \left(\int_J \varphi(x,y)d^q y\right) d^p x \\ &= \sum_i \big(\sum_j \alpha_{ij} V(J_j)\big) \cdot V(I_i) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_{ij} V(I_i) \cdot V(J_j) \\ &= \sum_{i,j} \alpha_{ij} V(I_i \times J_j) \\ &= \int_{I\times J} \sum_{i,j} \alpha_{ij} \chi_{I_i \times J_j} = \int_{I\times J} \varphi(z) d^{p+q} z.\end{aligned}$$

□

Das Integral stetiger Funktionen auf kompakten Quadern

Wir wollen jetzt diesen Integralbegriff auf allgemeinere Funktionen ausdehnen.
Ist eine Funktion auf einem kompakten Quader I beschränkt, so gibt es eine Konstante C, mit der $|f(x)| < C$ auf I, womit dann auch

$$-C\chi_I \leq f \leq C\chi_I.$$

Es gibt also Treppenfunktionen, die auf I stets unter ("Unterfunktionen") bzw. stets über ("Oberfunktionen") f liegen.

Definition MI.10 *Zu einer auf einem kompakten Quader $I \subset \mathbb{R}^n$ beschränkten Funktion f seien*

$$\begin{aligned}\int_I^* f(x)d^n x &:= \inf\left\{\int_I \psi \mid \psi \in T(I), \psi \geq f\right\} \\ \int_{*I} f(x)d^n x &:= \sup\left\{\int_I \varphi \mid \varphi \in T(I), \varphi \leq f\right\}\end{aligned}$$

"Ober- bzw. Unterintegral". Stimmen beide überein, so heißt f RIEMANN-integrierbar über I und der gemeinsame Wert heißt RIEMANN-Integral:

$$\int_I f := \int_I f(x)d^n x := \int_{*I} f(x)d^n x = \int_I^* f(x)d^n x.$$

Wir benutzen auch Notationen wie folgende: Für $I := [a_1, b_1] \times [a_2, b_2] \subset \mathbb{R}^2$ notiert man für das Integral auch

$$\int_I f(z)d^2 z = \int_{a_2}^{b_2} \int_{a_1}^{b_1} f(x,y)dxdy$$

und analog für drei und mehr Dimensionen.

Dieses Integral hat folgende Eigenschaften

Satz MI.11 *Sind f, g über I integrierbar, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, so gelten:*

1. *Auch $\alpha f + \beta g$ ist integrierbar und $\int_I(\alpha f + \beta g) = \alpha \int_I f + \beta \int_I g$.* *(Linearität)*
2. *Ist $f \geq 0$, so ist $\int_I f \geq 0$.* *(Positivität)*

3. *Ist $f \leq g$, so ist $\int_I f \leq \int_I g$. (Monotonie)*
4. *Mit f ist auch die Funktion $x \mapsto |f(x)|$ integrierbar und*

$$\Big|\int_I f(x)d^n x\Big| \leq \int_I |f(x)|d^n x \leq |f|_\infty \cdot V(I). \quad \textit{(Stetigkeit)}$$

5. *Für jede Zerlegung $I = \bigcup_{j=1}^m I_j$ eines kompakten Quaders I in kompakte Quader I_j mit disjunktem Inneren, d.h. mit $\mathring{I}_i \cap \mathring{I}_j = \emptyset \quad (i \neq j)$ ist*

$$\int_I f(x)d^n x = \sum_{j=1}^m \int_{I_j} f(x)d^n x.$$

Beweis: Diese Aussagen hatten wir in Satz MI.8 für Treppenfunktionen bewiesen. Sie gelten somit für Ober- und Unterfunktionen, woraus man sie leicht auf die RIEMANN-Integrale übertragen kann. □

Damit bekommen wir insbesondere folgenden wichtigen

Konvergenzsatz MI.12 *Ist $I \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader und (f_k) eine Folge von über I integrierbaren Funktionen, die auf I **gleichmäßig** gegen eine Grenzfunktion f konvergiert, so ist auch f integrierbar und es gilt*

$$\int_I f = \lim_{k\to\infty} \int_I f_k.$$

Beweis: Wähle $\epsilon > 0$, dazu k, sodaß $|f - f_k|_\infty < \epsilon$ und zu f_k eine Oberfunktion ψ_k und eine Unterfunktion φ_k, sodaß

$$\Big(\int_I f_k\Big) - \epsilon < \int_I \varphi_k \leq \int_I f_k \leq \int_I \psi_k < \Big(\int_I f_k\Big) + \epsilon.$$

Damit ist dann für jedes $x \in I$ auch

$$\varphi_k(x) - \epsilon \leq f_k(x) - \epsilon < f(x) < f_k(x) + \epsilon \leq \psi_k(x) + \epsilon.$$

