O Ein Vorkapitel

Erinnerungen an den Schulstoff Analysis

Funktionen

Eine Vorschrift $x \mapsto f(x)$, die jeder reellen Zahl $x \in \mathbb{R}$ wieder eine reelle Zahl $f(x) \in \mathbb{R}$ zuordnet, nennen wir eine auf ganz $\mathbb{R}$ definierte Funktion f mit Werten in $\mathbb{R}$ und notieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Beispiele sind

Polynome: $f(x) = x^2 - 3x + 5, ...$;
trigonometrische Funktionen: $\sin x, \cos x, ...$,
Exponentialfunktionen: $e^x, e^{\alpha x}, ...$.

Beispiele für Funktionen, die *nicht* auf ganz $\mathbb{R}$ definiert sind, sind etwa

Rationale Funktionen: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$, mit Polynomen $p(x), q(x)$,
die trigonometrischen Funktionen $\tan x, \operatorname{ctan} x, ...$,
Wurzel- und Logarithmus-Funktionen .

Wir werden mit diesen Funktionen zunächst einfach umgehen und später Genaueres über sie sagen.

Stetigkeit

Die oben aufgeführten Funktionen sind dort, wo sie definiert sind auch *stetig*. Dies bedeutet grob gesprochen:
Wenn man mit x nur nahe genug an x_0 herangeht, kann man $|f(x) - f(x_0)|$, d.h. den Abstand der zugehörigen Funktionswerte von f, so klein machen, wie man will.
Rationale Funktionen sind da, wo der Nenner eine Nullstelle hat, im allgemeinen *nicht* stetig.
Die Vorzeichen-Funktion

$$f(x) := \operatorname{sig}(x) := \begin{cases} -1 & x < 0 \\ 0 & x = 0 \\ +1 & x > 0 \end{cases}$$

ist überall stetig außer am Punkte $x_0 = 0$, wo sie unstetig ist und eine sog. Sprungstelle hat.

Differenzierbarkeit

Hat der Graph einer Funktion f im Punkt $(x_0 \,|\, f(x_0))$ eine Tangente, die nicht parallel zur y-Achse ist, so sagt man, daß f an der Stelle x_0 *differenzierbar* ist. Die Tangente wird dann durch eine lineare Funktion

$$t(x) = f(x_0) + m(x - x_0)$$

beschrieben. Deren Steigung m heißt die *Ableitung* von f an der Stelle x_0 und wird mit $f'(x_0)$ bezeichnet. Man beweist

f ist an der Stelle x_0 genau dann differenzierbar, wenn für eine geeignete Zahl m gilt

$$\left| \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - m \right| \to 0 \quad \text{für } x \to x_0.$$

Es ist dann $m = f'(x_0)$.

Die Polynome, $\sin, \cos$, die Exponentialfunktionen sind Beispiele von Funktionen, die überall differenzierbar sind. Die Vorzeichenfunktion, ebenso $f(x) := |x|$ (Betragsfunktion) sind an $x_0 = 0$ *nicht* differenzierbar.

Es gelten die folgenden Rechenregeln:

$$\begin{aligned} (\alpha f(x) + \beta g(x))' &= \alpha f'(x) + \beta g'(x) \\ (f(x)g(x))' &= f'(x)g(x) + f(x)g'(x) \\ \left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' &= \frac{f'(x)g(x) - f(x)g'(x)}{g^2(x)} \qquad \textit{sofern } g(x) \neq 0. \end{aligned}$$

Speziell haben wir etwa

$$\begin{aligned} (x^n)' &= nx^{n-1} \qquad \textit{wenn } n \textit{ eine natürliche Zahl}, \\ (\sin x)' &= \cos x, \ (\cos x)' = -\sin x, \\ (e^{ax})' &= ae^{ax}. \end{aligned}$$

Bei den zuletzt genannten Beispielen ist durch die Vorschrift. $x \mapsto f'(x)$ selbst wieder eine Funktion bestimmt, die wir mit f' bezeichnen. Sie ist hier sogar selbst wieder stetig – man sagt dann *f ist stetig differenzierbar.* Genauer gilt hier, daß sogar f' wieder differenzierbar ist und dessen Ableitung wieder stetig. Man nennt dann die Ableitung $(f')'$ von f' die *zweite Ableitung von f* und notiert $f'' := (f')'$. Ist auch sie stetig, so nennt man f *zweimal stetig differenzierbar.* Je nach Funktion läßt sich dieser Prozess noch fortsetzen. Man kommt so zu dem Begriff der n-mal bzw. beliebig oft stetig differenzierbaren Funktionen.

Integration

Für eine stetige Funktion f, die auf einem Intervall $[a, b]$ nicht negativ wird, erklärt man das bestimmte Intergral $\int_a^b f(x)dx$ als den Inhalt der Fläche, die über dem Intervall zwischen dem Graphen von f und der x-Achse liegt. Für allgemeine stetige Funktionen erweitert man diese Definition durch die beiden Regeln

$$\begin{aligned} \int_a^b (\alpha f(x) + \beta g(x))dx &= \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx, \\ \int_a^b f(x)dx &= \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx. \end{aligned}$$

Indem man die auszumessende Fläche in ein Rechteck einsperrt, erhält man sofort die Abschätzung

$$\left| \int_a^b f(x)dx \right| \leq |b - a| \cdot \max_{x \in [a,b]} |f(x)|.$$

Ferner gilt der

Hauptsatz der Differential und Integralrechnung *Ist f stetig und definiert man F durch*

$$F(x) := \int_a^x f(t)dt,$$

so ist F stetig differenzierbar und $F' = f$.

Wir werden alle diese Ergebnisse jetzt einmal einfach nutzen und erst später noch genauer darauf eingehen.

Nach dieser Erinnerung wenden wir uns nun der Linearen Algebra zu.

Die Ebene und der $\mathbb{R}^2$

Wir betreiben zunächst etwas analytische Geometrie in der Ebene und im Raum. Wir gehen dabei aus von einem naiven Verständnis von den Objekten der Geometrie, benutzen elementare Schreibweisen der Mengenlehre und die Kenntnis der reellen Zahlen $\mathbb{R}$.
Dabei stützen wir uns bei den Zahlen vor allem auf die im folgenden aufgeführten Eigenschaften.

Fakt O.1 (Eigenschaften von $\mathbb{R}$) *In $\mathbb{R}$ sind zwei Operationen erklärt, genannt Addition (+) und Multiplikation ($\cdot$), durch die jeweils zwei reellen Zahlen eine dritte, eben deren Summe oder deren Produkt zugeordnet wird. Ferner gibt es in $\mathbb{R}$ zwei ausgezeichnete Elemente* 0 *und* 1, *sodaß für alle* $x, y, z \in \mathbb{R}$ *die folgenden Regeln gelten:*

R1: $+$ *ist associativ, d.h.* $(x + y) + z = x + (y + z)$.

R2: 0 *ist neutrales Element bezgl.* $+$, *d.h.* $x + 0 = 0 + x = x$.

R3: Eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen, d.h. jede Gleichung der Art $x + u = y$ *besitzt genau eine Lösung* $u \in \mathbb{R}$. *Wir bezeichnen sie mit* $u =: y - x$.

R4: $+$ *ist kommutativ, d.h.* $x + y = y + x$.

R5: $\cdot$ *ist associativ, d.h.* $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.

R6: 1 *ist neutrales Element bezgl.* $\cdot$, *d.h.* $x \cdot 1 = 1 \cdot x = x$.

R7: Eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen, d.h. jede Gleichung der Art $x \cdot u = y$ *mit* $x \neq 0$ *besitzt genau eine Lösung* $u \in \mathbb{R}$. *Wir bezeichnen sie mit* $u =: \frac{y}{x}$.

R8: $\cdot$ *ist kommutativ, d.h.* $x \cdot y = y \cdot x$.

R9: Für beide Operationen zusammen gilt die Distributivität, d.h.

$$\begin{aligned} (x + y) \cdot z &= x \cdot z + y \cdot z \\ x \cdot (y + z) &= x \cdot y + x \cdot z. \end{aligned}$$

R10: Die beiden neutralen Elemente sind verschieden.

Geben wir in der Ebene zwei Koordinatenachsen vor, also zwei Geraden, die aufeinander senkrecht stehen und jeweils eine Skala aus reellen Zahlen tragen, wobei der Schnittpunkt jeweils zur Null gehöre, so können wir in der bekannten Weise jedem Punkt X der Ebene ein Zahlenpaar $(\xi_1|\xi_2)$ zuordnen, wofür wir (etwas schlampig) einfach $X = (\xi_1|\xi_2)$ notieren. Zum Schnittpunkt der Koordinatenachsen gehört dann der Nullpunkt oder auch Koordinatenursprung $O = (0|0)$.
Einen Pfeil x, der vom Ursprung O zu einem Punkt X zeigt, nennen wir den Ortsvektor mit Spitze in X. Solche Ortsvektoren kann man nun auf folgende Weise addieren bzw. und mit einer Zahl multiplizieren:

Definition O.2 (Rechnen mit Ortsvektoren) *Zwei Ortsvektoren* x, y *bestimmen ein Parallelogramm, von dem drei Ecken durch den Ursprung* O, *die Spitze* $X = (\xi_1|\xi_2)$ *von* x *und die Spitze* $Y = (\eta_1|\eta_2)$ *von* y *gegeben sind. Den (von* O*) nach der vierten Ecke zeigenden Ortsvektor nennen wir die Summe von* x *und* y *und bezeichnen ihn mit* $x + y$. *Seine Spitze ist der Punkt* $(\xi_1 + \eta_1|\xi_2 + \eta_2)$.
Ist x *ein Ortsvektor mit Spitze* $X = (\xi_1|\xi_2)$, $\lambda \in \mathbb{R}$ *eine reelle Zahl, so bezeichne* λx *den Ortsvektor mit Spitze* $(\lambda\xi_1|\lambda\xi_2)$. *Wir nennen ihn das* $\lambda-$*fache von* x *und bezeichnen ihn mit* $\lambda \cdot x$, *wobei der* $\cdot$ *meist unterdrückt wird.* $\lambda \cdot x$ *ist ein Vektor, der um den Faktor* $|\lambda|$ *gegenüber* x *gestreckt ist und der im Falle* $\lambda < 0$ *in die entgegengesetzte Richtung weist.*
Den Nullvektor mit Spitze $O = (0|0)$ *bezeichnen wir mit* 0.

Mit elementaren geometrischen Überlegungen kann man dann folgenden Satz beweisen:

Satz O.3 *Für alle Ortsvektoren x, y, z und alle reellen Zahlen λ, μ gelten*

V1: $+$ *ist associativ, d.h.* $(x+y)+z = x+(y+z)$.

V2: 0 *ist neutrales Element bezgl.* $+$, *d.h.* $x+0 = 0+x = x$.

