

VA Vektor-Analyse

Kurven und Kurvenintegrale

Mit dem Begriff der Kurve verbinden wir die Vorstellung von einer Punktmenge, die das Bild eines evtl. uneigentlichen reellen Intervalles unter einer "schönen" Abbildung ist. Um von einer Tangente reden zu können, sollte die Abbildung differenzierbar sein. Dies reicht aber noch nicht ganz aus, um zu einer praktikablen Definition zu kommen.

Eine auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}^n$ erklärte C^r -Funktion ($r \geq 1$)

$$\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n, t \mapsto \alpha(t) := (\alpha_1(t), \dots, \alpha_n(t))^T$$

heißt C^r -Darstellung einer Kurve, der Vektor aus den zugehörigen Ableitungen

$$\alpha'(t) := (\alpha'_1(t), \dots, \alpha'_n(t))^T$$

heißt *Tangentenvektor*.

Um mit der Differenzierbarkeit am Rand von I keine Probleme zu haben, setzen wir im weiteren stets stillschweigend voraus, daß die Abbildung α die Einschränkung einer auf einem offenen Intervall $I' \supset I$ differenzierbaren Funktion ist.

Die C^r -Darstellung einer Kurve heißt *regulär*, wenn stets $\alpha'(t) \neq 0$ ist.

Die Bildmenge $C := \alpha(I)$ heißt die *Spur* der Kurve.

Beispiele sind etwa:

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (r \cos t, r \sin t)^T \quad \text{Kreislinie,}$$

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto (r \cos t, r \sin t, ht)^T \quad \text{Schraubenlinie.}$$

Beide sind regulär.

$$\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)^T \quad \text{Zykloide.}$$

Hier ist $\alpha'(t) = (1 - \cos t, \sin t) = 0$ für $t = 2k\pi, k \in \mathbb{Z}$. Die so dargestellte Kurve ist also nicht regulär. Tatsächlich hat die Spur an den angegebenen Stellen Spitzen.

Definition VA.1 Eine Menge $C \subset \mathbb{R}^n$ heißt " C^r - Kurvenstück", (auch " C^r - JORDANbogen",) wenn es eine C^r - Darstellung (wir setzen immer stillschweigend $r \geq 1$ voraus) $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ gibt, sodaß $C = \alpha(I)$ ist und dabei gelten

1. I ist kompakt, d.h. etwa $I = [a, b]$,
2. $\alpha'(t) \neq 0$ auf I , man sagt, die Darstellung ist "regulär",
3. α ist injektiv auf $\overset{\circ}{I}$, dem Inneren von I , und $\alpha(I) \cap \alpha(\partial I) = \emptyset$.

Jede solche Darstellung heißt " C^r - Parametrisierung" von C .

Die Bedingung 3. besagt, daß für Stellen $t_1 \neq t_2 \in I = [a, b]$ stets $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ ist mit der einzigen Ausnahme, daß $\alpha(a) = \alpha(b)$ zugelassen ist. In diesem Fall stimmen Anfangs- und Endpunkt der Kurve überein, die Kurve ist geschlossen.

Zu jedem C^r -Kurvenstück gibt es viele C^r -Parametrisierungen. Mittels einer etwas sorgfältig behandelten Anwendung von Satz F.71 bekommt man aber

Satz VA.2 Zu je zwei C^r -Parametrisierungen eines C^r -Kurvenstücks C ,

$$\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n \quad \text{und} \quad \beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$$

gibt es einen C^r -Diffeomorphismus $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$, der sie ineinander überführt:

$$\alpha(t) = \beta(h(t)) \quad (t \in [a, b]).$$

Die *Länge* $L(C)$ eines Kurvenstücks C erklären wir als das Supremum aller Längen von Polygonzügen, deren Ecken auf der Kurve liegen. Dafür gilt

Satz VA.3 Für jede C^1 -Parametrisierung $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ von C ist

$$L(C) := L_a^b(\alpha) := \int_a^b |\alpha'(t)| dt.$$

Beweis: Für jede Unterteilung $a = t_0 < t_1 < \dots < t_m = b$ des Intervalls $I = [a, b]$ ist $L(Z) := \sum_{j=1}^m |\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})|$ die Länge des einbeschriebenen Polygonzugs Z , dessen Ecken $\alpha(t_j)$ auf der Kurve liegen. Diesen Ausdruck formt man um zu

$$\begin{aligned} L(Z) &= \sum_{i=1}^m \langle \alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}), \alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1}) \rangle^{\frac{1}{2}} \\ &= \sum_{i=1}^m \left(\left\langle \frac{\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}}, \frac{\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})}{t_j - t_{j-1}} \right\rangle \right)^{\frac{1}{2}} (t_j - t_{j-1}) \\ &\sim \sum_{i=1}^m |\alpha'(t_{j-1})| (t_j - t_{j-1}). \end{aligned}$$

Letzteres ist aber gerade eine RIEMANN-Summe zu dem obigen Integral, woraus man die Behauptung bekommt. \square

Beispiele VA.4

1. Für ebene Kurven in "Graphenform": $\alpha(t) = (t, y(t))^T$ etc. bekommt man

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \sqrt{1 + y'^2(t)} dt.$$

2. Für eine Kurve vom Typ

$$\alpha(t) := (x_0 + r(t) \cos \omega(t), y_0 + r(t) \sin \omega(t))^T$$

ist

$$L_a^b(\alpha) = \int_a^b \sqrt{r'^2(t) + r^2(t) \omega'^2(t)} dt,$$

woraus man etwa die Bogenlänge von Kreis und Spirale bestimmen kann.

Für das Rechnen mit Bogenlängen gilt

Satz VA.5

1. Für $a < b < c$ ist $L_a^c(\alpha) = L_a^b(\alpha) + L_b^c(\alpha)$.
2. Die Bogenlänge ist invariant unter Umparametrisieren, d.h. sind α und β C^1 -Parametrisierungen desselben Kurvenstücks, so ist $L(\alpha) = L(\beta)$.
3. Die Bogenlänge ist invariant unter einer "Bewegung" des \mathbb{R}^n , d.h. unter einer Transformation

$$\mathbb{R}^n \ni x \mapsto Tx := c + Ax \in \mathbb{R}^n$$

mit orthogonaler Matrix A .

Beweis: 1. spiegelt die Additivität des Integrals bezüglich der Intervallgrenzen wieder,

2. folgt direkt aus der Substitutionsregel und für

3. verwendet man am besten die Definition der Bogenlänge über die Polygone. \square

Mittels der Bogenlänge ergibt sich eine besonders bequeme Parametrisierung von Kurvenstücken.

Definition VA.6 Für eine C^1 -Parametrisierung $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ von C heißt

$$h(t) := \int_a^t |\alpha'(\tau)| d\tau$$

die “Bogenlänge” von C .

Es ist nach dieser Definition $h : [a, b] \rightarrow I := [0, L_a^b(\alpha)]$ stetig differenzierbar und nach dem Hauptsatz und der Regularität der Parametrisierung dann

$$h'(t) = |\alpha'(t)| > 0.$$

Damit ist $h : [a, b] \rightarrow I$ sogar ein Diffeomorphismus und wir können darüber zu einer neuen Parametrisierung übergehen:

$$s \mapsto \beta(s) := \alpha(h^{-1}(s)) : I \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Über die Kettenregel rechnet man sofort aus, daß

$$|\alpha'(t)| = |\beta'(h(t)) \cdot h'(t)| = |\beta'(h(t))| \cdot |\alpha'(t)|,$$

sodaß für jede Stelle s also $|\beta'(s)| = 1$. Damit ist dann

$$L_{s_0}^s(\beta) = \int_{s_0}^s |\beta'(\sigma)| d\sigma = \int_{s_0}^s 1 d\sigma = s - s_0,$$

sodaß jetzt die Kurve durch ihre eigene Bogenlänge parametrisiert ist. Gleichzeitig haben wir mit ausgerechnet, daß in der Parametrisierung durch die Bogenlänge der Tangentenvektor stets ein Einheitsvektor ist ($|\beta'(s)| = 1$).

Der Rand eines Rechtecks – es kann auch etwas “verbogen” sein – ist ein Beispiel für eine Kurve, die aus mehreren Stücken zusammengesetzt ist.

Es seien $\alpha_k : [a_k, b_k] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ($k = 1, \dots, m$) C^1 -Parametrisierungen von Kurven, wobei jeweils der Endpunkt der einen und der Anfangspunkt der nächsten zusammenfallen, d.h. jeweils $\alpha_k(b_k) = \alpha_{k+1}(a_{k+1})$ ist. Dann nennen wir die Zusammenfügung dieser Kurvenstücke eine *stückweis glatte Kurve* oder auch einen *stückweis glatten Weg* und schreiben dafür $\alpha := \alpha_1 + \dots + \alpha_m$.

Ist auch noch $\alpha_m(b_m) = \alpha_1(a_1)$, d.h. der Endpunkt der letzten gleich dem Anfangspunkt der ersten, so heißt die gesamte Kurve α *geschlossen*.

Wir setzen für die Längen:

$$L(\alpha) := L(\alpha_1) + \dots + L(\alpha_m)$$

und verstehen unter der Spur von α die Vereinigung der Spuren der einzelnen α_k .

Definition VA.7 Sei $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ ein C^1 -Kurvenstück mit Spur $C \subset \mathbb{R}^n$, dazu $f : C \rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto f(x)$ gegeben, sodaß $f(\alpha(t))$ stetig auf $[a, b]$ ist. Dann heißt

$$\int_C f ds := \int_C f(x) ds := \int_a^b f(\alpha(t)) |\alpha'(t)| dt$$

das “Kurvenintegral” von f längs des Kurvenstücks α .

Durch das Einbauen des Faktors $|\alpha'(t)|$ ist das Integral unabhängig von der gewählten Parametrisierung der Kurve, bzw. wählt man die Parametrisierung durch die Bogenlänge s , so ist dann ja $|\alpha'(s)| = 1$, sodaß dieser Faktor dann sowieso keine Rolle spielt. Gleichzeitig erhält man dieses Integral aber auch ganz natürlich über RIEMANN-Summen: Man wähle auf der Kurve Stützstellen $\alpha(t_j)$ und bilde dann Summen der Form

(Funktionswert an Stützstelle) \times (Abstand der Stützstellen):

d.h.

$$\sum_j f(\alpha(t_j)) |\alpha(t_j) - \alpha(t_{j-1})|.$$

Indem man dies wie bei der Ableitung der Formel für die Bogenlänge weiterbehandelt und die Schrittweite $|t_j - t_{j-1}|$ gegen Null gehen läßt, erhält man das oben erklärte Integral.

Das Kurvenintegral über eine stückweis glatte Kurve $\alpha = \alpha_1 + \dots + \alpha_m$ mit Spuren C bzw. C_1, \dots, C_m erklärt man als die Summe der Integrale über die Teilstücke

$$\int_C f ds := \int_{C_1} f ds + \dots + \int_{C_m} f ds.$$

Elementare Operationen mit Integralen liefern uns

Satz VA.8 *Es gelten*

1. $\int_C (af + bg) ds = a \int_C f ds + b \int_C g ds$, wobei $a, b \in \mathbb{R}$ und f, g Funktionen auf der Kurve sind.
2. $|\int_C f ds| \leq \sup\{|f(x)| \mid x \in C\} \cdot L(C)$.

Vektorfelder und Potentiale

Solche Kurvenintegrale kommen in der Physik häufig vor, oft jedoch in einer etwas anderen Gestalt, die wir jetzt behandeln wollen.

Definition VA.9 *Unter einem C^r -Vektorfeld auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ verstehen wir eine r -mal stetig differenzierbare Abbildung*

$$v : \mathbb{R}^n \supset \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad x \mapsto v(x) := \begin{pmatrix} v_1(x) \\ \vdots \\ v_n(x) \end{pmatrix}.$$

Wir denken uns dabei jeweils den Vektor $v(x)$ an der Stelle x angeheftet.

Beispiele sind Kraftfelder (Gravitation, Potential), elektrische, magnetische Felder, Geschwindigkeitsfelder etwa in strömenden Flüssigkeiten etc.. Es ist deutlich, daß solche Felder auch noch zusätzlich von weiteren Parametern, etwa der Zeit, abhängen können.

Bewegt man in einem Kraftfeld v auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ einen Massenpunkt längs eines Weges $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, so wird Arbeit geleistet und zwar in Höhe des Wegintegrals über die Tangentialkomponente des Feldes. Diese Tangentialkomponente ist nun gerade das Skalarprodukt aus dem Feldvektor $v(\alpha(t))$ an der Kurvenstelle $\alpha(t)$ und dem normierten Tangentialvektor $\frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|}$. Setzt man dies in der oben gegebenen Definition des Wegintegrals als Funktion f ein, so erhalten wir:

Fakt VA.10 Die von einem Kraftfeld $v(x)$ längs eines Weges $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$, geleistete Arbeit wird durch das Integral

$$\int_a^b \langle v(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt$$

gegeben.