Somit sind $\varphi_k - \epsilon$ und $\psi_k + \epsilon$ Unter- bzw. Oberfunktion von f, wobei noch

$$\int_I \big(\psi_k + \epsilon\chi_I\big) - \int_I \big(\varphi_k - \epsilon\chi_I\big) \leq 2\epsilon + 2\epsilon \int_I \chi_I = 2\epsilon + 2\epsilon V(I)$$

ist. Folglich liegen Ober- und Unterintegral von f beliebig nahe beieinander, sind also gleich, sodaß f integrierbar ist. Dann ist aber auch

$$\Big|\int_I f - \int_I f_k\Big| = \Big|\int_I \big(f - f_k\big)\Big| \leq |f - f_k|_\infty V(I)$$

und dies geht wegen der gleichmäßigen Konvergenz gegen Null. □

Hiermit bekommen wir etwa die Integrabilität stetiger Funktionen:

Satz MI.13 *Es sei $I \subset \mathbb{R}^n$ ein kompakter Quader, $f : I \to \mathbb{R}$ stetig. Dann gibt es zu jedem $\epsilon > 0$ eine Treppenfunktion φ auf I, für die $|\varphi(x) - f(x)| < \epsilon$ für alle $x \in I$ ist.*
Insbesondere ist damit jede auf I stetige Funktion auch Grenzfunktion einer gleichmäßig konvergenten Folge von Treppenfunktionen und damit über I integrierbar.

Beweis: Nach Definition K.30 ist f auf dem Kompaktum I sogar gleichmäßig stetig, d.h. zu $\epsilon > 0$ existiert ein $\delta > 0$, sodaß für alle $x, x' \in I$ mit $|x - x'|_\infty < \delta$ gilt, daß $|f(x) - f(x')| < \epsilon$. Legen wir nun über I ein Raster mit Quadern I_k von der Seitenlänge δ und bezeichnen wir deren Mittelpunkte je mit x_k, so gilt für jedes $x \in I_k$ dann $|x - x_k|_\infty < \delta$ und damit $|f(x) - f(x_k)| < \epsilon$. Die Treppenfunktion

$$\varphi := \sum_k f(x_k)\chi_{I_k}$$

leistet damit das Gewünschte. □

Als nächstes übertragen wir das Prinzip der sukzessiven Integration aus Satz MI.9 auf stetige Funktionen.

Satz MI.14 *Es seien $I \subset \mathbb{R}^p, J \subset \mathbb{R}^q$ kompakte Intervalle, $f \in C(I \times J)$, d.h. stetig. Dann gelten*

1. *Die Funktion*
$$F(x) := \int_J f(x,y)d^q y$$
ist stetig auf I.
2. *Existiert die partielle Ableitung $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)$ $(1 \le i \le p)$ auf $I \times J$ und ist sie dort stetig, so besitzt auch F auf I eine stetige partielle Ableitung nach x_i und es ist*
$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_J \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)d^q y.$$
3. *Es ist*
$$\int_{I\times J} f(x,y)d^p x\, d^q y = \int_I F(x)\, d^p x = \int_I \left(\int_J f(x,y)d^q y \right) d^p x.$$

Beweis: Zu 1.: Nach Definition K.30 ist f auf $I \times J$ gleichmäßig stetig. Damit gibt es zu $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$, sodaß insbesondere $|f(x,y) - f(x_0,y)| < \epsilon$ wenn $|x - x_0| < \delta$ und dies gleichmäßig für alle y. Damit ist dann

$$|F(x) - F(x_0)| \le \int_J |f(x,y) - f(x_0,y)|d^q y < \epsilon V(J),$$

was die Stetigkeit zeigt.
Zu 2.: Für die Aussage über die Ableitungen nutzen wir einmal wieder die gleichmäßige Stetigkeit von $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)$ auf $I \times J$, ferner den Mittelwertsatz. Die gleichmäßige Stetigkeit liefert: Zu $\epsilon > 0$ gibt es $\delta > 0$, sodaß

$$\left|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y) - \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0,y)\right| < \epsilon \text{ für } |x - x_0| < \delta.$$

Ferner ist nach dem Mittelwertsatz für $x = x_0 + te_i$

$$\frac{F(x_0 + te_i) - F(x_0)}{t} = \int_J \left(\frac{f(x_0 + te_i, y) - f(x_0,y)}{t} \right) d^q y = \int_J \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + \tau e_i, y)d^q y,$$

wobei $\tau = \tau(x_0, y, t)$ zwischen 0 und t liegt.
Dann ist

$$\begin{aligned}
&\left|\frac{F(x_0 + te_i) - F(x_0)}{t} - \int_J \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0,y)d^q y\right| \\
&\qquad = \left| \int_J \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0 + \tau e_i, y)d^q y - \int_J \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0,y)d^q y\right| < \epsilon V(J),
\end{aligned}$$

wenn nur $|t| < \delta$ ist.
Zu 3.: Nach Teil 1. ist $F(x) := \int_J f(x,y)d^qy$ stetig auf I, somit das rechts stehende Integral sinnvoll.
Nach Satz MI.13 gibt es zu jedem $k \in \mathbb{N}$ Treppenfunktionen φ_k auf $I \times J$ mit $|f - \varphi_k|_\infty < \frac{1}{k}$. Dafür gilt dann nach Konvergenzsatz MI.12 auch

$$\int_{I\times J} \varphi_k(x,y)d^px\,d^qy \to \int_{I\times J} f(x,y)d^px\,d^qy \quad (k\to\infty).$$