V3: Eindeutige Lösbarkeit von Gleichungen, d.h. jede Gleichung der Art $x+u = y$ *besitzt genau eine Lösung* u. *Wir bezeichnen sie mit* $u := y - x$ *und nennen dies die Differenz der Ortsvektoren* y, x.

V4: $+$ *ist kommutativ, d.h.* $x+y = y+x$.

V5: $\cdot$ *ist associativ, d.h.* $(\lambda \cdot \mu)\cdot x = \lambda \cdot (\mu \cdot x)$.

V6: 1 *ist neutrales Element bezgl.* $\cdot$, *d.h.* $1 \cdot x = x$.

Es gelten die Distributivgesetze

V7: $\lambda \cdot (x+y) = \lambda \cdot x + \lambda \cdot y$,

V8: $(\lambda + \mu)\cdot x = \lambda \cdot x + \mu \cdot x$.

Wir haben das Rechnen mit Ortsvektoren beschrieben, wobei also nach festen Regeln aus solchen Vektoren, d.h. Pfeilen in der Ebene, neue Vektoren gemacht werden, bzw. aus einer Zahl und einem Vektor ein neuer Vektor. Diese Operationen verlaufen dabei so, daß wir sie ganz ohne geometrische Anschauung durchführen können nur allein aus der Kenntnis der Komponenten der Spitzen-Punkte der beteiligten Vektoren, d.h. von Zahlen-Paaren. Dann können wir aber die Geometrie gleich weglassen und direkt mit Zahlenpaaren rechnen. Dies führt uns zum sog. $\mathbb{R}^2$:

Definition O.4 (Der $\mathbb{R}^2$) *Mit $\mathbb{R}^2$ bezeichen wir die Menge aller geordneten Paare von reellen Zahlen:*

$$\mathbb{R}^2 := \{x = (\xi_1, \xi_2) \quad | \quad \xi_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1,2\}$$

Das Paar $(0,0)$ *wird mit* 0 *bezeichnet und heißt Nullelement, ferner bezeichne*

$$e_1 := (1,0), \quad e_2 := (0,1).$$

Wir erklären zwei Operationen:
Addition $+$ *: Zu* $x = (\xi_1, \xi_2)$ *und* $y = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$ *sei*

$$x + y := (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2) \in \mathbb{R}^2.$$

Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$: *Zu* $x = (\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$ *und* $\lambda \in \mathbb{R}$ *sei*

$$\lambda x := \lambda \cdot x := (\lambda \xi_1, \lambda \xi_2).$$

Dafür gilt

Satz O.5 *Für alle* $x, y, z \in \mathbb{R}^2, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ *gelten die in Satz O.3 notierten Regeln V1 bis V8.*

Wir verwenden die nun schon bei den Ortsvektoren in der Ebene und bei den Zahlenpaaren gefundene gemeinsame Struktur für folgende

Definition O.6 ($\mathbb{R}$-Vektorraum) *Eine mathematische Struktur V, in der ein ausgezeichnetes Element 0 gegeben ist, ferner eine Operation "Addition" $(+)$ und eine Operation " Multiplikation mit reellen Zahlen" $(\lambda \cdot)$ erklärt sind, sodaß dafür die Regeln V1 bis V8 aus Satz O.3 gelten, heißt ein "Vektorraum über den reellen Zahlen".*

Solche Vektorräume – wir werden sie auch noch über anderen Zahlbereichen als den reellen Zahlen betrachten – und die "schönen" Abildungen zwischen ihnen, bilden einen wichtigen Teil dieser Vorlesung. Sie stehen im Hintergrund, wenn es um (große) lineare Gleichungssysteme geht, wenn wie bei Schwingungsproblemen lineare Differentialoperatoren im Spiel sind, bei der Ausgleichsrechnung ebenso wie bei linearer Optimierung.
Bleiben wir aber zunächst bei unseren beiden Beispielen, den Vektoren in der Ebene bzw. dem $\mathbb{R}^2$. Im $\mathbb{R}^2$ läßt sich bequem rechnen, in der Ebene haben wir geometrische Objekte, die unserer Vorstellung entgegenkommen. Beides läßt sich jeweils ineinander übersetzen. Denn jeder Ortsvektor $x = (\xi_1|\xi_2)$ bestimmt trivialerweise das Zahlenpaar (ξ_1, ξ_2) und umgekehrt. So können wir von dem mathematisch uninteressanten Unterschied absehen und Ortsvektor oder Zahlenpaar als zwei Erscheinungsformen ein und desselben Objekts ansehen, das wir generell einen "Vektor" nennen. Schreiben wir also einfach $x = (\xi_1, \xi_2)$ und lesen dies je nach Interessenlage als Ortsvektor oder als Zahlenpaar. Dann sind also auch die oben definierten $e_1 = (1, 0), e_2 = (0, 1)$ als (Orts-)Vektoren interpretierbar, sie zeigen jeweils auf den Achsen auf den Punkt mit der Koordinate 1. Wir nennen sie die *"kanonischen Einheitsvektoren"*.
In diesem Rahmen gilt

Satz und Bezeichnung O.7 *Jeder Vektor im $\mathbb{R}^2$ besitzt genau eine Darstellung als*

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 \text{ mit } \xi_i \in \mathbb{R}.$$

Man nennt daher (e_1, e_2) auch eine "Basis" des $\mathbb{R}^2$ bzw. der Ebene.

Fassen wir speziell den Aspekt der Ortsvektoren ins Auge, so hat jeder Vektor x eine Länge $|x|$ und je zwei Vektoren x, y $(\neq 0)$ bilden einen Winkel $\chi := \measuredangle(x, y)$. Da unsere Basisvektoren $e_1,\ e_2$ je die Länge 1 haben und senkrecht aufeinander stehen, bekommen wir nach den Regeln der Trigonometrie

Fakt O.8 *Für $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$ und $\varphi := \measuredangle(e_1, x)$ ist*

$$|x| = \sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2)}, \quad \xi_1 = |x| \cos\varphi, \quad \xi_2 = |x| \sin\varphi.$$

Zusammen mit einem weiteren Vektor $y = \eta_1 e_1 + \eta_2 e_2$ und $\psi := \measuredangle(e_1, y)$ gilt dann für den eingeschlossenen Winkel

$$\chi := \measuredangle(x, y) = \psi - \varphi,$$

und nach dem Additionstheorem für den Cosinus

$$\cos\chi = \cos(\psi - \varphi) = \cos(\varphi - \psi) = \cos\varphi\cos\psi + \sin\varphi\sin\psi$$

also

$$\cos\chi = \frac{\xi_1}{|x|} \cdot \frac{\eta_1}{|y|} + \frac{\xi_2}{|x|} \cdot \frac{\eta_2}{|y|} = \frac{\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2}{|x||y|}.$$

Der rechts stehende Ausdruck ist immer definiert, wenn nur weder x noch y der Nullvektor ist, (dann hätten wir ja auch gar keinen richtigen Winkel!) ferner berechnet sich dieser Ausdruck alleine aus den Komponenten ξ_i, η_i.
Dies führt uns zu

Definition O.9 (Skalarprodukt im $\mathbb{R}^2$) *Für $x = (\xi_1, \xi_2), y = (\eta_1, \eta_2) \in \mathbb{R}^2$ sei*

$$\langle x, y\rangle := x \cdot y := \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 \in \mathbb{R}.$$

Man nennt dies das "Skalarprodukt" von x und y. Manche Autoren schreiben dafür auch (x, y).

Satz O.10 *Für das Skalarprodukt mit Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^2$ und Skalaren $\lambda \in \mathbb{R}$ gelten folgende Regeln.*

S1: $x \cdot y \;=\; y \cdot x.$

S2: $x \cdot (y+z) \;=\; x \cdot y + x \cdot z.$

S3: $x \cdot (\lambda y) \;=\; \lambda(x \cdot y).$

S4: $x \cdot x \geq 0,\ x \cdot x = 0$ *genau, wenn* $x = 0.$

Der Beweis ist ein einfaches Nachrechnen aus der Definition mit den Gesetzen der reellen Zahlen. Wegen S4 können wir für jedes $x \in \mathbb{R}^2$ stets $\sqrt{(x \cdot x)}$ bilden. Dies führt zu

Definition O.11 (Betrag, Norm) *Für $x \in \mathbb{R}^2$ heißt $|x| := +\sqrt{(x \cdot x)}$ der "Betrag" oder die "Norm" von x.*

Offensichtlich ist stets $|x| \geq 0$ und $|x| = 0$ nur für $x = 0$.
Dies stimmt natürlich mit der schon oben betrachteten Länge eines Vektors überein. Ebenso können wir die oben notierte Formel für den Cosinus des Winkels zwischen zwei Vektoren jetzt schreiben als

$$\cos(\measuredangle(x,y)) = \frac{x \cdot y}{|x||y|},$$

und da der Cosinus eines rechten Winkels eben $= 0$ ist, liegt es nahe zu definieren:

Definition O.12 (orthogonal) *Zwei Vektoren x, y heißen "orthogonal" oder "senkrecht zueinander", abgekürzt $x \perp y$, wenn ihr Skalarprodukt verschwindet, d.h. wenn $x \cdot y = 0$.*

Für das Eintreten von $x \cdot y = 0$ gibt es drei Möglichkeiten: Es kann sein $x = 0$ oder $y = 0$. In diesen Fällen ist kein Winkel definiert. Trotzdem reden wir künftig auch hier von orthogonal. Oder aber es sind $x \neq 0$ und $y \neq 0$. Dann ist ein Winkel χ definiert, aber $\cos \chi = 0$. Dies ist der Fall, der unserer eigentlichen geometrischen Vorstellung entspricht. Aber wir betreiben ja gerade diese Vorüberlegungen, um ausgehend von geometrischen Überlegungen allmählich zu allgemeineren Begriffsbildungen zu kommen.
Wir haben hier mittels des Skalarproduktes bekannte Dinge über Längen und Winkel in der Ebene neu formuliert. Die Bedeutung liegt darin, daß alles, was daran für den Mathematiker wirklich interessant ist, schon in den vier Regeln S1 bis S4 von Satz O.10 steckt und wir noch viele und ganz anders erscheinende Strukturen kennenlernen werden, in denen diese Regeln auch gelten. Was wir allein aus S1 bis S4 folgern können, gilt dann automatisch auch dort. Ein Beispiel dafür ist etwa

Satz O.13 *Für $x, y \in \mathbb{R}^2$ gelten*

1. $|x-y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2x \cdot y,$
2. $|x+y|^2 + |x-y|^2 = 2|x|^2 + 2|y|^2.$

Der Beweis ist ein simples Nachrechenen mit S1 bis S4. In der Geometrie der Ebene ist 1. der sog. Cosinus-Satz, und 2. besagt, daß in einem Parallelogramm die beiden Quadrate über den Diagonalen zusammen dieselbe Fläche haben wie die vier Quadrate über den Seiten.
In der Ebene mit den Ortsvektoren ist unmittelbar klar, was gemeint ist, wenn wir sagen x' sei gegenüber x um den Winkel φ gedreht. Insbesondere sollen dann x und x' auch gleich lang sein. Mittels unserer Basis e_1, e_2 haben wir Darstellungen

$$x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2, \quad x' = \xi_1' e_1 + \xi_2' e_2,$$