Definition VA.11 Für ein Vektorfeld v auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ und einen Weg $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ in Ω heißt

$$\int_{\alpha} v(x) \bullet dx := \int_a^b \langle v(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt$$

das vektorielle Kurven- oder Wegintegral, dx , oft auch mit ds bezeichnet, heißt das "vektorielle Bogenelement" $\alpha'(t)dt$.

Für einen aus mehreren glatten Kurvenstücken zusammengesetzten Weg definiert man auch das vektorielle Kurvenintegral als Summe der Integrale über die Teile.

Andere Schreibweisen sind

$$\int_{\alpha} v \bullet dx, \quad \int_{\alpha} \langle v(x), dx \rangle, \quad \int_{\alpha} v_1 dx_1 + \dots + v_n dx_n,$$

speziell in Ebene und Raum auch mit anderen Symbolen wie

$$\int_{\alpha} P dx + Q dy \quad , \quad \int_{\alpha} P dx + Q dy + R dz.$$

Beispiel VA.12 Das von einer punktförmigen Masse im Koordinatenursprung erzeugte Gravitationsfeld hat (bis auf einen skalaren Faktor) die Gestalt

$$K(x) = -\frac{1}{|x|^3}x = -\frac{1}{(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{\frac{3}{2}}} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \quad (x \neq 0).$$

Die an einem in diesem Feld längs einer Kurve $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$, $t \mapsto (\alpha_1(t), \alpha_2(t), \alpha_3(t))$ bewegten weiteren Massenpunkt geleistete Arbeit ist dann gegeben durch das Wegintegral

$$\begin{aligned} \int_{\alpha} K \bullet dx &= - \int_a^b \frac{\alpha_1(t)\alpha_1'(t) + \alpha_2(t)\alpha_2'(t) + \alpha_3(t)\alpha_3'(t)}{(\alpha_1^2(t) + \alpha_2^2(t) + \alpha_3^2(t))^{\frac{3}{2}}} dt \\ &= \left(\frac{1}{\alpha_1^2(t) + \alpha_2^2(t) + \alpha_3^2(t)} \right)^{\frac{1}{2}} \Big|_a^b = \frac{1}{|\alpha(b)|} - \frac{1}{|\alpha(a)|} \quad , \end{aligned}$$

dessen Wert nur von Anfangs- und Endpunkt des Weges abhängt, nicht aber vom Verlauf des Weges selbst. Hieraus kann man ablesen, daß auf einem geschlossenen Weg keine Arbeit geleistet werden kann.

In dieser Situation ist klar, daß die Arbeit, die beim Durchlaufen in einer Richtung aufgebracht werden muß, bei der Rückrichtung gewonnen werden kann, d.h. mathematisch mit dem anderen Vorzeichen zu versehen ist.

Dies gilt nun allgemein bei solchen vektoriellen Wegintegralen.

Sind $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei C^1 -Parametrisierungen desselben Kurvenstücks C , so gibt es ja nach Satz VA.2 einen Diffeomorphismus $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$, sodaß $\alpha(t) = \beta(h(t))$, ferner ist für den Tangentialvektor $\alpha'(t) = \beta'(h(t))h'(t)$. Da stets $h'(t) \neq 0$ ist gibt es zwei Fälle:

Entweder ist stets $h'(t) > 0$. Dann ist $h(t)$ streng monoton wachsend, d.h. $h(a) = c$, $h(b) = d$ und in beiden Fällen wird die Kurve im selben Sinn durchlaufen. Die Tangentialvektoren $\beta'(h(t))$ und $\alpha'(t)$ weisen in dieselbe Richtung. Wir nehmen in diesem Fall die Parametertransformation h *orientierungstreu*.

Im anderen Fall ist stets $h'(t) < 0$. Dann ist $h(t)$ streng monoton fallend, d.h. $h(a) = d$, $h(b) = c$ und in beiden Fällen wird die Kurve im unterschiedlichen Sinn durchlaufen. Die Tangentialvektoren $\beta'(h(t))$ und $\alpha'(t)$ weisen in entgegengesetzte Richtungen.

Dies bewirkt für das Integral die folgende Aussage:

Satz VA.13 Sind $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ und $\beta : [c, d] \rightarrow \mathbb{R}^n$ zwei C^1 -Parametrisierungen desselben Kurvenstücks C , ferner $h : [a, b] \rightarrow [c, d]$ ein Diffeomorphismus mit $\alpha(t) = \beta(h(t))$, so ist

$$\int_{\alpha} v \bullet dx = \begin{cases} \int_{\beta} v \bullet dx & \text{falls } h' > 0 \text{ und} \\ -\int_{\beta} v \bullet dx & \text{falls } h' < 0. \end{cases}$$

Bei orientierungstreuen Transformationen bleibt also das vektorielle Kurvenintegral invariant, bei Änderung des Durchlaufsinnes ändert sich das Vorzeichen des Integrals.

Die in Satz VA.8 notierten Rechenregeln gelten sinngemäß auch hier:

Satz VA.14 Für Vektorfelder v, w auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, stückweise glatte Kurven $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\beta : J \rightarrow \mathbb{R}^n$ in Ω und reelle Zahlen a, b gelten

1. $\int_{\alpha+\beta} v \bullet dx = \int_{\alpha} v \bullet dx + \int_{\beta} v \bullet dx$.
2. $\int_{\alpha} (av + bw) \bullet dx = a \int_{\alpha} v \bullet dx + b \int_{\alpha} w \bullet dx$.
3. $|\int_{\alpha} v \bullet dx| \leq L(\alpha) \cdot \sup\{|v(x)| \mid x \in C\}$, wobei C die Spur der durch die Parametrisierung α gegebenen Kurve ist.

Beweis: 1. und 2. ergeben sich wie oben.

3. Für ein glattes Kurvenstück $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ hat man unter Verwenden der Ungleichung von CAUCHY-SCHWARZ

$$\begin{aligned} \left| \int_{\alpha} v \bullet dx \right| &= \left| \int_a^b \langle v(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle dt \right| \\ &\leq \int_a^b |v(\alpha(t))| \cdot |\alpha'(t)| dt \leq L(\alpha) \cdot \sup\{|v(\alpha(t))| \mid t \in [a, b]\}, \end{aligned}$$

woraus sich die Behauptung durch Aufaddieren über die Kurvenstücke ergibt. \square

Bei dem oben behandelten Beispiel VA.12 des Gravitationsfeldes einer Punktmasse hatte sich ergeben, daß das vektorielle Kurvenintegral nur von Anfangs- und Endpunkt der Kurve abhängt. Dies ist ein besonders wichtiger Fall.

Definition VA.15 Ein Vektorfeld v auf $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt "konservativ" oder "exakt", wenn das Kurvenintegral $\int_C v \bullet dx$ über stückweise glatte Wege in Ω nur von den Endpunkten der Kurve, nicht aber vom Verlauf der Kurve selbst abhängt, d.h.

$$\int_{C_1} v \bullet dx = \int_{C_2} v \bullet dx,$$

sofern beide Kurven denselben Anfangspunkt x_a und den selben Endpunkt x_e haben. Man schreibt dann auch für das Integral über eine solche Kurve einfach

$$\int_{x_a}^{x_e} v \bullet dx.$$

Äquivalent dazu ist natürlich, daß das Integral über jeden geschlossenen Weg verschwindet.

Es sind keineswegs alle Felder konservativ.

Beispiel VA.16 Im \mathbb{R}^2 sei etwa ein Feld gegeben durch

$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto v(\mathbf{x}) := \frac{1}{x^2 + y^2} \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix} \quad (\mathbf{x} \neq 0).$$

Dann ist das Integral über den durch $[0, 2\pi] \ni t \mapsto \begin{pmatrix} \cos t \\ \sin t \end{pmatrix}$ parametrisierten Einheitskreis gerade

$$\int_{EK} v \bullet d\mathbf{x} = \int_0^{2\pi} \frac{1}{\sin^2 t + \cos^2 t} ((-\sin t) \cdot (-\sin t) + \cos t \cdot \cos t) dt = \int_0^{2\pi} 1 dt = 2\pi.$$

Satz VA.17 Ein Vektorfeld v auf einem Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ist genau dann konservativ, wenn es ein Gradientenfeld ist, d.h. wenn es eine stetig differenzierbare Funktion $U : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ gibt, sodaß stets $v(x) = \nabla U(x)$. Es ist dann für jede stückweise glatte Kurve α von x_a nach x_e

$$\int_{\alpha} v \bullet d\mathbf{x} = U(x_e) - U(x_a).$$

Die Funktion U heißt "Potential" oder "Stammfunktion" des Feldes, wobei in der Physik häufig auch statt der Stammfunktion U die Funktion $-U$ (also mit dem anderen Vorzeichen) als Potential bezeichnet wird.

Nach Satz MD.19 unterscheiden sich verschiedene Potentiale zum selben Feld nur um eine Konstante.

Beweis: Ein Gradientenfeld $v = \nabla U$ ist konservativ: Zu einer Parametrisierung $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ in Ω bilden wir die Funktion $S(t) := U(\alpha(t))$. Sie ist stetig differenzierbar mit Ableitung $S'(t) = \langle \nabla U(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle$. Dann ist (siehe auch Satz MD.17 ff)

$$\begin{aligned} U(\alpha(b)) - U(\alpha(a)) &= S(b) - S(a) \\ &= \int_a^b S'(t) dt = \int_a^b \langle \nabla U(\alpha(t)), \alpha'(t) \rangle = \int_{\alpha} \nabla U \bullet d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Ein konservatives Feld besitzt ein Potential: Wir wählen einen Punkt x_0 in Ω und setzen für $x \in \Omega$

$$U(x) := \int_{x_0}^x v \bullet d\mathbf{x}.$$

Da es nicht auf den Integrationsweg ankommt, ist damit eine Funktion auf Ω definiert. Nun betrachte man mit einem beliebigen Einheitsvektor in Richtung einer Koordinatenachse $e_k \in \mathbb{R}^n$ für kleine $h \in \mathbb{R}$ (so, daß alles folgende nicht aus Ω herausführt)

$$U(x + he_k) - U(x) = \int_{x_0}^{x+he_k} v \bullet d\mathbf{x} - \int_{x_0}^x v \bullet d\mathbf{x} = \int_x^{x+he_k} v \bullet d\mathbf{x}.$$

Denken wir uns nun diese beiden Punkte durch ein Geradenstück verbunden, was man über $x + te_k$, $t \in [0, h]$ parametrisieren kann, so bekommen wir weiter

$$= \int_0^h \langle v(x + te_k), e_k \rangle dt = \int_0^h v_k(x + te_k) dt,$$

also gerade das Integral über die k -te Komponente.

Damit ist nach dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung die Abbildung $h \mapsto U(x + he_k)$ differenzierbar und

$$\frac{\partial U}{\partial x_k}(x) = \frac{d}{dh}U(x + he_k)|_{h=0} = v_k(x).$$

Also ist $\nabla U = v$ auf ganz Ω und, da wir Vektorfelder, also auch v , stets als stetig vorausgesetzt haben, ist damit auch U total differenzierbar. \square

Bemerkung VA.18 *Der zweite Teil dieses Beweises hat miterbracht, daß ein Feld schon dann ein Gradientenfeld ist, wenn die Bedingung aus Definition VA.15 über die Wegunabhängigkeit des Integrals (zunächst) nur für solche Wege gilt, die sich aus (endlich vielen) achsenparallelen Geradenstücken zusammensetzen. Nach dem ersten Teil folgt dann die Wegunabhängigkeit für allgemeine Wege von selbst.*

Die Frage, ob ein gegebenes Vektorfeld ein Potential besitzt, ist physikalisch wie mathematisch interessant, die bisher gegebene Charakterisierung durch die Wegunabhängigkeit des Kurvenintegrals ist aber praktisch völlig unzureichend.

Haben wir ein stetig differenzierbares konservatives Vektorfeld v , so ist also $v = \nabla U$ mit einer zweimal stetig differenzierbaren (Potential-)Funktion U . Zusammen mit dem Satz von SCHWARZ (Satz MD.20) gilt also

Satz VA.19 *Besitzt ein stetig differenzierbares Vektorfeld v ein Potential, d.h. ist es konservativ, so gelten die sog. "Integrabilitätsbedingungen"*

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i}, \quad (i, k = 1, \dots, n).$$

Sie bilden also eine **notwendige** Bedingung für die Existenz einer Potentialfunktion.

Diese Bedingung ist aber keineswegs hinreichend! Etwa das in Beispiel VA.16 betrachtete Feld erfüllt die Integrabilitätsbedingungen, ist aber, wie oben gezeigt, **nicht** konservativ. Was wir hinzunehmen müssen sind Forderungen an die Gestalt des zugrunde liegenden Gebietes Ω .