Auf die Treppenfunktionen φ_k können wir Satz MI.9 anwenden, wobei noch mit den Treppenfunktionen

$$\psi_k(x) := \int_J \varphi_k(x,y)d^qy$$

gilt, daß

$$\int_{I\times J} \varphi_k(x,y)d^px\,d^qy = \int_I \Big(\int_J \varphi_k(x,y)d^qy\Big)d^px = \int_I \psi_k(x)d^px.$$

Nun ist für $x \in I$

$$|F(x) - \psi_k(x)| = \Big|\int_J \big(f(x,y) - \varphi_k(x,y)\big)d^qy\Big| \le \frac{1}{k}V(J).$$

Somit konvergiert die Folge der ψ_k gleichmäßig auf I gegen F, sodaß mit Konvergenzsatz MI.12 dann auch

$$\int_I \psi_k(x)d^px \to \int_I F(x)d^px = \int_I \Big(\int_J f(x,y)d^qy\Big)d^px.$$

Für die linke Seite haben wir aber, wie oben abgeleitet,

$$\int_I \psi_k(x)d^px = \int_{I\times J} \varphi_k(x,y)d^px\,d^qy \to \int_{I\times J} f(x,y)d^px\,d^qy \quad (k\to\infty).$$

Da beide Grenzwerte notwendig übereinstimmen, ist unser Satz gezeigt. □

Bei diesem Satz hätten wir genauso gut erst nach x und dann nach y integrieren können, mit demselben Ergebnis. Ferner ist dieser Satz natürlich insbesondere anwendbar, wenn $q = 1$, d.h. $J \subset \mathbb{R}^1$ ein gewöhnliches Intervall $[a,b]$ ist, und schließlich kann man ihn auch noch rekursiv anwenden. Dies führt zu folgender Version:

Satz MI.15 *Für den kompakten Quader $I = [a_1,b_1]\times\ldots\times[a_n,b_n]$ und auf I stetiger Funktion f gilt*

$$\int_I f(x)d^nx = \int_{a_1}^{b_1}\Big(\int_{a_2}^{b_2}\ldots\Big(\int_{a_n}^{b_n} f(x_1,x_2,\ldots,x_n)dx_n\Big)\ldots dx_2\Big)dx_1,$$

d.h. dieses Integral kann durch Hintereinanderausführen von n gewöhnlichen Integrationen berechnet werden. Dabei kommt es nicht auf die Reihenfolge der Variablen an.

Das Integral stetiger Funktionen auf offenen Mengen

Wir kennen jetzt das Integral von Treppenfunktionen und das Integral von stetigen Funktionen über (achsenparallelen) kompakten Quadern. Was es aber heißt, eine stetige Funktion f über einen krummlinig begrenzten Bereich $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, etwa einer offenen Kreisscheibe im $\mathbb{R}^2$, vielleicht sogar mit einem “Loch” oder auch über den ganzen $\mathbb{R}^n$ zu integrieren, haben wir noch nicht erklärt.

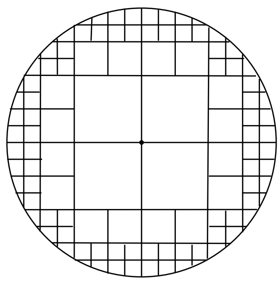
Die Grundidee hierzu ist, die Menge Ω durch abzählbar unendlich viele Quader "auszuschöpfen" und über die Integrale von f auf diesen Quadern das Integral zu definieren.
Zu dieser Ausschöpfung notieren wir

Satz MI.16 *Zu jeder nichtleeren, offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ gibt es eine Folge $I_1, I_2, \dots$ von kompakten Quadern mit disjunktem Inneren, sodaß*

1. $\Omega = \bigcup_{k=1}^{\infty} I_k$ *und*
2. *jede kompakte Menge $K \subset \Omega$ schon von endlich vielen dieser Quader überdeckt wird.*

Wir nennen eine solche Folge eine "Quaderzerlegung" von Ω.

Beweis: Die wesentlichen Schritte kann man schon im Falle $n = 2$, also in der Ebene studieren.



Wir überziehen zunächst die Ebene mit einem achsenparallelen Netz von Quadraten mit Seitenlänge 1 und verfeinern dies durch Unterteilen zu Netzen von Quadraten mit Seitenlänge $\frac{1}{2}$, dann mit Seitenlänge $\frac{1}{4}$ etc. Ein solches Quadrat mit Seitenlänge 2^{-m} sei Quadrat m-ter Stufe genannt. Unsere I_k wählen wir nun aus diesen Quadraten. Zuerst nimmt man alle Quadrate 0-ter Stufe, die in Ω liegen. Ihre Vereinigung sei K_0. (Evtl. ist das noch leer.) Dann nehme man alle Quadrate 1-ter Stufe, die in Ω aber nicht in K_0 liegen. Deren Vereinigung sei K_1. Dann nehmen man alle Quadrate 2-ter Stufe, die in Ω aber nicht in K_1 liegen, und so fort[1]. Von jeder Stufe bekommen wir nur endlich viele Quadrate, sodaß wir insgesamt nur abzählbar viele erhalten. Nach Konstruktion ist trivialerweise