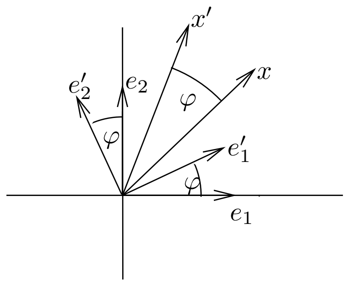


Abbildung 1

und es stellt sich die Frage, wie man die ξ_i' aus den ξ_i berechnet.
Betrachten wir zunächst die Basisvektoren e_1, e_2 und die gegenüber ihnen um φ gedrehten e_1', e_2' selbst. Nach den Regeln der Trigonometrie haben wir

$$e_1 = 1e_1 + 0e_2,\ e_1' = \cos\varphi\, e_1 + \sin\varphi\, e_2,\ e_2 = 0e_1 + 1e_2,\ e_2' = -\sin\varphi\, e_1 + \cos\varphi\, e_2.$$

Da bei einer Drehung ja die relative Lage von Vektoren zueinander erhalten bleibt, hat der gedrehte Vektor x', wenn wir ihn bezüglich der gedrehten Basisvektoren darstellen, die selben Koeffizienten, wie x bezüglich der alten Basis. Es ist also

$$\begin{aligned} x' &= \xi_1 e_1' + \xi_2 e_2' \\ &= \xi_1(\cos\varphi\, e_1 + \sin\varphi\, e_2) + \xi_2(-\sin\varphi\, e_1 + \cos\varphi\, e_2) \\ &= (\cos\varphi\, \xi_1 - \sin\varphi\, \xi_2)e_1 + (\sin\varphi\, \xi_1 + \cos\varphi\, \xi_2)e_2, \end{aligned}$$

sodaß

$$\xi_1' = \cos\varphi\, \xi_1 - \sin\varphi\, \xi_2, \quad \xi_2' = \sin\varphi\, \xi_1 + \cos\varphi\, \xi_2.$$

Betrachten wir nun wieder den alleine zwischen den Komponenten ξ_i, ξ_i' bestehenden Zusammenhang, d.h. die dieser Drehung in der Ebene entsprechende Operation im $\mathbb{R}^2$. Dafür wollen wir jetzt, um an eingebürgerte mathematische Schreibweisen anzuschließen, die Paare des $\mathbb{R}^2$ nicht mehr als "Zeilen" (ξ_1, ξ_2) notieren, sondern als "Spalten" $\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}$.
Wir haben damit die Darstellungen

$$x = \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix}, x' = \begin{pmatrix}\xi_1'\\ \xi_2'\end{pmatrix}, e_1 = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix}0\\ 1\end{pmatrix}, e_1' = \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix}, e_2' = \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix},$$

und den eben abgeleiteten Zusammenhang können wir notieren als

$$\begin{pmatrix}\xi_1'\\ \xi_2'\end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix}\cos\varphi\\ \sin\varphi\end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix}-\sin\varphi\\ \cos\varphi\end{pmatrix}.$$

Um dies und auch später kompliziertere Sachverhalte bequemer formulieren zu können, bilden wir sogenannte "Matrizen", hier speziell sog. 2×2 Matrizen:

$$A = \begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix} \qquad (\alpha_{ij} \in \mathbb{R},\ i,j = 1,2).$$

Wir erklären eine Operation: *Matrix* $\times$ *Spalte* $=$ *Spalte* durch

$$\begin{pmatrix}\alpha_{11} & \alpha_{12}\\ \alpha_{21} & \alpha_{22}\end{pmatrix} \begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}\alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2\\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2\end{pmatrix} = \xi_1 \begin{pmatrix}\alpha_{11}\\ \alpha_{21}\end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix}\alpha_{12}\\ \alpha_{22}\end{pmatrix}.$$

Merkregel: Mit "mal" im Sinne von Skalarprodukt gilt:

erste Zeile mal Spalte = erste Komponente,
zweite Zeile mal Spalte = zweite Komponente.

Fassen wir dies zusammen:

Definition und Satz O.14 (Drehung im $\mathbb{R}^2$) *Der Übergang von einem Vektor $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ zu dem dazu um einen Winkel φ gedrehten Vektor $x' = \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix}$ wird beschrieben durch die Multiplikation mit einer Matrix:*

$$x' = \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.$$

Die auftretende Matrix $R(\varphi)$ heißt "Matrix" der Drehung um φ, oder kurz "Drehmatrix" zu φ. $x' = \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix}$ heißt "Bild" von $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ unter der Drehung $R(\varphi)$.

Wählen wir für $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ speziell die *"kanonischen Einheitsvektoren des $\mathbb{R}^2$"*, nämlich $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$, so erhalten wir nach der Definition des Produktes aus Matrix $\times$ Spalte gerade die erste bzw. zweite Spalte unserer Matrix. (Was bedeutet das geometrisch?) Wir merken uns:

Die Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren!

Es seien nun zwei Drehmatrizen, sagen wir $R := R(\varphi)$ und $S := R(\psi)$, also zu Drehwinkeln φ, ψ gegeben. Wie kann man daraus die Drehmatrix T zu der Drehung um den Winkel $\varphi + \psi$ bestimmen? Auszuführen ist also etwa erst die Drehung um φ und danach die um ψ. Die Spalten von R seien r_1, r_2, die von T entsprechend t_1, t_2. Nach der eben notierten Regel ist damit

$$t_1 = Te_1,\ t_2 = Te_2, \quad r_1 = Re_1,\ r_2 = Re_2$$

und dies sind die Darstellungen der um $\varphi + \psi$ bzw. um φ gedrehten Basisvektoren. Ferner liefern uns Sr_1 bzw. Sr_2 die Darstellung der Vektoren, die aus r_1, r_2 durch Drehung um ψ entstehen. Dies sind aber gerade die dann zunächst um φ und dann um ψ gedrehten Einheitsvektoren, sodaß also

$$t_1 = Sr_1 \quad t_2 = Sr_2.$$

Um dies einfacher zu notieren erklären wir ein *Produkt von Matrizen* folgendermaßen:

Sind A, B je 2×2-Matrizen, so sei die 2×2-Matrix AB erklärt durch
(erste Spalte von AB) := $A \times$ (erste Spalte von B),
(zweite Spalte von AB) := $A \times$ (zweite Spalte von B).

Damit können wir das eben abgeleitete Ergebnis formulieren als

Satz O.15 *Sind R, S die Matrizen der Drehungen um die Winkel φ bzw. ψ, so ist deren Produkt SR die Matrix der Drehung um $\varphi + \psi$.*

Setzen wir hierin $\psi = -\varphi$ oder $\varphi = -\psi$, so erhalten wir als Gesamtdrehung die um den Winkel 0. Hierzu gehört die sog. "Einheitsmatrix" $I := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.
Hierfür liefert dann Satz O.15 sofort

$$R(-\varphi)R(\varphi) \;=\; R(\varphi)R(-\varphi) \;=\; I.$$

Definition und Satz O.16 (Inverse Matrix) *Zu jeder Drehmatrix R gibt es eine Matrix S, sodaß $RS = SR = I$. Wir nennen S die zu R inverse Matrix und bezeichnen sie mit $R^{-1} := S$.*

Wir wenden diese Überlegungen an, um die folgenden Additionstheoreme herzuleiten:

Satz O.17 (Additionstheorem für $\sin$ **und** $\cos$.**)**

$$\cos(\varphi + \psi) = \cos\psi \cdot \cos\varphi - \sin\psi \cdot \sin\varphi$$
$$\sin(\varphi + \psi) = \sin\psi \cdot \cos\varphi + \cos\psi \cdot \sin\varphi.$$

Beweis: Der um den Winkel $\varphi+\psi$ gedrehte Einheitsvektor e_1 hat gerade die Gestalt $\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) \end{pmatrix}$ und wir erhalten ihn, indem wir e_1 erst um φ drehen und dann den erhaltenen Vektor um ψ. Jeweils hat man mit der entsprechenden Drehmatrix zu multiplizieren. Somit bekommen wir

$$\begin{pmatrix} \cos(\varphi+\psi) \\ \sin(\varphi+\psi) \end{pmatrix} = R(\psi) \cdot (R(\varphi) \cdot e_1)$$

und wenn Sie das ausrechnen stehen die Additionstheoreme da. □

Der Raum und der $\mathbb{R}^3$

Wie in der Ebene können wir im Raum mit Ortsvektoren, die von einem festen Punkt 0 ausgehen, operieren und damit Geometrie betreiben. Wie in der Ebene können wir Vektoren durch Zusammensetzen addieren und durch Längenänderung mit einer reellen Zahl multiplizieren. Es ist nicht schwer, sich zu überlegen, daß auch hierfür wieder die Regeln V1 bis V8 von Satz O.3 gelten.
Ferner können wir statt wie im $\mathbb{R}^2$ mit Zahlenpaaren auch mit Zahlentripeln rechnen, die natürlich wieder den Punkten im Raum, d.h. den Spitzen unserer Ortsvektoren entsprechen.

Definition O.18 (Der $\mathbb{R}^3$) *Mit $\mathbb{R}^3$ bezeichnen wir die Menge aller geordneten Tripel von reellen Zahlen, die wir gleich als Spalten schreiben wollen:*

$$\mathbb{R}^3 := \left\{ x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \quad | \quad \xi_i \in \mathbb{R},\ i = 1, 2, 3. \right\}$$

Die ξ_i heißen die Komponenten des Spaltenvektors x.
Wir bezeichnen

$$0 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix},$$

und nennen 0 den Nullvektor, die e_i die kanonischen Einheitsvektoren.
Wir erklären zwei Operationen:
Addition + :

$$\text{Zu } x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \text{ und } y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \text{ sei } x + y := \begin{pmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \\ \xi_3 + \eta_3 \end{pmatrix},$$

Multiplikation mit $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$\text{Zu } x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \text{ und } \lambda \in \mathbb{R} \text{ sei } \lambda x = \begin{pmatrix} \lambda\xi_1 \\ \lambda\xi_2 \\ \lambda\xi_3 \end{pmatrix}.$$

Analog zu Satz O.5 beweist man

Satz O.19 *Im $\mathbb{R}^3$ gelten für die Addition und die Multiplikation die Regeln V1 bis V8 von Satz O.3.*

Wieder kann man die Ortsvektoren im Raum und die Zahlentripel des $\mathbb{R}^3$ identifizieren, sodaß wir da wieder den jeweils passenden Aspekt hervorheben werden.
Analog zum $\mathbb{R}^2$ können wir ein Skalarprodukt einführen:

Definition O.20 (Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$) *Für $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$ und $y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix}$ sei $x \cdot y := \langle x, y\rangle := \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3$, das "Skalarprodukt" im $\mathbb{R}^3$. Wir wollen künftig dafür nur noch die Notation $\langle x, y\rangle$ verwenden.*

Durch simples Nachrechenen erhält man sofort

Satz O.21 *Für das Skalarprodukt im $\mathbb{R}^3$ gelten die Regeln S1 bis S4 aus Satz O.10*

Insbesondere ist es damit wieder sinnvoll zu definieren

Definition O.22 (Norm) *Für $x \in \mathbb{R}^3$ heißt $|x| := +\sqrt{\langle x, x\rangle}$ die "Norm" von x.*

Geometrisch interpretiert ist das wieder genau die Länge des durch x dargestellten Ortsvektors. Dagegen ist zunächst nicht klar, daß man das Skalarprodukt wieder über den von x und y eingeschlossenen Winkel interpretieren kann.
Ehe wir dies genauer ansehen, seien zwei wichtige Ungleichungen hergeleitet, bei deren Beweis wir uns ausschließlich auf die Regeln S1 bis S4 stützen. Damit gelten diese Ungleichungen in jeder Situation, wo wir diese vier Regeln verwenden dürfen, speziell also im $\mathbb{R}^2$ und im $\mathbb{R}^3$, aber auch in "Räumen", die wir erst noch kennenlernen werden.