Definition VA.20 *Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ heißt "einfach zusammenhängend", wenn für je zwei Punkte $x_a, x_e \in \Omega$ sich je zwei ganz in Ω von x_a nach x_e verlaufende Wege C_0, C_1 stetig ineinander überführen lassen, ohne dabei Ω zu verlassen. Äquivalent dazu ist, daß sich jeder geschlossene Weg C in Ω ganz in Ω auf einen seiner Punkte zusammenziehen läßt.*

Im \mathbb{R}^2 sind etwa die volle offene Kreisscheibe, offene Rechtecke, offene Dreiecke etc. einfach zusammenhängende Gebiete, nicht aber die "punktierte" Kreisscheibe, aus der man etwa den Mittelpunkt entfernt hat.

Im \mathbb{R}^3 ist dagegen die offene Kugel ohne Mittelpunkt noch einfach zusammenhängend, nicht aber die Kugel, aus der ein Durchmesser entfernt wurde.

Die in der Definition benutzte Formulierung "...lassen sich stetig ineinander überführen" kann auf folgende Weise präzisiert werden.

Man fordert die Existenz einer (mindestens) stetigen Abbildung $\omega : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \Omega$, sodaß

1. die Abbildungen

$$\begin{aligned} \alpha_0(t) &:= \omega(t, 0) \text{ und} \\ \alpha_1(t) &:= \omega(t, 1) \end{aligned}$$

Parametrisierungen von C_0 bzw. C_1 sind,

2. für alle $s \in [0, 1]$: $\omega(0, s) = x_a, \omega(1, s) = x_e$, d.h. jeweils der gemeinsame Anfangs- bzw. Endpunkt sind.

Durch die Parametrisierungen $\alpha_s(\cdot) := \omega(\cdot, s) : [0, 1] \rightarrow \Omega$ ($s \in [0, 1]$) ist dann eine Kurvenschar in Ω gegeben, die C_0 in C_1 überführt, wobei alle Kurven denselben Anfangspunkt x_a und denselben Endpunkt X_e haben.

Für solche einfach zusammenhängenden Gebiete können wir nun eine **hinreichende** Bedingung für die Existenz einer Potentialfunktion formulieren:

Satz VA.21 Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet und erfüllt ein C^1 -Vektorfeld v auf Ω die Integrabilitätsbedingungen

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} = \frac{\partial v_k}{\partial x_i} \quad (i, k = 1, \dots, n),$$

so besitzt v auf Ω ein Potential.

Ein beliebiges Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^n$ $n \geq 2$ enthält ja zu jedem Punkt $x_0 \in \Omega$ noch eine ganze Kugel $K(x_0, r) \subset \Omega$ und die ist einfach zusammenhängend. Somit bekommen wir aus dem Satz VA.21 die folgende **lokale** Aussage:

Folgerung VA.22 Erfüllt ein C^1 -Vektorfeld v auf einem beliebigen Gebiet Ω die Integrabilitätsbedingungen, so besitzt es für jeden Punkt $x_0 \in \Omega$ in einer Umgebung von x_0 ein Potential.

Es ist aber nicht notwendig, daß sich diese lokalen Potentiale zu einer einheitlich auf ganz Ω erklärten Potentialfunktion zusammenbauen lassen.

Zum **Beweis** von Satz VA.21 nehmen wir zunächst ein *sternförmiges* Gebiet Ω mit dem Nullpunkt als ein Zentrum. Dies bedeutet, daß mit jedem Punkt $x \in \Omega$ auch die Verbindungsstrecke

$$\alpha_x := \{tx \mid 0 \leq t \leq 1\} \text{ in } \Omega.$$

liegt. Damit setzen wir

$$U(x) := \int_{\alpha_x} v \bullet d\mathbf{x} = \int_0^1 \langle v(tx), x \rangle dt = \int_0^1 \sum_{i=1}^n v_i(tx) x_i dt.$$

Der Integrand rechts hängt stetig differenzierbar von dem "Parameter" x ab. Nach den Sätzen über Parameterintegrale – etwa Satz MI.14 – existieren dann die partiellen Ableitungen von U nach x und es gilt

$$\frac{\partial U}{\partial x_k}(x) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_k}(tx) t x_i dt + \int_0^1 v_k(tx) dt.$$

Das letzte Integral kann man über partielle Integration umbauen zu

$$\begin{aligned} \int_0^1 v_k(tx) dt &= t \cdot v_k(tx) \Big|_0^1 - \int_0^1 \left(t \frac{d(v_k(tx))}{dt} \right) dt \\ &= v_k(x) - \int_0^1 \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial v_k}{\partial x_i}(tx) \cdot t x_i \right) dt \end{aligned}$$

Damit bekommen wir gesamt

$$\frac{\partial U}{\partial x_k}(x) = v_k(x) + \int_0^1 \sum_{i=1}^n \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k}(tx) - \frac{\partial v_k}{\partial x_i}(tx) \right) \cdot t x_i dt$$

und der Integrand rechts verschwindet, da die Integrabilitätsbedingung erfüllt ist. Damit ist U als Potential zu dem Feld v nachgewiesen.

Der Beweis für einfach zusammenhängende Gebiete sei – wenigstens für den zwei-dimensionalen Fall – kurz skizziert. Nach dem Satz VA.43, einer einfachen Version des Satzes von STOKES, den wir später simpel mit partieller Integration beweisen werden, gilt folgendes:

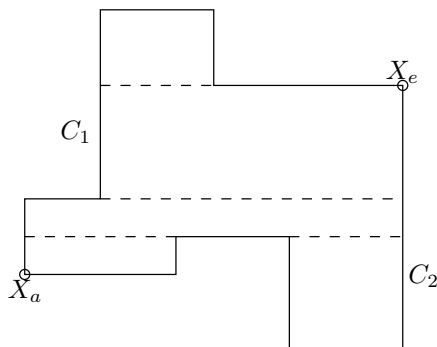
Ist $R \subset \Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein abgeschlossenes Rechteck mit achsenparallelen Seiten in einem Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^2$, ∂R sein positiv durchlaufener Rand und $v = (v_1, v_2)^T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^2$ ein stetig differenzierbares Vektorfeld, so ist

$$\int_{\partial R} v \bullet d\mathbf{x} = \int_R \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) dx_1 dx_2.$$

Unser Vektorfeld erfüllt die Integrationsbedingungen und somit ist dieses Integral $= 0$. Sind also x_a und x_e irgend zwei Ecken des Rechtecks R und C_1, C_2 die beiden möglichen Wege, auf dem Rand von x_a nach x_e zu gelangen, so ist

$$\int_{C_1} v \bullet d\mathbf{x} = \int_{C_2} v \bullet d\mathbf{x},$$

sodaß es egal ist, über welchen der beiden Wege wir integrieren.



Nun seien $x_a, x_e \in \Omega$ zwei Punkte, C_1, C_2 zwei Wege in Ω , beide von x_a nach x_e , beide aus endlich vielen achsenparallelen Stücken zusammengesetzt. Da Ω einfach zusammenhängend ist, können in dem von beiden berandeten Bereich keine Punkte von $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$ liegen, sodaß wir also auf die durch das Einziehen von achsenparallelen Geradenstücken entstehenden Rechtecke je die vorigen Überlegungen anwenden können. (Siehe Abbildung.) Wir können also schrittweise über „Zwischenwege“ von C_1 nach C_2 übergehen, ohne das Integral zu verändern. Damit erfüllt unser Feld die in Bemerkung VA.18 festgehaltene Bedingung zur Wegunabhängigkeit, die noch hinreicht um die Existenz eines Potentials zu sichern. \square

Zur konkreten Bestimmung eines Potentials U zu einem konservativen Feld v kann man wie folgt vorgehen:

Ebenes Feld: Es sei Ω ein achsenparalleles Rechteck im \mathbb{R}^2 , darauf das Feld v gegeben durch

$$v(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))^T.$$

Es erfülle die Integrabilitätsbedingung $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$. Das gesuchte Potential U erfüllt $\frac{\partial U}{\partial x} = P$, ist also bezüglich x eine Stammfunktion zu $P(x, y)$. Sei nun $p(x, y)$ irgendeine Stammfunktion zu $P(x, y)$ (bzgl. x), dann unterscheiden sich U und p nur um eine Konstante bzgl. x , also hier um eine Funktion $q(y)$, die nur noch von y abhängt:

$$U(x, y) = p(x, y) + q(y).$$

Für U muß gelten

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = \frac{\partial p}{\partial y}(x, y) + q'(y) \stackrel{!}{=} Q(x, y)$$

oder

$$q'(y) \stackrel{!}{=} Q(x, y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x, y) \quad (*)$$

und wegen der Integrierbarkeitsbedingung ist

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} \left(Q - \frac{\partial p}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial x} Q - \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial p}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x} Q - \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial p}{\partial x} \\ &= \frac{\partial}{\partial x} Q - \frac{\partial}{\partial y} P = 0. \end{aligned}$$

Somit ist die Gleichung (*) unabhängig von x und wir können durch Integration eine (*) erfüllende Funktion $q(y)$ bestimmen. Mit den so bestimmten p und q ist dann

$$U(x, y) := p(x, y) + q(y)$$

ein Potential.

Räumliches Feld: Wir gehen analog vor. Es sei Ω ein achsenparalleler Quader im \mathbb{R}^3 , darauf

$$v(x, y, z) = (P(x, y, z), Q(x, y, z), R(x, y, z))$$

ein konservatives Vektorfeld, das also die Integrierbarkeitsbedingungen

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y}$$

erfüllt.

Zunächst bestimmen wir bei festgehaltenem y, z bezüglich x eine Stammfunktion $p(x, y, z)$ zu $P(x, y, z)$, mit der also $\frac{\partial p}{\partial x} = P$, und setzen das Potential an als

$$U(x, y, z) = p(x, y, z) + q(y, z).$$

Dann ist

$$\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial p}{\partial x} = P,$$

ferner bekommen wir für die anderen Ableitungen die Gleichungen

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial y} &= \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{\partial q}{\partial y} = Q, \\ \frac{\partial U}{\partial z} &= \frac{\partial p}{\partial z} + \frac{\partial q}{\partial z} = R, \end{aligned}$$

d.h. es ist insbesondere $q(y, z)$ zu bestimmen aus

$$\begin{aligned} \frac{\partial q}{\partial y}(y, z) &= Q(x, y, z) - \frac{\partial p}{\partial y}(x, y, z), \\ \frac{\partial q}{\partial z}(y, z) &= R(x, y, z) - \frac{\partial p}{\partial z}(x, y, z). \end{aligned}$$

Die Integrabilitätsbedingungen sichern, daß die rechten Seiten nicht mehr von x abhängen und nun kann man nach dem Muster des ebenen Falles weitermachen.

Beispiel: Wir illustrieren diese Methode an dem Beispiel des Feldes aus Beispiel VA.16 für ein Rechteck, **das den Nullpunkt nicht enthält.**

In der zuletzt benutzten Schreibweise haben wir als Feld

$$v(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))^T \text{ mit}$$

$$P(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}, \quad Q(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

Dann ist

$$p(x, y) = \int^x P(t, y) dt = -\arctan \frac{x}{y} \quad (y \neq 0).$$

Damit ist

$$Q(x, y) - \frac{\partial p}{\partial y}(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{1}{\left(\frac{x}{y}\right)^2 + 1} \cdot \left(-\frac{x}{y^2}\right) = 0,$$

sodaß wir hier die einfache Gleichung

$$q'(y) = 0$$

mit $q(y) = c = \text{const.}$ bekommen.

Somit lautet unser Potential:

$$U(x, y) = -\arctan \frac{x}{y} + c.$$

Nun kann man den Einheitskreis parametrisieren etwa durch

$$\alpha(\varphi) := (\sin \varphi, \cos \varphi) \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

(beginne bei $(0, 1)$ im Uhrzeigersinn). Setzen wir als Konstante $c := 0$, so bekommen wir dann also

$$U(\alpha(\varphi)) = U(\sin \varphi, \cos \varphi) = -\arctan \frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} = -\arctan \tan \varphi = -\varphi \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi).$$

Das paßt aber garnicht zu der Festlegung der \arctan -Funktion, die ja als Wertebereich nur ein Intervall der Länge π und nicht 2π hat ?? Und welchen Wert hat $U(0, 1)$??

Der Widerspruch kommt daher, daß wir nicht auf das Gebiet geachtet haben. Unser Feld ist im Nullpunkt nicht erklärt, ein Gebiet, auf dem es erklärt ist und das den Einheitskreis enthält, ist nicht einfach zusammenhängend, sodaß wir darauf nicht unbedingt ein globales Potential haben. Für jedes Rechteck, das den Nullpunkt nicht enthält gibt es so ein \arctan -Potential, aber um bei sich überlappenden Rechtecken richtig anzuschließen, muß man die Konstante passend wählen, und da gibts hier ein Problem, wenn man einmal auf dem Einheitskreis um den Nullpunkt herumgelaufen ist.

Also Vorsicht: Voraussetzungen über das Gebiet nicht vergessen!

Die oben erwähnte Methode zur Bestimmung einer Potentialfunktion kann man nutzen, um gewisse, sog. "exakte" Differentialgleichungen zu lösen.