$$\bigcup_k I_k = \bigcup_m K_m \subset \Omega.$$

Diese Quadrate überdecken aber sogar ganz Ω. Denn da Ω offen ist, gibt es zu jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ ein $r > 0$, sodaß das Quadrat $Q(r)$ mit Mittelpunkt x_0 und Seitenlänge $2r$ ganz in Ω liegt. Für $2^{-m} < r$ liegt dann aber das x_0 enthaltende Quadrat m-ter Stufe ganz in $Q(r)$, somit in Ω. Spätestens nach dem m-ten Auswahlschritt liegt also das gegebene x_0 in $\bigcup_{j=0}^{m} K_j$.
Die so gewonnene Quaderzerlegung von Ω erfüllt aber auch die zweite Forderung. Ist nämlich $K \subset \Omega$ kompakt, so hat die Distanzfunktion

$$\delta(x) := \operatorname{dist}(x, \mathbb{R}^2 \setminus \Omega) := \inf\{|x - y|_\infty \mid y \in \mathbb{R}^2 \setminus \Omega\}$$

auf dem Kompaktum K ein positives Minimum, d.h. es existiert ein $r > 0$, sodaß $\delta(x) \geq r$ für alle $x \in K$ ist. Dann liegt für jeden Punkt x_0 das schon oben benutzte Quadrat $Q(r)$ um x_0 noch ganz in Ω und wie oben schließt man, daß schon die

[1] Ist Ω nicht beschränkt, so nehme man beim m-ten Schritt jeweils nur solche Quadrate, die auch noch in einem Kreis vom Radius 2^m um den Nullpunkt liegen!

Quadrate der Stufen $\leq m$ ausreichen um K zu überdecken. Als Kompaktum ist K beschränkt, somit genügen schon endlich viele dieser Quadrate. □

Das Integral einer stetigen Funktion f über einer offenen Menge Ω definieren wir nun durch Grenzprozesse über solche Quaderzerlegungen. Für je endlich viele solche Quader I_k ist dann das Integral

$$\int_{\bigcup_k I_k} f(x) d^n x = \sum_k \int_{I_k} f(x) d^n x$$

definiert, aber für $k \to \infty$ braucht dies nicht zu konvergieren. Deshalb müssen wir etwas vorsichtig sein.

Definition und Satz MI.17 *Es sei f stetig auf der offenen Menge $\Omega \subset \mathbb{R}^n$. Dann heißt f integrierbar über Ω, wenn es eine Konstante C gibt, sodaß für je endlich viele kompakte Quader $I_k \subset \Omega$ mit disjunktem Inneren gilt*

$$\sum_k \int_{I_k} |f(x)| d^n x \leq C.$$

Ist f über Ω integrierbar und $(I_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Quaderzerlegung von Ω, so sind

$$\sum_k \int_{I_k} |f(x)| d^n x \quad \text{und} \quad \sum_k \int_{I_k} f(x) d^n x$$

konvergent und unabhängig von der gewählten Quaderzerlegung. Wir setzen damit

$$\int_\Omega f := \int_\Omega f(x) d^n x := \sum_{k=0}^{\infty} \int_{I_k} f(x) d^n x.$$

WARNUNG! MI.18 *Für unbeschränkte Mengen Ω braucht die Integrierbarkeitsbedingung nichteinmal für konstante Funktionen erfüllt zu sein!*

Beweis: Die Integrierbarkeitsbedingung ist so gemacht, daß für jede Quaderzerlegung (I_k) die monoton wachsende Folge der Partialsummen $\sum_{k=0}^{m} \int_{I_k} |f(x)|\, d^n x$ beschränkt ist und somit konvergent. Wegen

$$\Big| \sum_{k=m}^{m'} \int_{I_k} f(x)\, d^n x \Big| \leq \sum_{k=m}^{m'} \int_{I_k} |f(x)|\, d^n x$$

ist dann auch die Summe $\sum_k \int_{I_k} f(x) d^n x$ konvergent. Die Unabhängigkeit von der Quaderzerlegung beweist man über gemeinsame Verfeinerungen. □

Ist I ein kompakter Quader, f stetig auf I, so haben wir $\int f$ nach der alten Definition und das Integral von f über die offene Menge $\mathring{I}$, dem Inneren von I. Die Definitionen sind aber so gemacht, daß beide Integrale übereinstimmen. Somit ist der neue Intergralbegriff eine Erweiterung des alten.

Satz MI.19 *Für dieses erweiterte Integral gelten:*

1. *Die in Satz MI.11 notierten Eigenschaften der Linearität und Monotonie gelten weiterhin. Ferner ist mit f auch die Funktion $x \mapsto |f(x)|$ integrierbar und es gilt die Abschätzung*

$$\Big| \int_\Omega f(x)\, d^n x \Big| \leq \int_\Omega |f(x)|\, d^n x.$$

2. *Es gilt das Majorantenkriterium: Sind $f, g : \Omega \to \mathbb{R}$ stetig, $|f(x)| \leq g(x)$ auf Ω und g integrierbar über Ω, so ist auch f integrierbar über Ω.*

Beweis: Die Aussage 1. sei als Übung gelassen.
Zu 2.: Wegen $|g(x)| = g(x)$ gilt auf jedem Quader I_k

$$\int_{I_k} |f(x)|\, d^n x \leq \int_{I_k} g(x)\, d^n x \leq \int_{I_k} |g(x)|\, d^n x,$$

sodaß die Integrabilität von g die von f nach sich zieht. □

Schließlich ist dieses neugewonnene Integral wieder additiv bezüglich der Integrationsbereiche.