Satz O.23 (Cauchy-Schwarzsche Ungleichung)

1. *Für $x, y \in \mathbb{R}^3$ ist $|\langle x, y\rangle| \le |x| \cdot |y|$.*
2. *Ist $y \neq 0$, so ist $|\langle x, y\rangle| = |x| \cdot |y|$ genau, wenn eine Zahl $\rho \in \mathbb{R}$ existiert, sodaß $x = \rho y$.*

Man beachte, daß hier $|\langle x, y\rangle|$ den Absolutbetrag der reellen Zahl $\langle x, y\rangle$ bedeutet, dagegen $|x|$ bzw $|y|$ jeweils die Norm eines Vektors.

Beweis: *Zu 1.:* Ist $y = 0$, so ist $|\langle x, y\rangle| = 0 = |x| \cdot |y|$ und 1. gilt.
Sei also $y \neq 0$. Wir setzen $\lambda := \langle y, y\rangle > 0$, $\mu := -\langle x, y\rangle$. Dann ist

$$\begin{aligned} 0 &\leq \langle \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y\rangle \\ &= \lambda^2\langle x, x\rangle + 2\lambda\mu\langle x, y\rangle + \mu^2\langle y, y\rangle \\ &= \lambda\left(\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle - 2\langle x, y\rangle^2 + \langle x, y\rangle^2\right) \\ &= \lambda\left(|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2\right). \end{aligned}$$

Wegen $\lambda > 0$ ist also $|x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2 \geq 0$, woraus unmittelbar die erste Behauptung folgt.
Zu 2.: Obige Rechnung liefert für $y \neq 0$, womit dann also $\lambda > 0$ ist: ($\Leftrightarrow$ steht für "genau dann, wenn")

$$\begin{aligned} |\langle x, y\rangle| = |x||y| &\Leftrightarrow \langle x, y\rangle^2 = |x|^2|y|^2 \\ &\Leftrightarrow 0 = \langle \lambda x + \mu y, \lambda x + \mu y\rangle \\ &\Leftrightarrow \lambda x + \mu y = 0 \\ &\Leftrightarrow x = -\frac{\mu}{\lambda} y. \end{aligned}$$

$\square$

Satz O.24 (Dreiecksungleichung) *Für* $x, y \in \mathbb{R}^3$ *ist* $|x + y| \leq |x| + |y|$.

Beweis: Es ist

$$\begin{aligned} |x + y|^2 = \langle x + y, x + y\rangle &= |x|^2 + 2\langle x, y\rangle + |y|^2 \\ &\leq |x|^2 + 2|x||y| + |y|^2 = (|x| + |y|)^2. \end{aligned}$$

$\square$

Als Konsequenz der Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ bekommen wir, daß stets

$$-1 \leq \frac{\langle x, y\rangle}{|x||y|} \leq +1, \text{ (wenn } |x||y| \neq 0),$$

sodaß also dieser Bruch im Wertebereich der Cosinus-Funktion liegt.
Für Spaltenvektoren rechnet man sofort nach:

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2\langle x, y\rangle = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y|\left(\frac{\langle x, y\rangle}{|x||y|}\right).$$

Andrerseits haben wir ja den Cosinussatz, wobei φ den von Ortsvektoren x und y eingeschlossenen Winkel bedeute:

$$|x - y|^2 = |x|^2 + |y|^2 - 2|x||y| \cos\varphi.$$

Also haben wir in dem Bruch $\frac{\langle x, y\rangle}{|x||y|}$ den Cosinus des von x und y eingeschlossenen Winkels.
Insbesondere motiviert das die folgende

Definition O.25 (Orthogonal) *Zwei Vektoren* $x, y \in \mathbb{R}^3$ *heißen orthogonal, abgekürzt* $x \perp y$ *wenn ihr Skalarprodukt verschwindet, d.h. wenn* $\langle x, y\rangle = 0$.

Man beachte, daß nach dieser Definition der Nullvektor 0 zu *jedem* Vektor orthogonal ist.

Das Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$

Wir hatten bisher zwei Vektoren

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

über das Skalarprodukt eine Zahl, nämlich $\langle x, y \rangle = \xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3$ zugeordnet. Im $\mathbb{R}^3$ kann man nun auch ein Produkt einführen, das zwei Vektoren wieder einen Vektor zuordnet.

Definition O.26 (Vektorprodukt im $\mathbb{R}^3$) *Zu zwei Vektoren*

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \eta_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$$

sei

$$x \times y := \begin{pmatrix} \xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2 \\ \xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3 \\ \xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1 \end{pmatrix}.$$

Für diese scheinbar komplizierte Definition werden wir eine sehr einfache geometrische Interpretation finden. Zunächst stellen wir einige Eigenschaften des Vektorproduktes zusammen.

Satz O.27 *Für beliebige $x, y, z \in \mathbb{R}^3, \lambda, \mu \in R$ gelten*

1. *die Distributivgesetze:*

$$(\lambda x + \mu y) \times z = \lambda(x \times z) + \mu(y \times z),$$
$$x \times (\lambda y + \mu z) = \lambda(x \times y) + \mu(x \times z),$$

2. *$\times$ ist antisymmetrisch: $x \times y = -(y \times x)$,*
3. *x und y sind je orthogonal zu $x \times y$, d.h. $\langle x, (x \times y) \rangle = \langle y, (x \times y) \rangle = 0$,*
4. *Bezeichnet φ den wie oben über den Cosinus-Satz erklärten Winkel zwischen x und y, so ist*

$$|x \times y|^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 - \langle x, y \rangle^2 = |x|^2 \cdot |y|^2 \sin^2 \varphi,$$

5. *Für die kanonischen Einheitsvektoren gilt die folgende Multiplikationstabelle*

$\times$	e_1	e_2	e_3
e_1	0	e_3	$-e_2$
e_2	$-e_3$	0	e_1
e_3	e_2	$-e_1$	0

6. *Es ist $x \times y = 0$ genau dann, wenn Zahlen λ, μ existieren, für die $|\lambda| + |\mu| > 0$, aber $\lambda x + \mu y = 0$ ist.*

Beweis: 1. bis 5. kann man durch einfaches Nachrechnen beweisen. Als Beispiel zeigen wir 4.:

$$\begin{aligned}|x \times y|^2 &= (\xi_2\eta_3 - \xi_3\eta_2)^2 + (\xi_3\eta_1 - \xi_1\eta_3)^2 + (\xi_1\eta_2 - \xi_2\eta_1)^2 \\ &= (\xi_1\eta_2)^2 + (\xi_1\eta_3)^2 + (\xi_2\eta_1)^2 + (\xi_2\eta_3)^2 + (\xi_3\eta_1)^2 + (\xi_3\eta_2)^2 \\ &- 2(\xi_1\xi_2\eta_1\eta_2 + \xi_1\xi_3\eta_1\eta_3 + \xi_2\xi_3\eta_2\eta_3) \\ &= (\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)(\eta_1^2 + \eta_2^2 + \eta_3^2) - (\xi_1\eta_1 + \xi_2\eta_2 + \xi_3\eta_3)^2 \\ &= |x|^2|y|^2 - \langle x, y\rangle^2.\end{aligned}$$

Zu 6.: Ist $y = 0$, so ist $x \times y = 0$ und $0 \cdot x + 1 \cdot y = 0$.
Sei also $y \neq 0$. Ist $x \times y = 0$, so ist nach 4. $|x||y| = |\langle x, y\rangle|$. Damit gibt es nach Satz O.23 ein $\rho \in \mathbb{R}$ mit $x = \rho y$ oder $1 \cdot x + (-\rho) \cdot y = 0$.
Sei nun umgekehrt $\lambda x + \mu y = 0$, aber nicht $\lambda = \mu = 0$. Wegen $y \neq 0$ ist notwendig $\lambda \neq 0$, also $x = -\frac{\mu}{\lambda} y$. Dann ist mit $\rho := -\frac{\mu}{\lambda}$:

$$x \times y = (\rho y) \times y = \rho(y \times y) = y \times (\rho y) = y \times x = -(x \times y),$$

somit $x \times y = 0$. □

Interpretieren wir unsere Vektoren im geometrischen Raum, wobei wir das übliche Cartesische Koordinatensystem verwenden, sodaß also die drei kanonischen Einheitsvektoren aufeinander senkrecht stehen und entsprechend der "Rechte - Hand - Regel" orientiert sind, so haben wir mit dem letzten Satz die folgenden Aussagen gezeigt:

Satz O.28 *Das Vektorprodukt beschreibt in Koordinaten den Übergang von zwei Ortsvektoren x, y zu einem dritten Vektor z mit folgenden Eigenschaften:*

1. *z steht senkrecht auf x und auf y.*
2. *Die Länge von z ist gleich der Fläche des von x und y aufgespannten Parallelogrammes.*
3. *x, y, z bilden in dieser Reihenfolge ein positiv orientiertes System.*

Die ersten beiden Aussagen stehen in Satz O.27, die dritte können wir im Augenblick noch nicht beweisen, da uns für einen allgemeinen Begriff von Orientierung noch die Grundlagen fehlen.

Aus der Kombination von Vektorprodukt und Skalarprodukt erhalten wir das sogenannte "Spat-Produkt".