Satz VA.23 Es sei $v(x, y) = (P(x, y), Q(x, y))$ ein konservatives C^2 -Vektorfeld auf $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ mit Potential $U(x, y)$. Ist dann $Q(x, y) \neq 0$ auf ganz Ω , so gibt es zu jedem Punkt $(x_0, y_0) \in \Omega$ genau eine Funktion $y(x)$, die das Anfangswertproblem

$$P(x, y) + Q(x, y)y' = 0, \quad y(x_0) = y_0$$

löst. Man erhält sie durch Auflösen von

$$U(x, y) = U(x_0, y_0) \text{ nach } y.$$

Beweis: Wegen $\frac{\partial U}{\partial y}(x, y) = Q(x, y) \neq 0$ kann man die Gleichung $U(x, y) = U(x_0, y_0)$ nach y auflösen. Dann gilt

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{d}{dx}(U(x_0, y_0)) = \frac{d}{dx}(U(x, y(x))) = \frac{\partial U}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial U}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{dy}{dx} \\ &= P(x, y) + Q(x, y)y'. \end{aligned}$$

□

Divergenz und Rotation

Definition VA.24 Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ eine Funktion bzw. ein Vektorfeld, jeweils hinreichend oft differenzierbar. Dann bedeuten

$$\begin{aligned} \nabla f &:= \left(\frac{\partial}{\partial x_1} f, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} f \right) \quad \text{der "Gradient" von } f, \\ \Delta f &:= \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 f}{(\partial x_i)^2}, \quad \Delta \text{ heißt "LAPLACE-Operator",} \\ \operatorname{div} v &:= \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_i}{\partial x_i} \quad \text{die "Divergenz" von } v, \end{aligned}$$

und im Falle $n = 3$

$$\operatorname{rot} v := \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} \quad \text{die "Rotation" von } v.$$

Offenbar ist

$$\Delta f = \operatorname{div} \nabla f.$$

Indem man formal den Nabla-Operator

$$\nabla := \left(\frac{\partial}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \right)$$

als "Vektor" denkt und mit ihm formal die Operationen von Skalarprodukt und Vektorprodukt ausführt, erhält man die in der Physik gebräuchlichen Notationen

$$\begin{aligned} \Delta f &= \nabla^2 f, \\ \operatorname{div} v &= \nabla \bullet v = \langle \nabla, v \rangle, \\ \operatorname{rot} v &= \nabla \times v. \end{aligned}$$

Im Folgenden ist eine Reihe von Rechenregeln zusammengestellt, die gelten, sofern alle vorkommenden Ableitungen existieren und stetig sind.

Für ein Vektorfeld v , d.h. eine Abbildung $\mathbb{R}^n \supset \Omega \ni x \mapsto v(x) \in \mathbb{R}^n$ bezeichnet Dv die JACOBI-Matrix

$$Dv := \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right),$$

ferner

$$\Delta v := (\Delta v_1, \dots, \Delta v_n),$$

d.h. die Anwendung des LAPLACE-Operators auf jede Komponente von v .

Satz VA.25 *Es seien $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ und $v, w : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^n$ hinreichend oft stetig differenzierbar. Soweit die Rotation betrachtet wird, sei $n = 3$. Dann gelten*

1. $\operatorname{rot} \nabla f = 0$,
2. $\operatorname{div} \operatorname{rot} v = 0$,
3. $\operatorname{div}(f \cdot v) = \langle \nabla f, v \rangle + f \operatorname{div} v$,
4. $\operatorname{rot}(\operatorname{rot} v) = \nabla \operatorname{div} f - \Delta v$,
5. $\operatorname{div}(v \times w) = \langle \operatorname{rot} v, w \rangle - \langle v, \operatorname{rot} w \rangle$,
6. $\operatorname{rot}(f \cdot v) = (\nabla f) \times v + f \operatorname{rot} v$,
7. $\operatorname{rot}(v \times w) = (\operatorname{div} w)v - (\operatorname{div} v)w + (Dv)w - (Dw)v$.

Beweis: 1. und 2. ergeben sich unmittelbar aus dem Satz MD.20 von SCHWARZ, 3. nutzt die Produktregel, die weiteren bekommt man durch eine nützliche Fleißarbeit. Rechnen Sie es mal durch! \square

Flächen und Flächenintegrale im \mathbb{R}^3

Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ ein Gebiet, $U := \overline{\Omega}$ sein Abschluß. Eine C^r -Abbildung ($r \geq 1$)

$$\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3, u = (u_1, u_2)^T \rightarrow (\Phi_1(u), \Phi_2(u), \Phi_3(u))^T$$

heißt C^r -Darstellung einer Fläche. Dazu ist

$$D\Phi := (\partial_1 \Phi, \partial_2 \Phi)$$

die JACOBI-Matrix aus den partiellen Ableitungen.

Wie bei Kurven setzen wir wieder stillschweigend voraus, daß die Abbildung Φ die Einschränkung einer auf einer offenen Menge $U' \supset U$ r -mal stetig differenzierbaren Abbildung ist, wobei $r \geq 1$.

Eine C^r -Darstellung heißt "regulär", wenn an jeder Stelle $u \in U$ die JACOBI-Matrix den Rang 2 hat.

Definition VA.26 *Wir nennen eine Menge $M \subset \mathbb{R}^3$ ein "glattes Flächenstück" (genauer ein C^r -Flächenstück), wenn es eine C^r -Darstellung $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ gibt, sodaß $M = \Phi(\Omega)$, wobei $\Omega := \overset{\circ}{U}$ das Innere von U , und dabei gelten*

1. U ist kompakt
2. $\operatorname{rg}(D\Phi)(u) = 2$ für alle $u \in U$, d.h. Φ ist regulär,
3. Φ ist injektiv auf Ω und $\Phi(\overset{\circ}{U}) \cap \Phi(\partial U) = \emptyset$.

Eine solche Funktion Φ heißt eine "zulässige Parametrisierung", genauer eine " C^r -Parametrisierung" von M .

Φ bildet die im Parameterbereich U liegenden durch den Punkt $u_0 := (u_{10}, u_{20})^T$ gehenden achsenparallelen Geraden(-Stücke) $u_1 = u_{10}$ bzw. $u_2 = u_{20}$ auf die Kurven

$$s \mapsto \Phi(u_{10} + s, u_{20}) \quad \text{bzw.} \quad t \mapsto \Phi(u_{10}, u_{20} + t) \quad (|s|, |t| \text{ nicht zu groß})$$

ab. Deren Tangentenvektoren sind gerade

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \Phi(u_{10} + s, u_{20}) \Big|_{s=0} &= \partial_1 \Phi(u_0) \text{ bzw.} \\ \frac{d}{dt} \Phi(u_{10}, u_{20} + t) \Big|_{t=0} &= \partial_2 \Phi(u_0). \end{aligned}$$

Die in 2. geforderte Unabhängigkeit dieser Tangentenvektoren sichert nun gerade, daß das Bild von Φ an jeder Stelle "zweidimensional" ist, d.h. lokal unserer Vorstellung einer Fläche entspricht. Die Bedingung 3. verhindert, daß sich die Fläche selbst durchdringen kann, jedoch kann sie sich über den Rand ∂U (teilweise) schließen.

Aufgabe VA.27 Prüfen Sie bei den folgenden Beispielen, ob es sich um zulässige Parametrisierungen handelt, und machen Sie sich ein Bild von den Tangentialvektoren $\partial_1 \Phi$ und $\partial_2 \Phi$.

Beispiele VA.28

1. Zu $a_0, a_1, a_2 \in \mathbb{R}^3$, wobei die letzten beiden linear unabhängig seien, bilde

$$\Phi : (u_1, u_2) \mapsto a_0 + u_1 a_1 + u_2 a_2.$$

Dies ergibt eine Ebene. Die Tangentenvektoren sind

$$\partial_1 \Phi = a_1, \quad \partial_2 \Phi = a_2.$$

2. Die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig differenzierbar. Wir setzen

$$\Phi : u := (u_1, u_2)^T \mapsto (u_1, u_2, f(u))^T.$$

Dies ist die von dem Graphen der Funktion f erzeugte Fläche. Die zugehörigen Tangentenvektoren sind

$$\partial_1 \Phi = \left(1, 0, \frac{\partial f}{\partial u_1}\right)^T \quad \text{und} \quad \partial_2 \Phi = \left(0, 1, \frac{\partial f}{\partial u_2}\right)^T.$$

3. Ein Spezialfall von 2. ist etwa die obere (+) oder untere (-) Halb-Kugelsphäre: Setze

$$U := \{u \mid |u|^2 \leq 1\} \subset \mathbb{R}^2, \quad f(u) := \pm \sqrt{1 - |u|^2}.$$

4. $U := \{0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \times \{0 \leq \theta \leq \pi\}$ und $(\varphi, \theta)^T \mapsto (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)^T$ ergibt die volle Einheitskugelsphäre S^2 .

5. $U := \{0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \times \{z \geq 0\}$ und $(\varphi, z)^T \mapsto (\cos \varphi, \sin \varphi, z)^T$ ergibt einen Zylinder.

6. Stereographische Projektion:

Es sei $S^2 = \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = 1\}$ die Einheitskugelsphäre mit "Nordpol" $N := (0, 0, 1)^T$.

$U = \mathbb{R}^2$ sei mit der "Äquatorebene" $\{(u_1, u_2, 0) \mid (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^2\}$ identifiziert.

Die Verbindungsgerade von N mit dem Punkt $u := (u_1, u_2, 0)$ schneidet S^2 in genau einem von N verschiedenen Punkt $\Phi(u)$ mit den Koordinaten

$$\Phi(u) = \frac{1}{|u|^2 + 1} \begin{pmatrix} 2u_1 \\ 2u_2 \\ |u|^2 - 1 \end{pmatrix}.$$

Diese Abbildung Φ heißt die stereographische Projektion. Sie ergibt die Kugelsphäre $S^2 \setminus N$, der man den Nordpol weggelassen hat.

Zu einem glatten Flächestück gibt es viele zulässige Parametrisierungen. Dafür gilt der folgende

Satz VA.29 Sind $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ zulässige C^r -Parametrisierungen desselben Flächenstücks, so gibt es einen C^r -Diffeomorphismus $h : U \rightarrow V$, mit dem

$$\Phi = \Psi \circ h$$

ist. Man nennt h eine "Parametertransformation" zwischen Φ und Ψ .

Flächeninhalt

Betrachten wir nochmal das erste der Beispiele VA.28:

$$\Phi : (u_1, u_2) \mapsto a_0 + u_1 a_1 + u_2 a_2.$$

Das Rechteck mit den Ecken

$$u_0, u_0 + \Delta_1 e_1, u_0 + \Delta_2 e_2, u_0 + \Delta_1 e_1 + \Delta_2 e_2$$

mit Flächeninhalt $|\Delta_1| \cdot |\Delta_2|$ wird abgebildet auf das Parallelogramm mit den Ecken

$$\Phi(u_0), \Phi(u_0) + \Delta_1 a_1, \Phi(u_0) + \Delta_2 a_2, \Phi(u_0) + \Delta_1 a_1 + \Delta_2 a_2.$$

Sein Flächeninhalt ist

$$|(\Delta_1 a_1) \times (\Delta_2 a_2)| = |\Delta_1| \cdot |\Delta_2| \cdot |a_1 \times a_2|.$$

Durch die Abbildung ändert sich also der Flächeninhalt um den Faktor $|a_1 \times a_2|$. Dabei ist hier $a_1 = \partial_1 \Phi$, $a_2 = \partial_2 \Phi$, somit ist hier

$$A = (a_1, a_2) = (\partial_1 \Phi, \partial_2 \Phi) = D\Phi$$

die JACOBI-Matrix von φ .

In unserer speziellen Situation ist

$$\Phi(u) = a_0 + Au = \Phi(u_0) + A(u - u_0) = \Phi(u_0) + D\Phi(u_0)(u - u_0)$$

und hier gilt:

Durch diese Abbildung Φ wird der Flächeninhalt eines Rechtecks bei u_0 um den Faktor $|\partial_1 \Phi(u_0) \times \partial_2 \Phi(u_0)|$ verändert.

Im allgemeinen Fall haben wir für jede Stelle u_0

$$\Phi(u) = \Phi(u_0) + D\Phi(u_0)(u - u_0) + R(u, u_0),$$

wobei noch $\frac{1}{|u - u_0|} |R(u, u_0)| \rightarrow 0$ ($u \rightarrow u_0$). Die durch Φ dargestellte Fläche wird also bei u_0 von besserer als erster Ordnung durch die Tangentialebene

$$\Psi(u) = \Phi(u_0) + D\Phi(u_0)(u - u_0),$$

approximiert. Dann sind aber die Flächeninhalte der Bilder eines kleinen Rechtecks bei u_0 unter Φ und unter Ψ im wesentlichen gleich. Der Inhalt des Ψ -Bildes wird aber gerade durch Multiplikation mit dem Faktor $|\partial_1 \Phi(u_0) \times \partial_2 \Phi(u_0)|$ gewonnen. Dies führt uns zu folgender

Definition VA.30 Für eine zulässige Parametrisierung

$$\Phi : \mathbb{R}^2 \supset U \rightarrow \mathbb{R}^3$$

nennen wir

$$A(\Phi) := \int_U |\partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u)| du_1 du_2$$

den Flächeninhalt des von Φ dargestellten Flächenstückes. (Da U kompakt und Φ stetig differenzierbar ist, existiert das Integral.)