Satz MI.20 *Sind $\Omega_1, \Omega_2, \ldots$ endlich oder abzählbar viele disjunkte offene Mengen, so ist $\Omega := \bigcup_i \Omega_i$ selbst offen. Eine auf Ω stetige Funktion f ist genau dann über Ω integrierbar, wenn gelten*

1. *f ist über jedem Ω_i integrierbar und*
2. *die Reihe $\sum_i \int_{\Omega_i} |f(x)|\, d^n x$ konvergiert.*

Es ist dann

$$\int_\Omega f = \sum_i \int_{\Omega_i} f.$$

Beweis: Quaderzerlegungen der einzelnen Ω_i geben zusammengenommen eine Quaderzerlegung von Ω und da die im Integrabilitätskriterium auftretenden Summen $\sum_k \int_{I_k} |f|$ stets nichtnegative Glieder haben, gibt es keine Umordnungsprobleme. □

Ein für praktische Anwendungen wichtiges Resultat ist

Satz MI.21 *Eine auf einer **beschränkten** offenen Menge Ω stetige und dort **beschränkte** Funktion f ist integrierbar.*

Beweis: Da Ω beschränkt ist, gibt es einen kompakten Quader I, der Ω enthält. Dann ist insbesondere für je endlich viele Quader $I_k \subset \Omega$ mit disjunktem Innerem stets

$$\sum_k V(I_k) \leq V(I)$$

und mit der Beschränktheit von f bekommen wir

$$\sum_k \int_{I_k} |f| \leq \sum_k C \cdot V(I_k) \leq C \cdot V(I).$$

Dabei ist die rechts stehende Größe unabhängig von den gewählten I_k, was die Integrierbarkeit zeigt. □

Das oben genannte Problem, eine schöne Funktion über eine Kreisscheibe zu integrieren, ist jetzt also prinzipiell gelöst, wir haben aber noch kein Werkzeug, dies auszuführen. Wir brauchen dafür wieder die Möglichkeit, sukzessive zu integrieren, d.h. insbesondere Verallgemeinerungen von Satz MI.14, und Satz MI.15 und noch etwas mehr.

Beim Beweis dieser Sätze hatten wir davon massiv Gebrauch gemacht, daß

- f gleichmäßig stetig ist und daß
- der Intergrationsbereich I beschränkt ist.

Beides braucht jetzt nicht mehr zu gelten, d.h. wir haben vorsichtig zu sein. Und in der Tat können wir solche Verallgemeinerungen unserer Sätze nur bekommen, wenn wir geeignete Zusatzvoraussetzungen einbauen.
Wir bekommen als Gegenstück zu Satz MI.14:

Satz MI.22 *Es seien $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^p, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^q$ offen, $f : \Omega_1 \times \Omega_2 \to \mathbb{R}$, stetig. Zu jedem kompakten Quader $I \subset \Omega_1$ gebe es eine integrierbare "Majorante", d.h. eine integrierbare, stetige Funktion $g_I : \Omega_2 \to \mathbb{R}$, mit der*

$$|f(x,y)| \leq g_I(y) \quad \text{für alle } (x,y) \in I \times \Omega_2. \tag{1}$$

Dann gelten

1. *Die Funktion*
$$F(x) := \int_{\Omega_2} f(x,y) d^q y$$
ist stetig auf Ω_1.
2. *Unter der Bedingung (1) existiert auch für alle $x \in \Omega_1$ das Integral*
$$G(x) := \int_{\Omega_2} |f(x,y)| d^q y$$
und ist ein stetige Funktion. Ist diese Funktion G selbst integrierbar über Ω_1, so ist F integrierbar über Ω_1 und
$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f(z) d^{p+q} z = \int_{\Omega_1} F(x) d^p x = \int_{\Omega_1} \left(\int_{\Omega_2} f(x,y) d^q y \right) d^p x.$$
3. *Ist f sogar auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ nach x stetig differenzierbar und gibt es zu jedem Kompaktum $K \subset \Omega_1$ eine integrierbare stetige Funktion $h_K : \Omega_2 \to \mathbb{R}$, mit der*
$$|\frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y)| \leq h_K(y) \quad \text{für alle } (x,y) \in K \times \Omega_2 \text{ und alle } i = 1, ..., p,$$
so ist F auf Ω_1 stetig differenzierbar und
$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x) = \int_{\Omega_2} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x,y) d^q y \qquad (i = 1, ..., p).$$

Sämtliche Beweise gehen nach demselben Schema: Man mache eine Quaderzerlegung, wende darauf Satz MI.14 an und schließe, daß man unter den gemachten Voraussetzungen dann durch Grenzübergang bei der Quaderzerlegung die gewünschten Resultate erhält.