Definition O.29 (Spatprodukt) *Zu Vektoren $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ heißt $\langle x, y \times z\rangle$ das "Spatprodukt" oder die "Determinante". Wir notieren auch*

$$\det(x, y, z) := \langle x, y \times z\rangle.$$

Geometrisch interpretiert liefert das Spatprodukt das Volumen des von x, y, z aufgespannten Parallelepipedes, auch "Spat" genannt. Das Vorzeichen gibt dabei an, ob die Vektoren x, y, z in dieser Reihenfolge positiv oder negativ orientiert sind.
Rechnet man das Spatprodukt in Komponenten aus, so erhält man die Darstellung

$$\det(x, y, z) = \xi_1\eta_2\zeta_3 + \xi_2\eta_3\zeta_1 + \xi_3\eta_1\zeta_2 - \xi_3\eta_2\zeta_1 - \xi_1\eta_3\zeta_2 - \xi_2\eta_1\zeta_3.$$

Als Merkregel für das Bilden dieses Spatproduktes eignet sich folgendes Schema: Man schreibe zunächst die ersten beiden Vektoren nochmal rechts daneben hin und bilde dann die drei Produkte von links oben nach rechts unten (—) und subtrahiere von deren Summe die drei Produkte von links unten nach rechts oben (- - -).

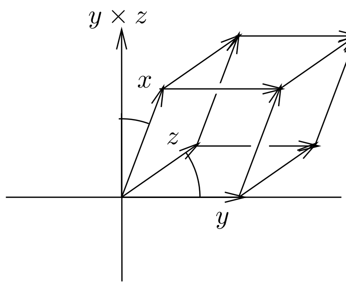
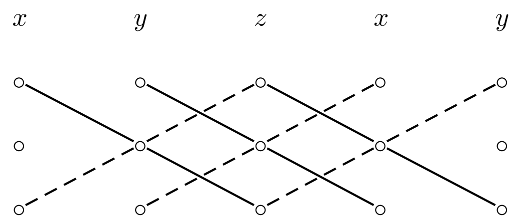


Abbildung 2



Aus den Rechenregeln für das Skalarprodukt und das Vektorprodukt ergeben sich sofort an Regeln für das Spatprodukt oder die Determinante:

Satz O.30

D1: $\det(x, y, z)$ *ist linear in jedem Argument, d.h. für alle* $x, x', y, z \in \mathbb{R}^3$ *und* $\lambda, \lambda' \in \mathbb{R}$ *ist*

$$\det(\lambda x + \lambda' x', y, z) = \lambda \det(x, y, z) + \lambda' \det(x', y, z)$$

und analog in den anderen Argumenten.

D2: Sind unter den Vektoren x, y, z *zwei gleich, so ist* $\det(x, y, z) = 0$.

D3: Für die kanonischen Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 *ist* $\det(e_1, e_2, e_3) = 1$.

Beweis: D1 folgt unmittelbar aus der Linearität des Skalarproduktes und des Vektorproduktes in jedem einzelnen Argument.
D2: Ist $x = y$ oder $x = z$ so folgt D2 aus Satz O.27,3., für $y = z$ folgt es aus Satz O.27,6..
D3 rechnen Sie mal selber nach! □

Für den Umgang mit Determinanten sind folgende Regeln nützlich:

Satz O.31

1. *Addiert man zu einem Argument ein Vielfaches eines anderen Argumentes, so ändert sich der Wert der Determinante nicht.*
2. *Vertauscht man zwei Argumente, so multipliziert sich die Determinante mit dem Faktor* -1.

Beweis: *Zu 1.:*

$$\det(x + \lambda y, y, z) \overset{D1}{=} \det(x, y, z) + \lambda \det(y, y, z) \overset{D2}{=} \det(x, y, z).$$

Zu 2.: Wir verwenden laufend Teil 1. und die Regel D1:

$$\begin{aligned}\det(y,x,z) &= \det(y+x,x,z) = \det(y+x,x-(y+x),z)\\ &= \det(y+x,-y,z) = \det(x,-y,z) = -\det(x,y,z)\end{aligned}$$

Die anderen Fälle gehen wieder analog. □

Die Bedeutung der Determinante wird sich im weiteren ergeben. Zuvor noch ein zentraler Begriff:

Definition O.32 (Linear abhängig, linear unabhängig)
Es seien $x_1, x_2, ..., x_n$ Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Gibt es dann Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n$, die nicht sämtlich $= 0$ sind, sodaß $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0$ ist, so heißen $x_1, x_2, ..., x_n$ "linear abhängig". Sind sie nicht abhängig, so heißen sie "linear unabhängig".

Sind $x_1, x_2, ..., x_n$ linear unabhängig, so kann also mit Zahlen $\lambda_i \in \mathbb{R}$ eine Gleichung $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_n x_n = 0$ nur bestehen, wenn $\lambda_1 = \lambda_2 = ... = \lambda_n = 0$.
Die Verbindung dieser Begriffe liefert

Satz O.33 *Es seien x, y, z Vektoren im $\mathbb{R}^3$. Dafür gelten*

1. *Die folgenden Aussagen a) und b) sind äquivalent:*
   a) $x \times y \neq 0$, b) x, y *sind linear unabhängig.*
2. *Die folgenden Aussagen a), b) und c) sind äquivalent:*
   a) $\det(x, y, z) \neq 0$,
   b) *Jedes $u \in \mathbb{R}^3$ besitzt eine eindeutige Darstellung als*
   $$u = \lambda x + \mu y + \nu z.$$
   c) *x, y, z sind linear unabhängig.*
3. *Im $\mathbb{R}^3$ sind je mindestens vier Vektoren linear abhängig.*

Beweis: *Zu 1.:* Dies ist die Aussage von Satz O.27,6..
Zu 2.: Da wir später im allgemeineren Rahmen diesen Sachverhalt untersuchen werden, seien hier nur ein paar geometrische Überlegungen dazu angestellt.
Wenn die $\det(x, y, z) \neq 0$ ist, d.h. der aufgespannte Spat nicht zusammenklappt, dann liegen die drei Vektoren x, y, z nicht schon in einer Ebene. Dann kann man aber zu einem beliebigen Raumpunkt u den eindeutig bestimmten Spat bilden, der u und 0 als Ecken hat und dessen Kanten parallel zu x bzw. y bzw. z sind. Daraus hat man sofort eine Darstellung der Form $u = \lambda x + \mu y + \nu z$, die überdies eindeutig bestimmt ist.
Dann muß aber auch die Darstellung der Null eindeutig sein, d.h. nur trivial möglich, was die Eindeutigkeit liefert.
Schließlich können unabhängige Vektoren nicht in einer Ebene liegen, somit ist ihr Spat nicht ausgeartet und damit ihre Determinante $\neq 0$.
Zu 3.: Kommt später. □

Orthonormalsysteme und Drehungen im $\mathbb{R}^3$

Definition O.34 (Orthogonalsytem, Orthonormalsystem) *Drei Vektoren x_1, x_2, $x_3 \in \mathbb{R}^3$, von denen je zwei zueinander orthogonal sind, heißen ein "Orthogonalsystem". Sind sie zusätzlich normiert, d.h. haben die Vektoren alle die Länge $|x_i| = 1$, so heißen sie ein "Orthonormalsystem", abgekürzt ONS.*

Satz und Definition O.35 (Orientierung)

1. *Bilden* $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$ *ein Orthogonalsystem und sind alle* $\neq 0$, *so sind sie linear unabhängig.*
2. *Bilden sie sogar ein ONS, so ist ihre Determinante entweder* $+1$ *oder* -1.
   Ein ONS mit Determinante $+1$ *heißt "positiv orientiert", eines mit Determinante* -1 *"negativ orientiert".*

Beweis: Zu 1.: Sei $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3 = 0$. Multiplizieren mit x_1 liefert

$$0 = \lambda_1 \langle x_1, x_1 \rangle + \lambda_2 \langle x_2, x_1 \rangle + \lambda_3 \langle x_3, x_1 \rangle = \lambda_1 \langle x_1, x_1 \rangle,$$

sodaß also $\lambda_1 = 0$. Analog zeigt man, daß notwendig die anderen Koeffizienten verschwinden.

Zu 2.: Da x_1, x_2, x_3 linear unabhängig sind, haben wir eine Darstellung

$$x_2 \times x_3 = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3.$$

Die Multiplikation mit x_2 bzw. mit x_3 liefert $\lambda_2 = \lambda_3 = 0$, sodaß $x_2 \times x_3 = \lambda_1 x_1$. Da alle x_i die Norm 1 haben und x_2, x_3 orthogonal sind, ist nach Satz O.27, 4. auch $|x_2 \times x_3| = 1$ und somit $\lambda_1 = \pm 1$. Schließlich ist

$$\det(x_1, x_2, x_3) = \langle x_1, x_2 \times x_3 \rangle = \langle x_1, \lambda_1 x_1 \rangle = \lambda_1 \langle x_1, x_1 \rangle = \lambda_1 = \pm 1.$$

$\square$

Bezüglich eines ONS lassen sich die Vektoren im $\mathbb{R}^3$ besonders einfach darstellen.

Satz O.36 *Sind* $x_1, x_2, x_3 \in \mathbb{R}^3$ *ein ONS, so gelten*

1. $y = \langle y, x_1 \rangle x_1 + \langle y, x_2 \rangle x_2 + \langle y, x_3 \rangle x_3$,
2. $|y|^2 = \langle y, x_1 \rangle^2 + \langle y, x_2 \rangle^2 + \langle y, x_3 \rangle^2$.

Beweis: Zu 1.: Da die x_i ein ONS bilden, kann man jedenfalls y darstellen als

$$y = \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \lambda_3 x_3.$$

Bildet man das Skalarprodukt mit x_i, so folgt sofort $\lambda_i = \langle y, x_i \rangle$.
2. erhält man durch Multiplikation der Darstellung in 1. mit y. $\square$

Schauen wir nun noch kurz auf Drehungen im $\mathbb{R}^3$!
Im Raum bilden die drei kanonischen Einheitsvektoren e_1, e_2, e_3 ein ONS. Dabei spannen e_2 und e_3 zusammen eine Ebene auf, auf der e_1 senkrecht steht. Denken wir nun diesen Vektor e_1 als "Drehachse" und darum den ganzen Raum gedreht. Dann stellen wir fest:

– Vektoren, die ganz in der e_2, e_3 - Ebene liegen, verhalten sich wie bei einer ebenen Drehung.

– Vektoren, die in Richtung von e_1 zeigen, d.h. auf der Drehachse liegen, bleiben unverändert.

– Summen und Vielfache von Vektoren gehen in Summe bzw. Vielfaches über.