Es ist

$$\begin{aligned} |a \times b|^2 &= |a|^2 |b|^2 \sin^2(\angle a, b) \\ &= |a|^2 |b|^2 (1 - \cos^2(\angle a, b)) \\ &= |a|^2 |b|^2 - \langle a, b \rangle^2 \\ &= \det \begin{pmatrix} \langle a, a \rangle & \langle a, b \rangle \\ \langle b, a \rangle & \langle b, b \rangle \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Mit $g_{ij} := \langle \partial_i \Phi, \partial_j \Phi \rangle$ ist dann also

$$|\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi|^2 = \det \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{pmatrix} =: g = (\text{Länge der Normale})^2.$$

Auf C.F.GAUSS geht die folgende ebenfalls weithin benutzte Bezeichnung zurück:

$$E := g_{11}, F := g_{12} = g_{21}, G := g_{22}.$$

Damit ist dann $g = (EG - F^2)$. Man nennt in der Differentialgeometrie E, F, G die Koeffizienten der "ersten Fundamentalform". Damit erklären wir nun

Definition und Satz VA.31 Man nennt in obiger Situation

$$do := |\partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u)| du_1 du_2 = \sqrt{g} du_1 du_2$$

das "skalare Oberflächenelement". Damit ist dann

$$A(M) = \int_U \sqrt{g} du_1 du_2 = \int_M do$$

der Flächeninhalt des von Φ dargestellten Flächenstückes M .

Wir vereinbaren weiter, daß sich der Flächeninhalt eines Flächenstücks nicht ändert, wenn wir endlich viele glatte Kurvenstücke und endlich viele Punkte hinzufügen oder wegnehmen.

Flächeninhalt ist eine geometrische Eigenschaft, berechnet haben wir ihn über eine Parametrisierung und davon gibt es viele. Über den Transformationsatz für Integrale und die Kettenregel bekommen wir aber folgenden Satz, der obige Bezeichnung rechtfertigt.

Satz VA.32 Es seien $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ und $\Psi : V \rightarrow \mathbb{R}^3$ Parametrisierungen desselben Flächenstückes M und $h : U \rightarrow V$ ein Diffeomorphismus mit $\Phi = \Psi \circ h$. Dann gelten

1.

$$\partial_{u_1} \Phi \times \partial_{u_2} \Phi = \det(Dh) (\partial_{v_1} \Psi \times \partial_{v_2} \Psi)$$

2. Ferner seien

$$\begin{aligned} g &= \det (\langle \partial_i \Phi, \partial_j \Phi \rangle) \\ g^* &= \det (\langle \partial_i \Psi, \partial_j \Psi \rangle). \end{aligned}$$

Dann ist

$$\int_U \sqrt{g} \, du_1 du_2 = \int_U \sqrt{g^* \circ h} |\det Dh| \, du_1 du_2 = \int_V \sqrt{g^*} \, dv_1 dv_2.$$

Beweis: Zu 1.: Mit den JACOBI-Matrizen $D\Phi, D\Psi, Dh$ (genommen an zusammengehörenden Stellen) ist nach der Kettenregel

$$D\Phi = D\Psi \cdot Dh.$$

Hier haben $D\Phi$ und $D\Psi$ jeweils zwei Spalten, nämlich

$$D\Phi = (\partial_{u_1} \Phi, \partial_{u_2} \Phi), \quad D\Psi = (\partial_{v_1} \Psi, \partial_{v_2} \Psi).$$

Für jeden Vektor $a \in \mathbb{R}^3$ ist dann

$$(a, \partial_{u_1} \Phi, \partial_{u_2} \Phi) = (a, \partial_{v_1} \Psi, \partial_{v_2} \Psi) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & Dh \\ 0 & \end{pmatrix}$$

und damit

$$\det(a, \partial_{u_1} \Phi, \partial_{u_2} \Phi) = \det(a, \partial_{v_1} \Psi, \partial_{v_2} \Psi) \cdot \det(Dh).$$

Liest man die ersten beiden Determinanten als Spatprodukt und bedenkt, daß der Vektor a völlig beliebig ist, so folgt die Behauptung 1.

2. folgt damit direkt aus der Definition von g und dem Transformationssatz für Integrale. \square

Das Standard-Beispiel zur Oberflächenbestimmung ist der Flächeninhalt der Sphäre

$$S_r := \{x \in \mathbb{R}^3 \mid |x| = r\} \quad (r > 0).$$

Die Sphäre kann man durch Kugelkoordinaten parametrisieren:

Auf $U := \{0 \leq \varphi \leq 2\pi\} \times \{0 \leq \theta \leq \pi\}$ sei

$$\Phi(\varphi, \theta) = \begin{pmatrix} r \sin \theta \cos \varphi \\ r \sin \theta \sin \varphi \\ r \cos \theta \end{pmatrix},$$

was die ganze Sphäre ergibt. Wir bekommen

$$\partial_\varphi \Phi = \begin{pmatrix} -r \sin \theta \sin \varphi \\ r \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_\theta \Phi = \begin{pmatrix} r \cos \theta \cos \varphi \\ r \cos \theta \sin \varphi \\ -r \sin \theta \end{pmatrix}$$

und damit

$$\begin{aligned} E &:= g_{\varphi\varphi} = \langle \partial_\varphi \Phi, \partial_\varphi \Phi \rangle = r^2 \sin^2 \theta, \\ F &:= g_{\varphi\theta} = \langle \partial_\varphi \Phi, \partial_\theta \Phi \rangle = 0, \\ G &:= g_{\theta\theta} = \langle \partial_\theta \Phi, \partial_\theta \Phi \rangle = r^2. \end{aligned}$$

Damit ist $\sqrt{g} = \sqrt{EG - F^2} = r^2 \sin \theta$.

Also lautet der Flächeninhalt

$$A(S_r) = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta \, d\varphi d\theta = 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin \theta \, d\theta = 2\pi r^2 (-\cos \theta) \Big|_0^\pi = 4\pi r^2.$$

Wie die Bogenlänge von Kurven ist auch der Flächeninhalt eines Flächenstücks invariant unter Bewegungen, d.h. unter Translationen und Drehungen, Spiegelungen.

Als nächstes betrachten wir die Integration über eine Fläche:

Definition VA.33 Für ein glattes Flächenstück $M \subset \mathbb{R}^3$ und eine stetige Funktion $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ heißt

$$\int_M f(x) \, do := \int_U f(\Phi(u)) \sqrt{g(u)} \, du_1 du_2$$

das "skalare Oberflächenintegral" von f über M , wobei Φ irgendeine zulässige Parametrisierung von M ist und $do = \sqrt{g(u)} \, du_1 du_2$ das skalare Oberflächenelement (siehe Satz VA.32). Dabei dürfen wieder einzelne Kurven oder Punkte vernachlässigt werden.

Analog zu Satz VA.32 gilt auch hier, daß dieses Integral unabhängig von der gewählten Parametrisierung Φ ist.

Beispiel VA.34 Für die Sphäre S_r mit Radius r ist

$$\Phi : (\varphi, \theta) \mapsto (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta)^T \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi)$$

ein zulässige Parametrisierung mit $\sqrt{g} = r^2 \sin \theta$. Somit lautet für eine stetige Funktion f :

$$\int_{S_r} f(x) \, do = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(\Phi(\varphi, \theta)) r^2 \sin \theta \, d\theta d\varphi.$$

Aufgabe VA.35 Beweisen Sie für das Integral über die Einheitskugel $K(0, 1)$ die Darstellung

$$\int_{K(0,1)} f(x) d^3x = \int_0^1 \left(\int_{S_r} f(x) do \right) dr.$$

Zur Behandlung "vektorieller Oberflächenintegrale" brauchen wir wie bei den entsprechenden Kurvenintegralen den Begriff der "Orientierung".

Für eine zulässige Parametrisierung Φ ist

$$n(x) := \frac{\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi}{|\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi|}(u) \quad \text{für } x = \Phi(u)$$

ein Einheitsvektor, der auf der von $\partial_1 \Phi$ und $\partial_2 \Phi$ im Punkte x aufgespannten Tangentialebene an die Fläche senkrecht steht. Wir nennen ihn einen "Einheits-Normalenvektor".

Bei Änderung der Parametrisierung ergibt sich nach Satz VA.32,1. aus

$$\Phi(u_1, u_2) = \Psi \circ h(u_1, u_2)$$

die Beziehung

$$\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi = \det(Dh) \cdot (\partial_1 \Psi \times \partial_2 \Psi),$$

wobei Dh die JACOBI-Matrix der Transformation h ist.

Damit multipliziert sich also bei einer Parameter-Transformation der Einheitsnormalenvektor mit dem Vorzeichen der Determinante der JACOBI-Matrix Dh des transformierenden Diffeomorphismus h .

Definition VA.36 Zwei zulässige Parametrisierungen Φ und Ψ eines Flächenstücks $M \subset \mathbb{R}^3$ heißen “gleichorientiert”, wenn für die Parametertransformation h mit $\Phi = \Psi \circ h$ die Determinante Dh der JACOBI-Matrix positiv ist und “entgegengesetzt orientiert”, wenn dies Determinante negativ ist.

Die zulässigen Parametrisierungen bilden damit zwei Klassen, die wir als die zwei möglichen “Orientierungen” des Flächenstücks ansprechen. Nach Auswahl einer Orientierung, die wir dann als die “positive Orientierung” bezeichnen, reden wir von einem “orientierten Flächenstück”.

Bei gleichorientierten Parametrisierungen stimmen die für einen Punkt beschriebenen Einheitsnormalenvektoren überein, bei entgegengesetzt orientierten zeigen sie in entgegengesetzte Richtungen.

Satz VA.37 Ein orientiertes Flächenstück M besitzt in jedem Punkt $x \in M$ einen eindeutig bestimmten Normaleneinheitsvektor

$$n(x) := \pm \frac{\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi}{|\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi|}(u) \quad \text{mit } x = \Phi(u),$$

wobei $+$ für positive Orientierungen, $-$ für negative, d.h. zu den positiven entgegengesetzte Orientierungen zu wählen ist.

Das durch $x \mapsto n(x)$ erklärte Vektorfeld heißt das “Einheitsnormalenfeld” auf M .

Beispiel VA.38 Für die Parametrisierung

$$\Phi : (\varphi, \theta) \mapsto (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta)^T \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi, 0 \leq \theta \leq \pi)$$

der Einheitssphäre S_1 ist

$$\partial_\varphi \Phi = \begin{pmatrix} -\sin \theta \sin \varphi \\ \sin \theta \cos \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_\theta \Phi = \begin{pmatrix} \cos \theta \cos \varphi \\ \cos \theta \sin \varphi \\ -\sin \theta \end{pmatrix}$$

und damit

$$(\partial_\varphi \Phi \times \partial_\theta \Phi)(\varphi, \theta) = -\sin \theta \begin{pmatrix} \sin \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi \\ \cos \theta \end{pmatrix} = -\sin \theta \Phi(\varphi, \theta).$$

Es handelt sich also um die ins “Innere” der Hohlkugel zeigende Normale.

Warnung VA.39 Die Vorstellung, daß jede (halbwegs ordentliche) Fläche ein wohldefiniertes Einheitsnormalenfeld besitze, ist leider falsch.

Prominentestes Gegenbeispiel ist das sogenannte MÖBIUS-Band, das man erhält, wenn man einen rechteckigen Papierstreifen



um 180° verdreht und dann so zusammenklebt, daß jeweils die beiden mit A bzw. mit B bezeichneten Ecken aufeinander treffen. Dieses Band können Sie überall grün anmalen, ohne jemals ihren Pinsel absetzen zu müssen, d.h. ein auf der **ganzen** Fläche stetig variiertes Einheitsnormalenfeld kann es nicht geben!

Dagegen hat jedes durch eine zulässige Parametrisierung dargestellte Flächenstück ein Einheitsnormalenfeld, weil wir die Voraussetzungen an die zulässigen Parametrisierungen gerade so gewählt haben.

Lokal sind also solche Felder immer vorhanden, global brauchen sie nicht zu existieren.

Definition VA.40 Es sei M ein orientiertes Flächenstück, dazu $\Phi : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ eine positiv orientierte, zulässige Parametrisierung, $M \ni x \mapsto n(x)$ das Einheitsnormalenfeld und $v : M \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein auf M stetiges Vektorfeld. Dann heißt

$$\int_M v(x) \bullet d\mathbf{o} := \int_M \langle v(x), n(x) \rangle do = \int_U \langle v \circ \Phi, \partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi \rangle du_1 du_2$$

das vektorielle Oberflächenintegral von v über M .

$$d\mathbf{o} := (\partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi) du_1 du_2 = n(x) do$$

heißt das "vektorielle Oberflächenelement".