Warnung MI.23 *Auch bei schön aussehenden Funktionen sind die in Satz MI.22 gemachten Voraussetzungen nicht notwendigerweise erfüllt, und wenn sie erfüllt sind, braucht dies nicht mehr zu gelten, wenn man die Variablen in anderer Reihenfolge durchgeht.*

Dazu folgendes Beispiel:
Es sei $\Omega_1 = \Omega_2 = \mathbb{R}, \ f(x,y) = e^{-|y|(1+x^2)}$.
Hier ist $|f(x,y)| = e^{-|y|(1+x^2)} \leq e^{-|y|}$ und dies ist integrierbar über $y \in \mathbb{R}$. Ferner ist

$$F(x) = G(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|y|(1+x^2)} dy = 2 \int_0^{+\infty} e^{-y(1+x^2)} dy = \frac{2}{1+x^2}$$

und dies ist ebenfalls integrierbar über $\mathbb{R}$. Damit können wir also so den Satz MI.22 anwenden.

In der anderen Reihenfolge der Variablen geht es dagegen **nicht**, da $f(x,0)=1$ ist, und dies kann man **nicht** über $\mathbb{R}$ integrieren.

Der Satz Satz MI.22 erlaubt zwar prinzipiell eine n-dimensionale Integration durch sukzessives Berechnen von n eindimensionalen Integralen zu bestimmen. In der Praxis bekommen wir aber hier Probleme mit der Gestalt der Integrationsbereiche.

Notation MI.24 *Sind $a=(a_1,...,a_n), b=(b_1,...,b_n)\in\mathbb{R}^n$ so notieren wir $a<b$, wenn $a_k<b_k$ für alle Komponenten gilt. Es ist dann*

$$Q:=\{x\,|\,a<x<b\}=I_1\times...\times I_n,$$

wobei $I_k:=(a_k,b_k)$, also ein Quader. Wir notieren dann auch

$$\int_a^b f \text{ statt } \int_Q f.$$

Satz MI.25 *Es sei $\Omega_1\subset\mathbb{R}^p$ offen, $g,h:\Omega_1\to\mathbb{R}^q$ stetig und $g(x)<h(x)$ für alle $x\in\Omega_1$. Zu $x\in\Omega_1$ sei $Q_x:=\{y\,|\,g(x)<y<h(x)\}\subset\mathbb{R}^q$. Die Funktion f sei erklärt und stetig für alle (x,y) mit $x\in\Omega_1$ und $y\in Q_x$, und für jeden kompakten Quader $I\subset\Omega_1$ sei sie auf der Menge $\{(x,y)\,|\,x\in I, y\in Q_x\}$ beschränkt durch eine Konstante C_I. Dann ist*

$$F(x):=\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)d^qy$$

stetig auf Ω_1.

Beweis: Fixiere $x_0\in\Omega_1,\epsilon>0$ und dazu einen kompakten Quader $I\subset\Omega_1$ mit Mittelpunkt x_0, sodaß $|g(x)-g(x_0)|<\epsilon$ und $|h(x)-h(x_0)|<\epsilon$ für $x\in I$. Das Integral $\int_{g(x_0)+\epsilon}^{h(x_0)-\epsilon} f(x,y)d^qy$ ist dann das Integral über einen kompakten Quader und unter den gemachten Voraussetzungen nach den früheren Sätzen stetig (bei x_0.) Ferner ist für $x\in I$:

$$\Big|\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)d^qy-\int_{g(x_0)+\epsilon}^{h(x_0)-\epsilon} f(x,y)d^qy\Big|\le 2C_I\epsilon\big(|h(x_0)-g(x_0)|_\infty+4\epsilon\big)^{q-1}$$

sodaß für $x\in I$ mit einer geeigneten Konstante C

$$|F(x)-F(x_0)|\le\Big|\int_{g(x_0)+\epsilon}^{h(x_0)-\epsilon}\big(f(x,y)-f(x_0,y)\big)d^qy\Big|+\epsilon\cdot C$$

ist, woraus die Stetigkeit folgt. □

Fügt man hier noch Integrabilitätsbedingungen hinzu, so ergibt sich wieder ein

Satz MI.26 (über sukzessive Integration) *Es sei $\Omega_1\subset\mathbb{R}^p$ offen, $g,h:\Omega_1\to\mathbb{R}^q$ stetig und $g(x)<h(x)$ für alle $x\in\Omega_1$. Die Funktion $f:\mathbb{R}^{p+q}\supset\Omega\to\mathbb{R}$ sei erklärt und stetig auf*

$$\Omega:=\{(x,y)\,|\,x\in\Omega_1, g(x)<y<h(x)\}$$

und zu jedem kompakten Quader $I\subset\Omega_1$ auf

$$\Omega_I:=\{(x,y)\,|\,x\in I, g(x)<y<h(x)\}$$

durch eine Konstante C_I beschränkt.