Sei nun $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3$ ein beliebiger Vektor, dazu $x' = \xi_1' e_1 + \xi_2' e_2 + \xi_3' e_3$ der gedrehte. Wir setzen

$$y := \xi_1 e_1, \; y' := \xi_1' e_1, \; z := \xi_2 e_2 + \xi_3 e_3, \; z' := \xi_2' e_2 + \xi_3' e_3,$$

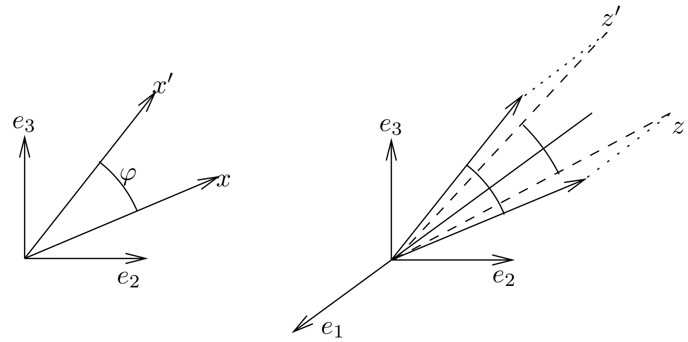


Abbildung 3

sodaß $x = y + z$ und $x' = y' + z'$. Dann liefern obige Überlegungen, daß $y = y'$ und daß z' aus z durch eine ebene Drehung entsteht, d.h.

$$\xi_1 = \xi_1', \quad \begin{pmatrix} \xi_2' \\ \xi_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\varphi & -\sin\varphi \\ \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

Führen wir nun sogenannte 3×3 - Matrizen ein:

$$A = \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \quad (\alpha_{ij} \in \mathbb{R},\ i, j = 1, 2, 3.)$$

Wir erklären die Operation *Matrix* $\times$ *Spalte* $=$ *Spalte* analog zum zweidimensionalen Fall durch

$$\begin{aligned} Ax := \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} &:= \begin{pmatrix} \alpha_{11}\xi_1 + \alpha_{12}\xi_2 + \alpha_{13}\xi_3 \\ \alpha_{21}\xi_1 + \alpha_{22}\xi_2 + \alpha_{23}\xi_3 \\ \alpha_{31}\xi_1 + \alpha_{32}\xi_2 + \alpha_{33}\xi_3 \end{pmatrix} \\ = \xi_1 \begin{pmatrix} \alpha_{11} \\ \alpha_{21} \\ \alpha_{31} \end{pmatrix} + \xi_2 \begin{pmatrix} \alpha_{12} \\ \alpha_{22} \\ \alpha_{32} \end{pmatrix} + \xi_3 \begin{pmatrix} \alpha_{13} \\ \alpha_{23} \\ \alpha_{33} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Merkregel: Mit "mal" im Sinne von Skalarprodukt gilt

erste Zeile mal Spalte $=$ *erste Komponente,*
zweite Zeile mal Spalte $=$ *zweite Komponente,*
dritte Zeile mal Spalte $=$ *dritte Komponente.*

Mit dieser Schreibweise können wir dann das oben abgeleitete Ergebnis über unsere Drehung um die e_1-Achse folgendermaßen notieren:
Ist $x' = \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \end{pmatrix}$ der gegenüber $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$ um den Winkel φ um die e_1-Achse gedrehte Vektor, so ist

$$x' = \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \\ \xi_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}$$

Die hier auftretende Matrix nennen wir wieder eine Drehmatrix. Sie hat hier eine spezielle Gestalt, weil wir die Achse der Drehung als die Richtung unseres Einheitsvektors e_1 genommen haben.
Für den allgemeinen Fall erklären wir zunächst wieder ein *Produkt von Matrizen* folgendermaßen:

Sind A, B je 3×3-Matrizen, so sei die 3×3-Matrix AB erklärt durch
(erste Spalte von AB) $:= A \times$ (erste Spalte von B),
(zweite Spalte von AB) $:= A \times$ (zweite Spalte von B),
(dritte Spalte von AB) $:= A \times$ (dritte Spalte von B).

Ferner erklären wir zu einer 3×3-Matrix A die *"transponierte Matrix"* A^T durch Spiegeln an der Hauptdiagonalen, d.h.

$$\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}^T = \begin{pmatrix} a & d & g \\ b & e & h \\ c & f & i \end{pmatrix}.$$

Dabei werden also Zeilen zu Spalten und Spalten zu Zeilen.
Mit dem Skalarprodukt $\langle x, y \rangle$ in $\mathbb{R}^3$ gilt dann

Satz O.37 *Bezeichnet $a_{.i}$ die i-te Spalte von A und $b_{.j}$ die j-te Spalte von B, so ist*

$$A^T B = (\langle a_{.i}, b_{.j} \rangle) = \begin{pmatrix} \langle a_{.1}, b_{.1} \rangle & \langle a_{.1}, b_{.2} \rangle & . \\ . & . & . \\ . & . & . \end{pmatrix}$$

Bilden also die Spalten von A ein ONS, so ist ja

$$\langle a_{.i}, a_{.j} \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$$

(das ist das sog. KRONECKER-Symbol) und damit also

$$A^T A = (\delta_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Damit können wir nun die allgemeine Drehung im $\mathbb{R}^3$ beschreiben.
Es sei $a_{.1}, a_{.2}, a_{.3}$ ein ONS, wobei $a_{.1}$ in Richtung der Drehachse zeige. Die 3×3 - Matrix A habe als Spalten gerade diese $a_{.i}$.
Ein Vektor auf der Achse, also von der Form

$$x = \xi_1 a_{.1}$$

bleibt bei der Drehung in Ruhe, ein Vektor in der $a_{.2}, a_{.3}$ - Ebene wird wie bei einer ebenen Drehung verändert, d.h.

$$x = \xi_2 a_{.2} + \xi_3 a_{.3} \mapsto x' := (\xi_2 \cos\varphi - \xi_3 \sin\varphi) a_{.2} + (\xi_2 \sin\varphi + \xi_3 \cos\varphi) a_{.3}.$$

Damit gilt für einen allgemeinen Vektor

$$x = \xi_1 a_{.1} + \xi_2 a_{.2} + \xi_3 a_{.3} \mapsto x' := \xi_1 a_{.1} + (\xi_2 \cos\varphi - \xi_3 \sin\varphi) a_{.2} + (\xi_2 \sin\varphi + \xi_3 \cos\varphi) a_{.3}.$$

Dies kann man schreiben als

$$
\begin{aligned}
x &= A \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}, \\
x' &= A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \\
&= A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot A^T \cdot A \cdot \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \\
&= A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot A^T \cdot x.
\end{aligned}
$$

Damit haben wir

Satz O.38 *Die Drehung im Raum um den Winkel φ wird beschrieben durch eine Matrix der Form*

$$
R = A \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ 0 & \sin\varphi & \cos\varphi \end{pmatrix} \cdot A^T,
$$

wobei die Spalten von A ein Orthonormal-System bilden, in dem die erste in Richtung der Drehachse zeigt.

Das Umgehen mit Matrizen wird zu unseren ständigen Hilfsmitteln gehören. Eine wichtige Sichtweise sei deshalb kurz angesprochen:
Eine 3×3 Matrix A generiert durch die Vorschrift $x \mapsto y := Ax$ eine Abbildung des $\mathbb{R}^3$ in sich, die also jedem Vektor x sein "Bild" $y := Ax$ zuordnet und für die man leicht die folgenden Eigenschaften nachrechnet:

Satz O.39 *Für alle $x, y \in \mathbb{R}^3, \lambda, \mu \in \mathbb{R}$ ist*

$$
A(\lambda x + \mu y) = \lambda Ax + \mu Ay.
$$

Wir sagen dafür auch, die von A vermittelte Abbildung ist "linear" oder ein "Homomorphismus".

Ferner gilt wieder

Die Spalten sind die Bilder der Einheitsvektoren!

Die komplexen Zahlen $\mathbb{C}$

Im $\mathbb{R}^2$ haben wir die Addition

$$
\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 + \eta_1 \\ \xi_2 + \eta_2 \end{pmatrix}.
$$

Wir können hier noch eine weitere Operation erklären, die wir "Multiplikation" nennen, indem wir setzen

$$
\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} \xi_1\eta_1 - \xi_2\eta_2 \\ \xi_1\eta_2 + \xi_2\eta_1 \end{pmatrix}.
$$

Für die kanonischen Einheitsvektoren $e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ist dann

$$e_1 \cdot e_1 = e_1,\ e_1 \cdot e_2 = e_2 \cdot e_1 = e_2,\ e_2 \cdot e_2 = -e_1.$$

Durch simples Nachrechnen überzeugt man sich von folgenden Eigenschaften dieser Multiplikation:

- Die Multiplikation ist assoziativ, d.h. $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$.
- Die Multiplikation ist kommutativ, d.h. $x \cdot y = y \cdot x$.
- Es gilt das Distributivgesetz $(x + y) \cdot z = x \cdot z + y \cdot z$
- Der Vektor e_1 ist das "Einselement", d.h. für jedes x ist $e_1 \cdot x = x \cdot e_1 = x$.

Damit haben wir für den $\mathbb{R}^2$ mit diesen beiden Operationen schon fast alle Eigenschaften beisammen, die wir für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ in Fakt O.1 notiert hatten. Was uns noch fehlt, ist das Dividieren.
Dazu führen wir zunächst noch eine weiter Operation ein, das sogenannte "Konjugieren":
Zu einem Vektor

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$$

sei $\overline{x}$ der Vektor, dessen zweite Komponente mit -1 multipliziert ist, also

$$\overline{x} := \begin{pmatrix} \xi_1 \\ -\xi_2 \end{pmatrix} = \xi_1 e_1 - \xi_2 e_2.$$

Man nennt $\overline{x}$ den zu x "konjugierten " Vektor. Diese Operation des Konjugierens verträgt sich, wie man leicht nachrechnet, mit dem Addieren und dem Multiplizieren in folgendem Sinne:

Satz O.40 *Es gelten die Rechenregeln*

1. $\overline{x + y} = \overline{x} + \overline{y}$,
2. $\overline{x \cdot y} = \overline{x} \cdot \overline{y}$,
3. $\overline{\overline{x}} = x$
4. *Mit* $|x|^2 := \xi_1^2 + \xi_2^2$ *ist* $x \cdot \overline{x} = |x|^2 e_1$.
5. *Schließlich ist* $\overline{x} = x$ *genau dann, wenn in dem Vektor* $x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}$ *die zweite Komponente* $\xi_2 = 0$ *ist.*

Nun ist für $x \neq 0$ auch $|x|^2 \neq 0$ und damit

$$x \cdot (\frac{1}{|x|^2}\overline{x}) = \frac{1}{|x|^2}|x|^2 e_1 = e_1.$$

Damit ist für ein beliebiges y dann auch

$$x \cdot (\frac{1}{|x|^2}\overline{x} \cdot y) = e_1 \cdot y = y,$$

sodaß wir also in

$$u := \frac{1}{|x|^2}\overline{x} \cdot y$$

eine und zwar die einzige Lösung von $x \cdot u = y$ gefunden haben.
Damit haben wir

Definition und Satz O.41 *Für den $\mathbb{R}^2$ mit den beiden Operationen $+$ und $\cdot$ gelten alle Eigenschaften, die wir für die reellen Zahlen $\mathbb{R}$ in Fakt O.1 notiert hatten. Wir nennen die so gewonnene Struktur den "Körper $\mathbb{C}$ der komplexen Zahlen". Als übliche Schreibweise notiert man statt*