Man nennt diese Integral auch den "Fluß" von v durch die Fläche M .

Mit dem Transformationssatz bekommt man wieder leicht:

Fakt VA.41 Das vektorielle Oberflächenintegral von v über M ändert sich nicht, wenn man zu einer anderen positiv orientierten Parametrisierung übergeht, geht jedoch in sein negatives über, wenn man die Orientierung umdreht.

Der Integrand hat ja die Gestalt eines Spatproduktes, sodaß wir haben

$$\langle v \circ \Phi, \partial_1 \Phi \times \partial_2 \Phi \rangle = \det \begin{pmatrix} v_1 \circ \Phi & \partial_1 \Phi_1 & \partial_2 \Phi_1 \\ v_2 \circ \Phi & \partial_1 \Phi_2 & \partial_2 \Phi_2 \\ v_3 \circ \Phi & \partial_1 \Phi_3 & \partial_2 \Phi_3 \end{pmatrix}.$$

Beispiel VA.42 Es sei M ein "Blatt" der Schraubenfläche:

$$M := \{(r \cos \varphi, r \sin \varphi, \varphi)^T \mid 0 < r < R, 0 < \varphi < 2\pi\},$$

und

$$v(x, y, z) := (y, -x, z)^T.$$

Es ist

$$\partial_r \Phi = \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \partial_\varphi \Phi = \begin{pmatrix} -r \sin \varphi \\ r \cos \varphi \\ 1 \end{pmatrix}$$

und damit

$$\partial_r \Phi \times \partial_\varphi \Phi = \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ r \end{pmatrix}.$$

Also ist

$$\langle v \circ \Phi, \partial_r \Phi \times \partial_\varphi \Phi \rangle = \left\langle \begin{pmatrix} r \sin \varphi \\ -r \cos \varphi \\ \varphi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sin \varphi \\ -\cos \varphi \\ r \end{pmatrix} \right\rangle = r \sin^2 \varphi + r \cos^2 \varphi + r\varphi = r(\varphi + 1).$$

Folglich ist

$$\int_M v(x) \bullet d\mathbf{o} = \int_0^{2\pi} \int_0^R r(\varphi + 1) dr d\varphi = R^2 \pi (\pi + 1).$$

Die Integralsätze von STOKES, GAUSS, GREEN

Die im Titel genannten Integralsätze sind sämtlich Spezialfälle eines einzigen Satzes von STOKES

$$\int_M d\omega = \int_{\partial M} \omega.$$

Dabei ist M eine (schöne!) Mannigfaltigkeit im \mathbb{R}^n , ∂M deren (ebenfalls schöner!) Rand, darauf ω eine Differentialform und $d\omega$ deren Differential.

In dieser Allgemeinheit braucht man diese Integralsätze etwa in der modernen HAMILTONSchen Mechanik oder in der Relativitätstheorie. Dargestellt findet man dies etwa bei FORSTER, Analysis 3.

Wir begnügen uns hier mit den klassischen Formulierungen dieser Sätze und folgen der Darstellung in FISCHER/KAUL.

Zentrale Sätze vom oben notierten Typ sind

- Der Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung:

$$\int_a^b f'(x) dx = f(b) - f(a).$$

- Dessen Version für Potentiale und einen Weg α von x_a nach x_e

$$\int_{\alpha} \nabla U \bullet dx = U(x_e) - U(x_a).$$

- Der Integralsatz von STOKES:

$$\int_M \operatorname{rot} v \bullet d\mathbf{o} = \int_{\partial M} v \bullet dx,$$

d.h. der Fluß der Rotation eines Vektorfeldes durch eine Fläche M ist gleich dem Integral (der Tangentialkomponente) des Feldes längs der Randkurve von M .

- Der Integralsatz von GAUSS:

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} v d^3x = \int_{\partial\Omega} v \bullet n do,$$

d.h. das Raumintegral der Divergenz eines Feldes über ein Gebiet Ω ist gleich dem Fluß des Feldes durch dessen Rand(-Fläche).

Für achsenparallele Rechtecke bzw. Quader sind die Sätze von STOKES und GAUSS leicht zu beweisen und dies werden wir auch ausführen. Von da aus arbeitet man sich dann schrittweise weiter zu allgemeineren Flächen bzw. Gebieten. Hier werden wir uns mit einigen exemplarischen Betrachtungen begnügen.

Der Integralsatz von STOKES

Zunächst behandeln wir eine einfache Situation.

Q^2 bezeichne das Quadrat: $Q^2 := (-1, +1) \times (-1, +1) \subset \mathbb{R}^2$. Dessen Rand ∂Q^2 besteht aus den vier Wegstücken

$$\begin{aligned} \sigma_1 &: [-1, +1] \ni t \mapsto \begin{pmatrix} t \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \sigma'_1(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 &: [-1, +1] \ni t \mapsto \begin{pmatrix} 1 \\ t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \sigma'_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ \sigma_3 &: [-1, +1] \ni t \mapsto \begin{pmatrix} -t \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \sigma'_3(t) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_4 &: [-1, +1] \ni t \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -t \end{pmatrix} \quad \text{mit} \quad \sigma'_4(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Der Weg $\sigma = \sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 + \sigma_4$ ist dann gerade der einmal positiv durchlaufene Rand von Q^2 . Für ein auf einer offenen Umgebung von $\overline{Q^2}$ noch stetig differenzierbares Vektorfeld $\begin{pmatrix} P_1(x_1, x_2) \\ P_2(x_1, x_2) \end{pmatrix}$ ist dann

$$\int_{\partial Q^2} P_1 dx_1 + P_2 dx_2 = \sum_{i=1}^4 \int_{-1}^{+1} \left\langle \begin{pmatrix} P_1(\sigma_i(t)) \\ P_2(\sigma_i(t)) \end{pmatrix}, \sigma_i'(t) \right\rangle dt$$

und indem man obige Darstellungen für die Teiltränder σ_i einsetzt, ergibt sich dieses Integral zu

$$\begin{aligned} &= \int_{-1}^{+1} (P_1(t, -1) + P_2(1, t) - P_1(-t, 1) - P_2(-1, -t)) dt \\ &= \int_{-1}^{+1} (P_2(1, x_2) - P_2(-1, x_2)) dx_2 - \int_{-1}^{+1} (P_1(x_1, 1) - P_1(x_1, -1)) dx_1 \\ &= \int_{-1}^{+1} \int_{-1}^{+1} (\partial_1 P_2 - \partial_2 P_1) dx_1 dx_2. \end{aligned}$$

Also haben wir

Satz VA.43

1. Es sei $Q^2 := (-1, +1) \times (-1, +1)$ mit positiv durchlaufenem Rand ∂Q^2 , ferner P_1, P_2 stetig differenzierbar auf einer Umgebung von $\overline{Q^2}$. Dann ist

$$\int_{Q^2} (\partial_1 P_2 - \partial_2 P_1) dx_1 dx_2 = \int_{\partial Q^2} P_1 dx_1 + P_2 dx_2.$$

2. Hier kann man (unter trivialer Modifikation des Beweises) das speziell gewählte Quadrat Q^2 durch ein beliebiges achsenparalleles Rechteck ersetzen. Häufig werden wir speziell das "Einheitsquadrat" $E^2 := (0, 1) \times (0, 1)$ benutzen. Die vier Geradenstücke, aus denen dessen Rand zusammengesetzt ist, bezeichnen wir auch hier wieder mit $\sigma_1, \dots, \sigma_4$.

Aufgabe VA.44 Interpretieren Sie dieses Ergebnis als einen Spezialfall des allgemeinen Satzes von STOKES

$$\int_M \text{rot } v \bullet d\mathbf{o} = \int_{\partial M} v \bullet d\mathbf{x}.$$

In einem nächsten Schritt ersetzen wir nun unser Einheitsquadrat durch sein Bild unter einer C^2 -Abbildung Φ , an die wir noch gewisse zusätzliche Forderungen stellen.

Definition VA.45 Ein orientiertes glattes Flächenstück $M \subset \mathbb{R}^3$ heißt ein "zweidimensionales Pflaster", wenn es eine (zulässige) C^2 -Parametrisierung $\Phi : \overline{E^2} \rightarrow M$ (mit dem abgeschlossenen Einheitsquadrat $\overline{E^2} = [0, 1] \times [0, 1]$) gibt, sodaß gelten

1. Φ ist auf E^2 eine positive Parametrisierung von M ,
2. Für $k = 1, 2, 3, 4$ ist die "k-te Seite" von Φ :

$$\varphi_k := \Phi \circ \sigma_k|_{(0,1)}$$

(also eingeschränkt auf das offene Intervall $(0, 1)$!) entweder konstant (d.h. zu einem Punkt entartet) oder injektiv und regulär.

3. Ein beliebiger Punkt $x \in \mathbb{R}^3$ kann zu höchstens zwei nichtentarteten Seiten gehören. Haben zwei nichtentartete Seiten φ_k und $\varphi_{k'}$ einen Punkt gemeinsam, so stellen beide den selben Weg dar, den sie jedoch entgegengesetzt durchlaufen, d.h. es existiert eine stetig differenzierbare Funktion $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $\varphi_{k'} = \varphi_k \circ h$ und $\frac{d}{dt}h < 0$.

Dann nennt man Φ eine "Pflasterparametrisierung".

Beispiele:

– Ist Ψ ein C^2 -Diffeomorphismus zwischen einem $\overline{E^2}$ umfassenden räumlichen Gebiet G und einem weiteren Gebiet $G' \subset \mathbb{R}^3$, so erfüllt $\Phi := \Psi|_{\overline{E^2}}$ offenbar alle Bedingungen, wobei kein Rand entartet.

Unser Quadrat wird verzerrt und verbeult in den \mathbb{R}^3 geschoben, behält aber seine vier "Ecken" und die vier dazwischen liegenden "Teilränder".

Eine einfache Abbildung von diesem Typ ist etwa gegeben durch

$$\Phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u_1, u_2) \mapsto \begin{pmatrix} \cos(\omega u_1) \\ \sin(\omega u_1) \\ \omega u_2 \end{pmatrix},$$

wobei $0 < \omega < 2\pi$. Diese Abbildung biegt das Einheitsquadrat zu einem Ausschnitt eines Zylindermantels zusammen. Keine Seite entartet.

Im Falle $\omega = 2\pi$ können wir zwar Φ nicht mehr aus einem Diffeomorphismus gewinnen, es handelt sich aber immer noch um eine Pflasterparametrisierung. Die Seiten φ_2 und φ_4 fallen entgegengesetzt orientiert aufeinander, d.h. wir haben dann einen ringförmigen Abschnitt eines Zylindermantels.

In beiden Fällen haben wir also ein zweidimensionales Pflaster erhalten.

– Die notierten schwächeren Bedingungen an Φ lassen aber auch allgemeinere Bilder zu.

Die folgende Abbildung macht aus unserem Einheitsquadrat ein Dreieck, wobei eine Seite zu einem Punkt schrumpft:

$$\Phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u_1, u_2) \mapsto \begin{pmatrix} u_1 \\ u_1 u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

liefert das Dreieck mit den Ecken $(0, 0, 0)^T$, $(1, 0, 0)^T$, $(1, 1, 0)^T$. Durch triviale Modifikationen erhält man also allgemein:

Ein Dreieck ist ein zweidimensionales Pflaster.

Setzen wir

$$\Phi : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3, \quad (u_1, u_2) \mapsto u_1 \begin{pmatrix} \cos 2\pi u_2 \\ \sin 2\pi u_2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

so liefert Φ eine Parametrisierung der Kreisscheibe vom Radius 1. Dabei gehen über die Ränder

$$\begin{aligned} \sigma_1 : \begin{pmatrix} u_1 \\ 0 \end{pmatrix} &\mapsto \varphi_1 : = u_1 \begin{pmatrix} \cos 0 \\ \sin 0 \\ 0 \end{pmatrix} = u_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_2 : \begin{pmatrix} 1 \\ u_2 \end{pmatrix} &\mapsto \varphi_2 : = \begin{pmatrix} \cos 2\pi u_2 \\ \sin 2\pi u_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \text{Kreislinie} \\ \sigma_3 : \begin{pmatrix} 1-u_1 \\ 1 \end{pmatrix} &\mapsto \varphi_3 : = (1-u_1) \begin{pmatrix} \cos 2\pi \\ \sin 2\pi \\ 0 \end{pmatrix} = (1-u_1) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ \sigma_4 : \begin{pmatrix} 0 \\ 1-u_2 \end{pmatrix} &\mapsto \varphi_4 : = 0 \cdot \begin{pmatrix} \cos \dots \\ \sin \dots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Die Seite φ_4 ist zum Nullpunkt entartet, die Seiten φ_1 und φ_3 sind gegenläufig orientiert die Strecke auf der x -Achse zwischen 0 und 1, φ_2 parametrisiert die volle Kreislinie.