Dann sind die Funktionen

$$F(x) := \int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)d^q y \text{ und } G(x) := \int_{g(x)}^{h(x)} |f(x,y)|d^q y$$

stetig auf Ω_1. *Ist* G *über* Ω_1 *integrierbar, so ist auch* f *über* Ω *integrierbar und es ist*

$$\int_\Omega f(z)d^{p+q}z = \int_{\Omega_1} F(x)d^p x = \int_{\Omega_1}\Big(\int_{g(x)}^{h(x)} f(x,y)d^q y\Big)d^p x.$$

Bemerkung MI.27 *Sind das Gebiet* Ω_1 *und die stetigen Funktionen* g, h, f *jeweils beschränkt, so ist die Integrabilitätsbedingung von selbst erfüllt.*

Beispiel MI.28 *Im* $\mathbb{R}^3$ *sei ein Gebiet* Ω *durch die Graphen stetiger Funktionen wie folgt begrenzt*

$$\Omega := \{(x,y,z)\,|\, a < x < b, g_1(x) < y < g_2(x), h_1(x,y) < z < h_2(x,y)\}.$$

Sind dann $f : \Omega \to \mathbb{R}$ *und die* g_i, h_i *sogar beschränkt, so ist*

$$\int_\Omega f(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \int_a^b\Big(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)}\Big(\int_{h_1(x,y)}^{h_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\Big)dy\Big)dx.$$

Ist die Beschränktheit nicht gegeben, so hat man die Integrabilitätsbedingung zu prüfen!

Definition MI.29 *Das Volumen einer offenen Menge* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *erklären wir als*

$$V^n(\Omega) := \int_\Omega 1 d^n x,$$

sofern dieses Integral existiert. Andernfalls hat Ω *kein endliches Volumen.*
Sind keine Mißverständnisse zu erwarten, so schreibt man auch kurz $V(\Omega)$.

Wir nutzen unsere Sätze, um das **Kugelvolumen** zu berechnen.

$$\begin{aligned}
\int_{x^2+y^2+z^2<R} 1\,dx\,dy\,dz &= \int_{-R}^{+R}\Big(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}}\Big(\int_{-\sqrt{R^2-x^2-y^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2-y^2}} 1dz\Big)dy\Big)dx \\
&= \int_{-R}^{+R}\Big(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}}\Big(2\sqrt{R^2-x^2-y^2}\Big)dy\Big)dx \\
&= 2\int_{-R}^{+R}\Big(\int_{-\sqrt{R^2-x^2}}^{+\sqrt{R^2-x^2}}(R^2-x^2)\sqrt{1-\frac{y^2}{R^2-x^2}}\frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2}}\Big)dx
\end{aligned}$$

Mit der Substitution $\frac{y}{\sqrt{R^2-x^2}} = \sin\varphi$, d.h. $\frac{dy}{\sqrt{R^2-x^2}} = \cos\varphi d\varphi$ ist dies gleich

$$\begin{aligned}
&= 2\int_{-R}^{+R}\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}(R^2-x^2)\cos^2\varphi d\varphi\Big)dx \\
&= 2\int_{-R}^{+R}(R^2-x^2)\Big(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi d\varphi\Big)dx \\
&= \pi\int_{-R}^{+R}(R^2-x^2)dx \\
&= \frac{4}{3}\pi R^3,
\end{aligned}$$

womit die bekannte Formel für das Kugelvolumen erhalten ist.

Eine weitere elementare, aber wichtige Anwendung von Satz MI.26 ist

Satz MI.30 (Prinzip von Cavalieri) *Es sei $\Omega_0 \subset \mathbb{R}^{n-1}$ offen, beschränkt und $g, h : \Omega_0 \to \mathbb{R}$ stetig mit $g(x) < h(x)$ auf Ω_0. Dann ist für*

$$\Omega := \{(x,y) \in \mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R} \mid x \in \Omega_0, g(x) < y < h(x)\}$$

$$V^n(\Omega) = \int_{\Omega_0} \big(h(x) - g(x)\big) d^{n-1}x,$$

sofern dieses Integral existiert.

Als ein weiteres wichtiges Handwerkszeug zur Bestimmung mehrdimensiopnaler Integrale brauchen wir die Verallgemeinerung der Substitutionsregel (Satz I.32).

Transformationssatz MI.31 *Sind Ω, Ω' offene Mengen im $\mathbb{R}^n$ und dazwischen $\varphi : \Omega \to \Omega'$ ein C^1-Diffeomorphismus, so ist*

$$\int_{\varphi(\Omega)} f(y) d^n y = \int_\Omega f(\varphi(x)) \big| \det \varphi'(x) \big| d^n x,$$

sofern f stetig ist und eines der beiden Integrale existiert. Dabei ist $\varphi'(x)$ die $n \times n$-Jacobi-Matrix zur Abbildung φ.