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2$$

einfach

$$x = \xi_1 + i\,\xi_2, \ \text{(wobei natürlich die } \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R},)$$

speziell also für e_1 einfach 1 und für e_2 einfach i. Es ist dann

$$1 \cdot 1 = 1,\, 1 \cdot i = i \cdot 1 = i,\, i \cdot i = -1.$$

Man nennt

- *die Zahl i die "imaginäre Einheit",*
- *die Zahl $\mathrm{Re}(x) := \xi_1 = \frac{1}{2}(x + \overline{x})$ den "Realteil" von x und*
- *die Zahl $\mathrm{Im}(x) := \xi_2 = \frac{1}{2i}(x - \overline{x})$ den "Imaginärteil" von x,*
- *die Zahl $|x| := \sqrt{(\xi_1^2 + \xi_2^2)} = \sqrt{x \cdot \overline{x}}$ den "Betrag" von x.*
- *Das Konjugieren macht aus $x = \xi_1 + i\,\xi_2$ die zu x "konjugiert komplexe" Zahl $\overline{x} = \xi_1 - i\,\xi_2$.*

Es ist zweckmäßig, die Vorstellung von dem Bereich der komplexen Zahlen als der reellen Ebene mit den oben eingeführten Operationen durchaus zu behalten. Man spricht in diesem Zusammenhang von der GAUSS-schen Zahlenebene und nennt die e_1- Achse die reelle, die e_2-Achse die imaginäre Achse. Komplexe Zahlen, die auf der rellen Achse liegen, addieren und multiplizieren sich wie reelle Zahlen. Wir nennen sie deshalb auch kurz reell. Komplexe Zahlen auf der imaginären Achse heißen "rein imaginär".

Behalten wir die Anschauung der GAUSS-schen Zahlenebene noch etwas bei. Der Betrag $|x|$ der komplexen Zahl x ist ja nach dem Satz des PYTHAGORAS gerade die gewöhnliche Länge des Vektors x. Die komplexen Zahlen mit dem Betrag 1 liegen also alle auf dem (Einheits-)Kreis mit Radius 1 um den Nullpunkt und jede solche Zahl kann man also mit einem wohldefinierten Winkel φ mit $0 \le \varphi < 2\pi$ darstellen als

$$E(\varphi) = \cos\varphi + i \sin\varphi.$$

Dabei ist φ der Winkel zwischen der reellen Achse und dem Vektor $E(\varphi)$.
Dafür ist

$$\begin{aligned} E(\varphi) \cdot E(\psi) &= (\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot (\cos\psi + i\sin\psi) \\ &= (\cos\varphi\cos\psi - \sin\varphi\sin\psi) + i(\cos\varphi\sin\psi + \sin\varphi\cos\psi) \\ &= \cos(\varphi + \psi) + i\sin(\varphi + \psi) \\ &= E(\varphi + \psi). \end{aligned}$$

Nun kann man komplexe Zahlen stets schreiben als

$$x = |x| \cdot E(\varphi), \quad y = |y| \cdot E(\psi)$$

und erhält dafür dann

$$x \cdot y = |x| \cdot |y| \cdot E(\varphi) \cdot E(\psi) = |x| \cdot |y| \cdot E(\varphi + \psi).$$

Durch die Multiplikation mit x wird die komplexe Zahl y (als Vektor) also in der GAUSS-schen Zahlenebene um den zu x gehörigen Winkel φ gedreht und um den Faktor $|x|$ gestreckt.
Die Multiplikation mit komplexen Zahlen ist also geometrisch eine Drehstreckung.

Die eben abgeleiteten Eigenschaften der Multiplikation erlauben es, die aus dem Reellen bekannte Exponentialfunktion

$$\mathbb{R} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{R}$$

in das Komplexe fortzusetzen, wo sie an vielerlei Stellen als praktisches Hilsfmittel verwendbar ist. Für sie gilt bekanntlich

$$\begin{aligned} &e^0 = 1, \\ &e^{x+y} = e^x \cdot e^y \text{ für beliebige } x, y \in \mathbb{R}, \text{ und speziell} \\ &e^x \cdot e^{-x} = 1. \end{aligned}$$

Wir erklären nun für komplexe Zahlen

Definition O.42 *Für $x = \rho + i\omega$ sei*

$$e^x := e^{\rho+i\omega} := e^\rho \cdot E(\omega) = e^\rho \cdot (\cos\omega + i\sin\omega).$$

Die dadurch definierte Funktion $\mathbb{C} \ni x \mapsto e^x \in \mathbb{C}$ heißt die "komplexe Exponentialfunktion".
Speziell ist darin enthalten die sog. EULER*-Formel*

$$e^{i\omega} = \cos\omega + i\sin\omega.$$

In dieser Definition haben wir bei dem Term e^ρ die reelle Exponentialfunktion benutzt.
Untersuchen wir diese Festsetzung etwas näher:
Ist x reell, d.h $x = \rho, \omega = 0$, so ist wegen $E(0) = \cos 0 + i\sin 0 = 1 + i \cdot 0 = 1$ dann $e^x = e^\rho$.
Für reelle x stimmen also die alte und die neue Exponentialfunktion überein, wir setzen nur die alte Funktion fort auf komplexe Argumente.
Ist $x = \rho + i\omega,\ y = \sigma + i\varphi$, so ist

$$\begin{aligned} e^x \cdot e^y &= e^\rho \cdot E(\omega) \cdot e^\sigma \cdot E(\varphi) \\ &= e^{\rho+\sigma} \cdot E(\omega + \varphi) \\ &= e^{x+y}, \end{aligned}$$

sodaß auch hier die bekannte Funktionalgleichung gilt. Insbesondere ist wieder, also auch für komplexe Werte von x

$$e^x \cdot e^{-x} = 1.$$

Geht man schließlich von x über zu $\overline{x}$, ändert man also das Vorzeichen des Imaginärteils ω von x, so ändert man auch das Vorzeichen von $\sin\omega$ und damit das Vorzeichen des Imaginärteils von e^x. Wir fassen dies zusammen zu

Satz O.43 *Für die ins Komplexe fortgesetzte Exponentialfunktion*

$$x = \rho + i\omega \mapsto e^x := e^{\rho+i\omega} := e^\rho \cdot E(\omega) = e^\rho \cdot (\cos\omega + i\sin\omega).$$

gelten

$$\begin{aligned} e^0 &= 1 \\ e^{x+y} &= e^x \cdot e^y \\ e^{-x} &= \frac{1}{e^x} \\ e^{\overline{x}} &= \overline{e^x}. \end{aligned}$$

Man erhält damit über die EULER-Formel etwa

Fakt O.44 *Für* $\omega \in \mathbb{R}$ *ist*

$$\begin{aligned} \cos\omega &= \frac{1}{2}(e^{i\omega} + e^{-i\omega}), \\ \sin\omega &= \frac{1}{2i}(e^{i\omega} - e^{-i\omega}). \end{aligned}$$

Aus der Schule ist bekannt, daß die reelle Exponentialfunktion stetig und sogar beliebig oft stetig differenzierbar ist, wobei sich bei der Ableitung die ursprüngliche Funktion im wesentlichen wieder reproduziert. Genauer gilt:
Ist $a \in \mathbb{R}$, so ist die für alle *reellen* Werte von t erklärte Funktion

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) := e^{at} \in \mathbb{R}$$

differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(t) = ae^{at}.$$

Dieselbe Aussage können wir nun für die *komplexe* Exponentialfunktion herleiten. Für eine komplexe Zahl $a = \alpha + i\beta$ und *reelles* t ist $a \cdot t = \alpha t + i\beta t$ und somit

$$e^{a\cdot t} = e^{\alpha t} \cdot E(\beta t) = e^{\alpha t} \cdot (\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)).$$

Diese Funktion ist also zusammengesetzt aus der reellen Exponentialfunktion und den reellen Funktionen $\cos(\beta t)$ und $\sin(\beta t)$. Letztere haben bekanntlich die Ableitungen

$$(\cos(\beta t))' = -\beta\sin(\beta t), \quad (\sin(\beta t))' = \beta\cos(\beta t).$$

Dann ist aber nach der Produktregel beim Ableiten:

$$\begin{aligned} (e^{a\cdot t})' &= (\alpha e^{\alpha t}) \cdot (\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) + e^{\alpha t} \cdot (-\beta\sin(\beta t) + i\beta\cos(\beta t)) \\ &= e^{\alpha t}[(\alpha\cos(\beta t) - \beta\sin(\beta t)) + i(\alpha\sin(\beta t) + \beta\cos(\beta t))] \\ &= (\alpha + i\beta)e^{\alpha t}(\cos(\beta t) + i\sin(\beta t)) \\ &= (\alpha + i\beta) \cdot e^{(\alpha+i\beta)t} \\ &= a \cdot e^{a\cdot t}. \end{aligned}$$

Wir haben damit auch für die komplexe Erweiterung der Exponentialfunktion die altbekannte Ableitungsformel erhalten:

Satz O.45 *Für jede komplexe Zahl* $a \in \mathbb{C}$ *ist die für alle reellen Werte von* t *erklärte Funktion*

$$\mathbb{R} \ni t \mapsto f(t) := e^{at} \in \mathbb{C}$$

differenzierbar mit der Ableitung

$$f'(t) = a \cdot e^{at}.$$

Bekanntlich ist $\cos 2\pi = 1$, $\sin 2\pi = 0$ und damit

$$e^{2\pi i} = e^{i2\pi} = \cos 2\pi + i \sin 2\pi = 1.$$

Ferner bekommt man aus Satz O.43 für beliebige $x \in \mathbb{C}$

$$e^{2x} = e^{x+x} = e^x \cdot e^x = \left(e^x\right)^2$$

und damit allgemeiner für natürliche Zahlen k :

$$e^{kx} = e^{x+\ldots+x} = e^x \cdot \ldots \cdot e^x = \left(e^x\right)^k.$$

Dann ist insbesondere auch

$$e^{2\pi ik} = \left(e^{2\pi i}\right)^k = 1^k = 1$$

und dann auch für natürliche Zahlen n, k

$$\left(e^{\frac{2\pi i}{n}k}\right)^n = e^{n\frac{2\pi i}{n}k} = e^{2\pi ik} = 1.$$

Zu festem n sind für $k = 0, 1, \ldots, n-1$ diese n komplexen Zahlen paarweise verschieden und bilden auf dem Einheitskreis gerade die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks. Wir haben somit

Satz O.46 *Für jede natürliche Zahl n und jedes $k = 0, 1, \ldots, n-1$ ist*

$$\xi_k := e^{\frac{2\pi i}{n}k}$$

eine Lösung von $x^n = 1$, d.h. es ist $\left(\xi_k\right)^n = 1$.
Man nennt ξ_k eine "n-te Einheitswurzel".