Also haben wir

Eine Kreisscheibe ist ein zweidimensionales Pflaster.

Aufgabe: Zeigen Sie, daß auch ein Kegelmantelstumpf, eine Halbkugelsphäre, eine Vollkugelsphäre Pflaster sind.

An den Beispielen wird deutlich, daß die Bilder φ_k der Teilränder σ_k unseres Einheitsquadrates nicht unbedingt noch zum Rand des Bildes, d.h. des Pflasters gehören. Es werden in diesem Sinne unerheblich

- entartete Seiten,
- “hin und her durchlaufene” Seiten(-paare).

Damit ist folgende Definition sinnvoll:

Definition und Satz VA.46 Zu einer Pflasterparametrisierung $\Phi : E^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ eines Flächenstücks M sei eine Seite φ_k “wesentlich”, wenn sie

- nicht ausgeartet ist oder
- nicht zu einem Paar hin und her durchlaufener Seiten gehört.

Der Rand ∂M besteht dann aus den wesentlichen Seiten $\varphi_{i_1}, \dots, \varphi_{i_m}$ von Φ bzw. es ist $\partial M = \emptyset$, wenn es keine solchen wesentlichen Seiten gibt.

Wir erklären für ein Vektorfeld v :

$$\int_{\partial M} v \bullet d\mathbf{x} = \begin{cases} \int_{\varphi_{i_1}} v \bullet d\mathbf{x} + \dots + \int_{\varphi_{i_m}} v \bullet d\mathbf{x} & \text{wenn } m > 0, \\ 0 & \text{wenn } m = 0. \end{cases}$$

Bemerkung: Eine genaue Rechtfertigung dieser Definition ist recht aufwendig. Wir beschränken uns auf “vernünftige” Parametrisierungen, wo sie evident ist.

In der eben gegebenen Darstellung für das Integral über den Rand ∂M kommen die Integrale über die nicht wesentlichen Seiten nicht vor. Andererseits hat das Integral $\int_{\varphi_i} v \bullet d\mathbf{x}$ über eine ausgeartete Seite den Wert 0, ferner heben sich die entsprechenden Integrale über ein Paar hin und her durchlaufener Seiten auf. Damit ist es für den Wert des entstehenden Rand-Integrals unerheblich, wenn wir die Integrale über die nichtwesentlichen Seiten hinzunehmen, d.h. über alle Seiten summieren. Dies bedeutet

Satz VA.47 Sind $\varphi_1, \dots, \varphi_4$ die Seiten einer Pflasterparametrisierung von M , so ist für ein auf M erklärtes stetiges Vektorfeld v

$$\int_{\partial M} v \bullet dx = \sum_{i=1}^4 \int_{\varphi_i} v \bullet dx.$$

Wir zeigen nun den

Satz VA.48 (von STOKES für Pflaster) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein Gebiet, $M \subset \Omega$ ein zweidimensionales Pflaster, $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$ ein C^1 -Vektorfeld. Dann ist

$$\int_M \operatorname{rot} v \bullet d\mathbf{o} = \int_{\partial M} v \bullet dx$$

Beweis: Wir wählen eine Pflasterparametrisierung Φ für M (die ist dann automatisch positiv orientiert), sodaß mit dem Einheitsquadrat E^2 gilt $\Phi(\overline{E^2}) = M$ und führen mittels dieser Parametrisierung die behauptete Aussage auf die von Satz VA.43 zurück. Wir brauchen dazu folgende algebraische Identität:

Für Vektoren

$$r = (r_1, r_2, r_3)^T, a = (a_1, a_2, a_3)^T, b = (b_1, b_2, b_3)^T \in \mathbb{R}^3$$

gilt mit der Matrix

$$R := R(r) := \begin{pmatrix} 0 & -r_3 & r_2 \\ r_3 & 0 & -r_1 \\ -r_2 & r_1 & 0 \end{pmatrix}$$

die Beziehung

$$R \cdot a = r \times a$$

und damit auch

$$\langle R \cdot a, b \rangle = \langle r \times a, b \rangle = \langle r, a \times b \rangle.$$

Die simple Rechnung sei übergangen.

Zu der gewählten Parametrisierung $\Phi : \overline{E^2} \subset U \ni u \mapsto \Phi(u) \in \mathbb{R}^3$ seien mit ∂_1 und ∂_2 die Differentiation nach den beiden Komponenten von u bezeichnet, damit also $D\Phi = (\partial_1\Phi, \partial_2\Phi)$ die JACOBI-Matrix von Φ . $D_x v$ bezeichne die JACOBI-Matrix des auf $\overline{M} \subset \Omega \subset \mathbb{R}^3$ erklärten Vektorfeldes v .

Wir bilden die Funktion

$$u \mapsto P(u) := \begin{pmatrix} P_1(u) \\ P_2(u) \end{pmatrix} := (D\Phi)^T \cdot v(\Phi(u)),$$

d.h. es ist

$$P_j(u) = \langle v(\Phi(u)), \partial_j \Phi(u) \rangle \quad (j = 1, 2).$$

Aus der Produktregel folgt

$$\partial_i P_j = \langle \partial_i(v \circ \Phi), \partial_j \Phi \rangle + \langle v \circ \Phi, \partial_i \partial_j \Phi \rangle$$

und damit unter Benutzen des Satzes von SCHWARZ

$$\begin{aligned} \partial_1 P_2 - \partial_2 P_1 &= \langle \partial_1(v \circ \Phi), \partial_2 \Phi \rangle - \langle \partial_2(v \circ \Phi), \partial_1 \Phi \rangle \\ &= \langle D_x v \cdot \partial_1 \Phi, \partial_2 \Phi \rangle - \langle D_x v \cdot \partial_2 \Phi, \partial_1 \Phi \rangle \\ &= \langle (D_x v - (D_x v)^T) \cdot \partial_1 \Phi, \partial_2 \Phi \rangle. \end{aligned}$$

Nun ist

$$D_x v = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_1}{\partial x_1} & \frac{\partial v_1}{\partial x_2} & \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} & \frac{\partial v_2}{\partial x_2} & \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_3}{\partial x_1} & \frac{\partial v_3}{\partial x_2} & \frac{\partial v_3}{\partial x_3} \end{pmatrix}$$

und damit

$$D_x v - (D_x v)^T = \begin{pmatrix} 0 & \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_1} \right) & \left(\frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \right) \\ \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \right) & 0 & \left(\frac{\partial v_2}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_2} \right) \\ \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_3} \right) & \left(\frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \right) & 0 \end{pmatrix}.$$

Diese Matrix hat also die Gestalt der in der obigen Identität benutzten Matrix $R(r)$, wobei hier gerade

$$r = \begin{pmatrix} \frac{\partial v_3}{\partial x_2} - \frac{\partial v_2}{\partial x_3} \\ \frac{\partial v_1}{\partial x_3} - \frac{\partial v_3}{\partial x_1} \\ \frac{\partial v_2}{\partial x_1} - \frac{\partial v_1}{\partial x_2} \end{pmatrix} = \operatorname{rot}_x v,$$

d.h. die Rotation des gegebenen Vektorfeldes ist. Über die oben abgeleitete Identität bekommen wir also

$$(\partial_1 P_2 - \partial_2 P_1)(u) = \langle (\operatorname{rot}_x v)(\Phi(u)), \partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u) \rangle$$

und dies führt schließlich nach Definition VA.40 auf

$$\begin{aligned} \int_M \operatorname{rot}_x v \bullet d\mathbf{o} &= \int_{E^2} \langle (\operatorname{rot}_x v)(\Phi(u)), \partial_1 \Phi(u) \times \partial_2 \Phi(u) \rangle du_1 du_2 \\ &= \int_{E^2} (\partial_1 P_2 - \partial_2 P_1)(u) du_1 du_2. \end{aligned}$$

Nach dem Satz VA.43 ist dies

$$\begin{aligned} &= \int_{\partial E^2} P_1 du_1 + P_2 du_2 \\ &= \sum_{j=1}^4 \int_0^1 \langle P(\sigma_j(t)), \sigma_j'(t) \rangle dt \\ &= \sum_{j=1}^4 \int_0^1 \langle (D\Phi)^T \cdot v(\Phi(\sigma_j(t))), \sigma_j'(t) \rangle dt \\ &= \sum_{j=1}^4 \int_0^1 \langle v(\Phi(\sigma_j(t))), D\Phi \cdot \sigma_j'(t) \rangle dt \\ &= \sum_{j=1}^4 \int_0^1 \langle v(\Phi(\sigma_j(t))), (\Phi(\sigma_j(t)))' \rangle dt \\ &= \int_{\partial M} v(x) \bullet d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

womit die behauptete Integralformel gezeigt ist. \square

Mit den Pflastern haben wir nun schon eine recht reichhaltige Kollektion von Flächen, für die der Integralsatz von STOKES gilt, aber etwa die Oberfläche eines Quaders ist kein Pflaster. Allerdings läßt sie sich aus Pflastern zusammensetzen und darüber der Satz von STOKES auch für sie beweisen. Dies sei noch etwas systematischer behandelt.

Definition VA.49 Eine "zweidimensionale Pflasterkette" M im \mathbb{R}^3 besteht aus endlich vielen Pflasterparametrisierungen $\Phi_1, \dots, \Phi_N : \overline{E^2} \rightarrow \mathbb{R}^3$, sodaß mit $M_i := \Phi_i(E^2)$, $\varphi_{ij} := \Phi_i \circ \sigma_j : (0, 1) \rightarrow \mathbb{R}^3$ ($i = 1, \dots, N$, $j = 1, \dots, 4$) gilt

- $M_i \cap M_k = \emptyset$ für $i \neq k$,
- Jeder Punkt gehört zu höchstens zwei nichtentarteten Seiten. Haben zwei nicht-entartete Seiten φ_{ik} und $\varphi_{i'k'}$ einen Punkt gemeinsam, so stellen beide den selben Weg dar, den sie jedoch entgegengesetzt durchlaufen, d.h. es existiert eine stetig differenzierbare Funktion $h : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ mit $\varphi_{i'k'} = \varphi_{ik} \circ h$ und $\frac{d}{dt}h < 0$.

Wir schreiben für die Pflasterkette kurz

$$M := M_1 + \dots + M_N.$$

Für ein auf $\bigcup_i \overline{M_i}$ erklärtes und stetiges Vektorfeld v sei

$$\int_M v \bullet d\mathbf{o} = \int_{M_1} v \bullet d\mathbf{o} + \dots + \int_{M_N} v \bullet d\mathbf{o}.$$

Den Rand ∂M der Pflasterkette definieren wir als Vereinigung aller **wesentlichen** Ränder φ_{ik} , die also weder entartet sind, noch zu einem Paar hin und her durchlaufener Ränder gehören. Dafür setzt man

$$\int_{\partial M} v \bullet d\mathbf{x} := \int_{\partial\psi_1} v \bullet d\mathbf{x} + \dots + \int_{\partial\psi_m} v \bullet d\mathbf{x},$$

wobei die ψ_i gerade alle wesentlichen Ränder durchlaufen.

Wie oben ist auch hier der Gesamtbeitrag aller Integrale über die nichtwesentlichen Ränder gleich 0, sodaß wir auch alle Ränder der Teilpflaster mitnehmen können. Es ist dann also

$$\int_{\partial M} v \bullet d\mathbf{x} = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^4 \int_{\partial\varphi_{ij}} v \bullet d\mathbf{x}.$$

Bei gegebener Pflasterkette gilt für jedes Teilpflaster M_i der Satz von STOKES

$$\int_{M_i} \text{rot } v \bullet d\mathbf{o} = \int_{\partial M_i} v \bullet d\mathbf{x}$$

und durch Addition erhält man:

Satz VA.50 Der Satz von STOKES gilt auch für Pflasterketten.

Der Integralsatz von GAUSS

Der GAUSS-sche Satz besagt, daß für ein Gebiet $\Omega \in \mathbb{R}^3$ und ein auf einer Umgebung von $\overline{\Omega}$ stetig differenzierbares Vektorfeld v gilt

$$\int_{\Omega} \text{div } v \, d^3x = \int_{\partial\Omega} v \bullet d\mathbf{o},$$

vorausgesetzt, daß der Rand $\partial\Omega$ hinreichend "schön" ist und insbesondere (fast) überall eine nach außen weisende Einheitsnormale $n(x)$ besitzt.