Ein vollständiger Beweis ist sehr aufwendig und sei deshalb hier nicht geführt. Man siehe etwa Forster, Analysis 3.
Die wichtigsten Zusammenhänge, auf denen dieser Satz fußt, sind aber leicht zu verstehen:
Die Spalten einer $n \times n$-Matrix B spannen ein Parallelepiped auf, dessen Volumen gerade $V(B) = \big|\det B\big|$ ist. Der Produktsatz für Determinanten: $\det(AB) = \det A \cdot \det B$ sagt dann, daß sich unter einer affinen Abbildung $x \mapsto x_0 + A(x - x_0)$ das Volumen eines Quaders oder Parallelepipeds gerade mit den Faktor $\big|\det A\big|$ multipliziert.
Für eine stetige Funktion f – etwa über einem kompakten Quader I – konnten wir über die Approximation durch Treppenfunktionen das Integral approximieren durch einen Ausdruck der Form

$$\int_I f(x) d^n x \sim \sum f(x_k) V(I_k),$$

wobei die I_k eine Zerlegung von I in (kleine) Quader beschreiben. Bilden wir alles mit dem durch die reguläre Matrix A gegebenen Diffeomorphismus $\varphi : x \mapsto x_0 + A(x - x_0)$ mit Ableitung $\varphi' = A$ ab, so erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int_{\varphi(I)} f(y) d^n y &\sim \sum f(x_0 + A(x_k - x_0))\, V(A(I_k)) \\
&= \sum f(x_0 + A(x_k - x_0))\, |\det A|\, V(I_k) \\
&= \sum f(x_0 + A(x_k - x_0))\, |\det \varphi'|\, V(I_k) \\
&\sim \int_I f(\varphi(x))\, |\det \varphi'|\, d^n x.
\end{aligned}$$

Ist nun der Diffeomorphismus nicht mehr affin, so wird er nach wie vor lokal gut durch einen affinen Diffeomorphismus approximiert über

$$\varphi(x) \sim \varphi(x_0) + \varphi'(x_0)(x - x_0),$$

d.h. man kann die eben angestellte Überlegung an jeder Stelle mit einer anderen affinen Abbildung nutzen. Die technisch mühsame Feinarbeit zeigt, daß man diese Ideen tatsächlich zu einem einwandfreien Beweis kombinieren kann.

Beispiel MI.32 (Zylinder-Koordinaten) *Es sei* $\Omega := \{(r,\varphi,z)$ *mit* $r > 0, 0 < \varphi < 2\pi, z \in \mathbb{R}\}$ *und* $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3,\ (r,\varphi,z) \mapsto (r\cos\varphi, r\sin\varphi, z)$. *Dafür ist*

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -r\sin\varphi & 0 \\ \sin\varphi & r\cos\varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \textit{mit } |\det\Phi'| = r.$$

Φ bildet einen (r,φ,z)-Quader $Q := (R_1,R_2) \times (\varphi_1,\varphi_2) \times (z_1,z_2)$ ab auf einen Zylinder Z mit Boden- und Dachfläche auf $z = z_1$ bzw. $z = z_2$ und der Form eines Winkelsegmentes aus dem Kreisring mit den Radien R_1 und R_2.
Für das Volumen dieses Zylinders Z bekommen wir dann

$$\begin{aligned} \int_Z 1\,dx\,dy\,dz &= \int_{\Phi(Q)} 1\,dx\,dy\,dz \\ &= \int_Q 1\cdot|\det\Phi'|\,dr\,d\varphi\,dz \\ &= \int_{R_1}^{R_2}\int_{\varphi_1}^{\varphi_2}\int_{z_1}^{z_2} r\,dz\,d\varphi\,dr \\ &= (z_2-z_1)(\varphi_2-\varphi_1)\int_{R_1}^{R_2} r\,dr \\ &= \frac{1}{2}(z_2-z_1)(\varphi_2-\varphi_1)\big(R_2^2-R_1^2\big). \end{aligned}$$

Beispiel MI.33 (Kugelkoordinaten) *Es sei* $\Omega := \{(r,\theta,\varphi)$ *mit* $r > 0, -\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}, 0 < \varphi < 2\pi\}$ *und* $\Phi : \Omega \to \mathbb{R}^3,\ (r,\theta,\varphi) \mapsto (r\cos\theta\cos\varphi, r\cos\theta\sin\varphi, r\sin\theta)$. *Hier ist*

$$\Phi' = \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\cos\varphi & -r\cos\theta\sin\varphi \\ \cos\theta\sin\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\cos\varphi \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \end{pmatrix} \quad \textit{mit } |\det\Phi'| = r^2\cos\theta.$$

Damit bekommen wir etwa für kugelsymmetrische Funktionen auf dem $\mathbb{R}^3$ (“Potentiale”) folgenden

Satz MI.34 *Ist* V *stetig auf* $(0,R)$ *und* $r^2V(r)$ *dort beschränkt, so ist (mit der* EUKLID-*Norm* $|\ | := |\ |_2$*)*

$$\int_{0<|x|<R} V(|x|)\,d^3x = 4\pi\int_0^R r^2V(r)\,dr.$$

Beweis: Mittels der Transformation auf Kugelkoordinaten haben wir

$$\begin{aligned} \int_{0<|x|<R} V(|x|)\,d^3x &= \int_0^R\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} V(r)r^2\cos\theta\,d\varphi\,d\theta\,dr \\ &= 2\pi\int_0^R r^2V(r)\left(\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta\right)dr \\ &= 4\pi\int_0^R r^2V(r)\,dr. \end{aligned}$$

□