Einige Grundbegriffe und Notationen

Als Grundlage für das Weitere müssen wir uns über einige Grundbegriffe und Notationen verständigen: Dabei muß manches jetzt noch auf einem unpräzisen naiven Standpunkt bleiben und kann erst später oder im Rahmen dieser Vorlesung überhaupt nicht exakt begründet werden.
Ein zentraler Begriff ist der der *Funktion* oder *Abbildung*, wobei in weiten Teilen der Mathematik beide Namen für den selben Begriff verwendet werden. Zu einer Funktion f gehören

- ein *Definitionsbereich* $D(f)$, der alles enthält, was abgebildet werden kann,
- ein *Bildbereich* $B(f)$, der sagt in welchen Bereich ich denn etwas abbilden will, und schließlich
- eine Vorschrift $D(f) \ni x \mapsto y := f(x) \in B(f)$, die angibt wie die Zuordnung von den Elementen $x \in D(f)$ zu Elementen $y \in B(f)$ konkret geschieht.

Hierbei darf also jedem $x \in D(f)$ immer nur genau ein $y \in B(f)$ zugeordnet werden, allerdings dürfen mehrere x dasselbe $y \in B(f)$ bekommen.
Wir sehen zwei Funktionen f und g als gleich an, wenn sie

- den selben Definitionsbereich haben, also $D(f) = D(g)$ ist, und
- auf dem gemeinsamen Definitionsbereich die Abbildungsvorschriften übereinstimmen, d.h. $f(x) = g(x)$ für alle $x \in D(f)$.

Mit der Schreibweise
$$f : X \to Y, \quad x \mapsto f(x)$$
bringen wir zum Ausdruck, daß $X = D(f)$, also der Definitionsbereich ist, ferner daß alle Funktionswerte in Y liegen, und daß $\mapsto$ die konkrete Zuordnungsvorschrift angibt. Etwa
$$f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}, \quad x \mapsto +\sqrt{x}.$$
Zwei Funktionen $f : X \to Y$ und $g : Z \to W$ kann man zusammensetzen indem man sie hintereinander ausführt, d.h. zuerst $x \mapsto f(x)$ und dann diesen Wert unter g abbildet, also $f(x) \mapsto g(f(x))$. Damit das gut geht, muß stets $f(x)$ in dem Definitionsbereich von g liegen, was durch $Y \subset Z$ gesichert ist.
Unter dieser Voraussetzung erhalten wir dann die Funktion
$$g \circ f : X \to W, \quad x \mapsto (g \circ f)(x) := g(f(x)).$$
Wir nennen eine Funktion $f : X \to Y$

- *surjektiv*, wenn es zu jedem $y \in Y$ ein $x \in X$ gibt, sodaß $f(x) = y$,
- *injektiv*, wenn zu je zwei verschiedenen Argumenten $x_1 \neq x_2$ aus X auch die Funktionswerte verschieden sind, d.h. $f(x_1) \neq f(x_2)$,
- *bijektiv*, wenn f sowohl injektiv wie auch surjektiv ist.

Als Definitionsbereich und als Bildbereich einer Funktion benutzen wir *Mengen*, worunter wir die Zusammenfassung von mathematischen Objekten, den *Elementen der Menge*, zu einem neuen Objekt, eben der *Menge* verstehen. Wir beschreiben eine Menge indem wir explizit oder implizit angeben, welche Elemente sie hat. – Bei diesem Vorgehen hat man sich zwar vor einigen logischen Fußangeln zu hüten, über die man näheres in einer Vorlesung über Mengenlehre erfahren könnte, die aber für uns keine wichtige Rolle spielen werden, sodaß wir hier darauf nicht weiter eingehen. –
Zwei Mengen sind gleich, wenn sie die selben Elemente haben.
Beispiel: Die Mengen $X = \{1, 2, 3\}$ und $Y = \{3, 1, 3, 2\}$ sind gleich. Da sie nur endlich viele Elemente haben, nennen wir sie *endliche Mengen.* Eine Menge, die gar kein Element besitzt, nennen wir die *leere Menge*, und wird mit $\emptyset$ bezeichnet.
Beispiele unendlicher Mengen, d.h. von Mengen mit unendlich vielen Elementen sind etwa die Zahlbereiche

- $\mathbb{N}$, die natürlichen Zahlen,
- $\mathbb{Z}$, die ganzen Zahlen,
- $\mathbb{Q}$, die rationalen Zahlen,
- $\mathbb{R}$, die reellen Zahlen und
- $\mathbb{C}$, die komplexen Zahlen.

Ist x ein Element der Menge X, so notieren wir $x \in X$, die Negation davon, also, daß x kein Element von X ist, als $x \notin X$.
Solche Terme wie $x \in X$, $x \notin X$ sind Beispiele von *Aussagen,* die wahr oder falsch sein können.
Sind A und B Aussagen, so können wir daraus neue Aussagen bilden, etwa

- $A \wedge B$, gelesen A *und* B. Sie ist genau dann wahr, wenn sowohl A als auch B wahr sind.

– $A \vee B$, gelesen A *oder* B. Sie ist genau dann wahr, wenn mindestens eine der beiden Aussagen A oder B wahr ist.

– $\neg A$, gelesen *non* A oder *nicht* A. Sie ist genau dann wahr, wenn A falsch ist.

Benutzen wir dies gleich, um aus gegebenen Mengen neue zu machen. Wir können etwa für Mengen X, Y bilden

– $X \cup Y := \{z \quad | \quad (z \in X) \vee (z \in Y)\}$, die *Vereinigung,*

– $X \cap Y := \{z \quad | \quad (z \in X) \wedge (z \in Y)\}$, den *Durchschnitt,*

– $X \setminus Y := \{z \quad | \quad (z \in X) \wedge (z \notin Y)\}$, die *Differenz,*

– $X \times Y := \{z = (x, y) \quad | \quad (x \in X) \wedge (y \in Y)\}$, das *Produkt.*

Vereinigung, Durchschnitt, Produkt lassen sich in naheliegender Weise auf mehr als zwei Mengen ausdehnen.
Gehört jedes Element von X auch zu Y, so nennen wir X eine *Teilmenge* von Y und Y eine *Obermenge* von X und notieren dafür

$$X \subset Y.$$

Will man ausdrücken, daß X eine *echte Teilmenge* von Y ist, d.h., daß die Teilmenge nicht schon die ganze ist, so schreibt man

$$X \subsetneqq Y.$$

Unter Benutzen der Symbole $\Leftrightarrow$ für logische Äquivalenz und $\Rightarrow$ für logische Implikation, können wir die oben umgangssprachlich formulierte Teilmengenbeziehung auch schreiben als

$$(X \subset Y) \Leftrightarrow ((x \in X) \Rightarrow (x \in Y)).$$

Schließlich führen wir noch sog. *Quantoren* ein, d.h. Symbole für "es gibt.." etc.
Ist X eine Menge, $A(x)$ eine Aussage, die für Elemente $x \in X$ sinnvoll ist, d.h. für jedes solche Element entweder wahr oder falsch ist, so notieren wir

– $\forall_{x \in X} A(x) \;:\Leftrightarrow$ ***Für alle*** $x \in X$ ***ist die Aussage*** $A(x)$ ***wahr,***

– $\exists_{x \in X} A(x) \;:\Leftrightarrow$ ***Es gibt ein*** $x \in X$ ***(evtl. auch mehrere), für das die Aussage*** $A(x)$ ***wahr ist,***

– $\dot{\exists}_{x \in X} A(x) \;:\Leftrightarrow$ ***Es gibt genau ein*** $x \in X$, ***für das die Aussage*** $A(x)$ ***wahr ist,***

Wir werden diese logischen Zeichen ab jetzt benutzen und so nebenbei handhaben lernen.

Sie kennen inzwischen Mengen und Funktionen. Aus einer Menge A haben wir die Menge $A \times A$ gebildet, die aus allen Paaren (a_1, a_2) von Elementen aus A besteht. Bei diesen Paaren braucht man nicht stehenbleiben, man kann Tripel, Quadrupel,..., allgemein n-tupel von Elementen von A bilden:

$$A^n := \{(a_1, a_2, ..., a_n) \quad | \quad a_i \in A,\ i = 1, 2, ..., n.\}$$

Dabei hat man $(a_1, a_2, ..., a_n)$ und $\{a_1, a_2, ..., a_n\}$ sauber zu unterscheiden. Es sind $(a_1, a_2, a_3 ..., a_n)$ und $(a_2, a_1, a_3, ..., a_n)$ verschiedene Tupel (sofern nicht gerade $a_1 = a_2$ ist), während die Mengen $\{a_1, a_2, a_3 ..., a_n\}$ und $\{a_2, a_1, a_3, ..., a_n\}$ ja dieselben Elemente haben, also gleich sind.

Bei den n-tupeln interessieren also nicht nur die vorkommenden Elemente, sondern auch deren Anordnung in eine Liste.
Wenn wir also etwa das 4-tupel $(7, 1, 3, 7) \in \mathbb{N}^4$ betrachten, so bedeutet dies:
An der ersten Stelle kommt 7, an der zweiten Stelle 1, an der dritten Stelle 3 und an der vierten Stelle wieder 7. Das kann man auch lesen als eine Kurzform der Abbildung

$$f : \{1, 2, 3, 4\} \to \mathbb{N} : f(1) = 7, f(2) = 1, f(3) = 3, f(4) = 7.$$

Allgemein können wir also ein n-tupel $(a_1, a_2, ..., a_n) \in A^n$ lesen als eine Funktion

$$f : \{1, 2, ..., n\} \to A : f(1) = a_1, f(2) = a_2, ..., f(n) = a_n.$$

Da es aber bequemer ist, das Tupel hinzuschreiben als die ganze Funktion zu erklären, haben die Mathematiker diesen Begriff des Tupels im Hinblick auf bestimmte Verwendungen noch etwas verallgemeinert zur *Familie*:
Für eine Funktion $f : I \to A,\ i \mapsto a_i := f(i),\ i \in I$ schreibt man dann auch kurz

$$(a_i \mid i \in I),$$

nennt dies eine *Familie* von Elementen von A mit der *Indexmenge* I.
Ist $J \subset I$, also eine Teilmenge, so nennt man

$$(a_i \mid i \in J),$$

eine *Teilfamilie* von $(a_i \mid i \in I)$, wobei in beiden Fällen demselben Index $i \in J$ derselbe Wert a_i zuzuordnen ist.
Zwei Spezialfälle, die etwas spitzfindig klingen, sich aber gelegentlich als sehr nützlich erweisen, seien extra erwähnt:

- Für $I = \emptyset$ erhalten wir die *leere* Familie,
- ferner kann man jede Menge X über $I := X, A := X, f : x \mapsto x$, d.h. $f = \mathrm{id}_X$ als Familie $(x_x \mid x \in X)$ auffassen.

Soweit dieses Vorkapitel.

Und eine letzte Vorbemerkung:

Fragen Sie, wenn etwas unklar ist!