Die eigentliche Schwierigkeit bei diesem Satz liegt wieder in der richtigen Beschreibung der zulässigen Gebiete. Zunächst betrachten wir als Gebiet Ω den offenen Einheitswürfel im \mathbb{R}^3

$$E^3 := (0, 1) \times (0, 1) \times (0, 1) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid 0 < x_i < 1\}.$$

Dieser Würfel hat sechs Seitenflächen, die wir wir folgt nummerieren:

$$\begin{aligned} E_{1\mu} &= \{\mu\} \times (0, 1) \times (0, 1) & (\mu = 0, 1) \\ E_{2\mu} &= (0, 1) \times \{\mu\} \times (0, 1) & (\mu = 0, 1) \\ E_{3\mu} &= (0, 1) \times (0, 1) \times \{\mu\} & (\mu = 0, 1) \end{aligned}$$

Wir legen darauf jeweils Einheitsnormalenfelder, d.h. eine Orientierung, fest durch

$$n_{j\mu} := (-1)^{1-\mu} e_j \quad (j = 1, 2, 3; \mu = 0, 1).$$

Das ist die jeweils nach außen zeigende Einheitsnormale. Zusammen bilden sie das **äußere Einheitsnormalenfeld** n auf dem Rand des Würfels.

Satz VA.51 (Integralsatz von GAUSS für den Würfel)

1. Für ein auf einer Umgebung des abgeschlossenen Einheitswürfels $\overline{E^3}$ stetig differenzierbares Vektorfeld v ist

$$\int_{E^3} \operatorname{div} v \, d^3x = \int_{\partial E^3} v \cdot d\mathbf{o},$$

wobei wir gesetzt haben

$$\int_{\partial E^3} v \cdot d\mathbf{o} = \sum_{j=1}^3 \sum_{\mu=0}^1 \int_{E_{j\mu}} v \cdot d\mathbf{o} = \sum_{j=1}^3 \sum_{\mu=0}^1 \int_{E_{j\mu}} v \cdot n \, d\mathbf{o}.$$

2. Die Voraussetzung über v kann man abschwächen zu: v stetig differenzierbar in E^3 , stetig auf $\overline{E^3}$ und beschränkte Ableitungen auf E^3 . Der folgende Beweis zeigt zudem, daß man den Einheitswürfel durch einen beliebigen achsenparallelen Quader ersetzen kann.

Beweis: Für die Würfelseiten verwenden wir die folgenden Parametrisierungen

$$\begin{aligned} \Gamma_{j\mu} &: (0, 1) \times (0, 1) \rightarrow E_{j\mu} \quad (j = 1, 2, 3; \mu = 0, 1) \\ \Gamma_{1\mu}(u_1, u_2) &:= (\mu, u_1, u_2) \\ \Gamma_{2\mu}(u_1, u_2) &:= (u_1, \mu, u_2) \\ \Gamma_{3\mu}(u_1, u_2) &:= (u_1, u_2, \mu). \end{aligned}$$

Für diese Parametrisierungen haben wir als Vektoren der partiellen Ableitungen, d.h. als Tangentialvektoren etwa

$$\begin{aligned} \partial_1 \Gamma_{1\mu} &= e_2, \quad \partial_2 \Gamma_{1\mu} = e_3 \\ \partial_1 \Gamma_{1\mu} \times \partial_2 \Gamma_{1\mu} &= e_2 \times e_3 = e_1. \end{aligned}$$

Durch Vergleich mit der oben festgelegten Normalenrichtung ist also Γ_{10} eine negativ, Γ_{11} eine positiv orientierte Parametrisierung von $E_{1\mu}$. Allgemein bekommt man so

$$\partial_1 \Gamma_{j\mu} \times \partial_2 \Gamma_{j\mu} = (-1)^{j+1} e_j = (-1)^{j+\mu} (-1)^{1-\mu} e_j = (-1)^{j+\mu} n_{j\mu},$$

d.h. $\Gamma_{j\mu}$ ist eine positive bzw. negative Parametrisierung, je nachdem ob $j+\mu$ gerade oder ungerade ist. Wir haben somit

$$\int_{E_{j\mu}} v \bullet d\mathbf{o} = \int_{E_{j\mu}} v \bullet n_{j\mu} d\mathbf{o} = (-1)^{1-\mu} \int_{E_{j\mu}} v \bullet e_j d\mathbf{o} = (-1)^{1-\mu} \int_{E_{j\mu}} v_j d\mathbf{o}$$

und damit

$$\begin{aligned} \int_{E^3} \partial_1 v_1 d^3x &= \int_0^1 \int_0^1 \left(\int_0^1 \frac{\partial v_1}{\partial x_1}(x_1, x_2, x_3) dx_1 \right) dx_2 dx_3 \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (v_1(1, x_2, x_3) - v_1(0, x_2, x_3)) dx_2 dx_3 \quad (*) \\ &= \int_0^1 \int_0^1 (v_1 \circ \Gamma_{11})(u_1, u_2) du_1 du_2 - \int_0^1 \int_0^1 (v_1 \circ \Gamma_{10})(u_1, u_2) du_1 du_2 \\ &= \int_{E_{11}} v_1 d\mathbf{o} - \int_{E_{10}} v_1 d\mathbf{o} \\ &= \int_{E_{11}} v \bullet d\mathbf{o} + \int_{E_{10}} v \bullet d\mathbf{o} \end{aligned}$$

Analog bekommt man allgemein

$$\int_{E^3} \partial_j v_j d^3x = \int_{E_{j1}} v \bullet d\mathbf{o} + \int_{E_{j0}} v \bullet d\mathbf{o},$$

woraus durch Addition die Behauptung zu 1. folgt.

Unter den Voraussetzungen von 2. kann man die in (*) durchgeführte innere Integration noch durch einen Grenzübergang gewinnen und dann wie oben weiterschließen. \square

Der Gültigkeitsbereich dieses Satzes soll nun auf allgemeine Gebiete ausgeweitet werden.

Zunächst betrachten wir nur "schöne" Bilder des Einheitswürfels.

Definition VA.52 Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ heißt dreidimensionales Pflaster, wenn es eine C^2 -Abbildung $h : U \rightarrow \mathbb{R}^3$ einer Umgebung des abgeschlossenen Einheitswürfels $\overline{E^3}$ gibt, sodaß gelten:

1. Es ist $h(E^3) = \Omega$ und die Abbildung $h : E^3 \rightarrow \Omega$ ist bijektiv mit $\det Dh > 0$ auf E^3 .
2. Die Seiten

$$\Phi_{j\mu} := h \circ \Gamma_{j\mu} : E^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

sind entweder eine zulässige Flächenparametrisierung von

$$M_{j\mu} := \Phi_{j\mu}(E^2)$$

oder die Seite ist **entartet**, d.h.

$$\text{rg}(D\Phi_{j\mu}) \leq 1 \text{ auf } E^2.$$

3. Haben zwei nichtentartete Seiten $M_{i\mu}$ und $M_{j\nu}$ ($i\mu \neq j\nu$) einen Punkt gemeinsam, so sind sie als Flächen identisch, aber verschieden orientiert, d.h.

$$\det(D(\Phi_{i\mu}^{-1}\Phi_{j\nu})) < 0$$

auf dem (offenen) Einheitsquadrat E^2 .

Eine solche Abbildung h heißt eine **Pflasterparametrisierung** von Ω .

Für die nichtentarteten Seiten $M_{i\mu}$ legen wir ein Einheitsnormalenfeld, d.h. eine positive Orientierung, fest durch die Forderung, daß die Parametrisierungen $\Gamma_{i\mu}$ von $E_{i\mu}$ und $\Phi_{i\mu}$ von $h(E_{i\mu})$ gleichzeitig positiv oder negativ orientiert seien.

Ein Seite $M_{i\mu}$ heiße "wesentlich", wenn sei weder entartet ist, noch zu einem Paar sich gemäß 3. entsprechender Seiten gehört.

Ein Gebiet $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ nennen wir ein **GAUSS-Gebiet**, wenn es eine Pflasterparametrisierung h von Ω gibt, sodaß der topologische Rand $\partial\bar{\Omega}$ des Abschlusses bis auf endlich viele Kurvenstücke die Vereinigung der wesentlichen Seiten der Parametrisierung h ist.

Mit dieser Definition bekommt man dann

Fakt VA.53 Auf dem Rand eines GAUSS-Gebietes ist mit obiger Festsetzung ein (bis auf die Punkte von endlich vielen Kurvenstücken) wohldefiniertes Einheitsnormalenfeld erklärt, das nach außen weist.

Es ist wohl klar, daß man statt des Einheitswürfels E^3 auch irgend einen anderen achsenparallelen Quader als Parameterbereich verwenden kann.

Aufgaben VA.54 Zeigen Sie, daß die folgenden Gebiete GAUSS-Gebiete sind:

- Eine (nicht notwendig achsenparalleler) Quader,
- eine Pyramide mit viereckiger Grundfläche (eine Würfelseite zum Punkt entarten lassen),
- eine Kugel (benutze Kugelkoordinaten),
- diffeomorphe, d.h. "harmlos" verbogene und verzerrte Bilder solcher Objekte.

Das Randintegral $\int_{\partial\Omega} v \bullet d\mathbf{o}$ eines Vektorfeldes v über den Rand $\partial\Omega$ eines GAUSS-Gebietes Ω erklären wir über die Seiten der Parametrisierung h zu

$$\int_{\partial\Omega} v \bullet d\mathbf{o} := \sum_{M_{j\mu} \text{ wesentlich}} \int_{M_{j\mu}} v \bullet d\mathbf{o} = \sum_{M_{j\mu} \text{ wesentlich}} \int_{M_{j\mu}} (v \bullet n) d\mathbf{o},$$

wobei rechts die festgesetzte, nach außen weisende Normale zu nehmen ist.

Wie im zweidimensionalen Fall liefern entartete Seiten keinen Beitrag, ebenso heben sich die Integrale über entsprechend Definition VA.52,3. zweimal vorhandene Seiten weg, sodaß man ebensogut wieder über alle Seiten der Pflasterparametrisierung integrieren kann. Es ist dann also (siehe Definition VA.40)

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} v \bullet d\mathbf{o} &= \sum_{j=1}^3 \sum_{\mu=0}^1 \int_{M_{j\mu}} v \bullet d\mathbf{o} \\ &= \sum_{j=1}^3 \sum_{\mu=0}^1 (-1)^{j+\mu} \int_{E^2} \langle v \circ \Phi_{j\mu}, \partial_1 \Phi_{j\mu} \times \partial_2 \Phi_{j\mu} \rangle du_1 du_2 \end{aligned} \quad (1)$$

Damit gilt nun der

Satz VA.55 (Integralsatz von GAUSS) Ist $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein GAUSS-Gebiet, v ein C^1 -Vektorfeld auf einer Umgebung von $\bar{\Omega}$, so ist

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} v d^3x = \int_{\partial\Omega} v \bullet d\mathbf{o},$$

wobei rechts das nach außen gerichtetet Einheitsnormalenfeld zu nehmen ist.

Bemerkung VA.56 – Wie im Falle des Einheitswürfels kann man die Forderung an die Glattheit des Vektorfeldes abschwächen. So reichen etwa v stetig differenzierbar auf Ω , stetig auf $\overline{\Omega}$ und $\operatorname{div} v$ beschränkt auf Ω .

- Statt ein aus **einem** Pflaster bestehendes Gebiet zu betrachten, kann man natürlich auch wieder endlich viele Pflaster aneinanderhängen, wenn man an den Rändern entsprechend vorsichtig ist.

Beweis: Wir schicken wieder eine algebraische Identität voraus:

Für Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$, wobei B die Spalten b_i hat, ist

$$\det(Ab_1, b_2, b_3) + \det(b_1, Ab_2, b_3) + \det(b_1, b_2, Ab_3) = \operatorname{spur}(A) \cdot \det B.$$

Zum Beweis fasse man diesen Ausdruck als Funktion der drei Spaltenvektoren b_1, b_2, b_3 auf. Man erkennt leicht, daß diese Funktion 3-linear und alternierend ist, somit von der Form $C \cdot \det B$. Für die Einheitsmatrix $B = I$ bestimmt sich diese Konstante zu $C = \operatorname{spur} A$.

Wir führen nun den Integralsatz für das GAUSS-Gebiet Ω zurück auf den Satz VA.51, d.h. den entsprechenden Satz für den Einheitswürfel. Dazu bezeichne $h : E^3 \ni y \mapsto x = h(y) \in \Omega$ die Pflasterung, wobei also $\det(Dh) > 0$ auf E^3 , $\Gamma_{j\mu}$ seien wieder die Seiten von E^3 , $\Phi_{j\mu} := h \circ \Gamma_{j\mu}$ die Seiten von Ω . ∂_i bezeichne die Ableitungen nach den beiden für die $\Gamma_{j\mu}, \Phi_{j\mu}$ benutzten Randparametern, ∂_{y_i} die Ableitung nach den Variablen in E^3 , ∂_{x_i} die Ableitung nach den Variablen in Ω .

1. Zu unserem gegebenen Feld $v : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^3$, $x \mapsto v(x)$ definieren wir ein neues Feld $w : E^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $y \mapsto w(y)$ durch

$$(Dh)(y)w(y) := \det(Dh(y)) \cdot (v \circ h)(y). \quad (2)$$

(Da für eine quadratische Matrix $(\det A) \cdot A^{-1}$ als Matrix aus den algebraischen Komplementen auch für nichtinvertierbare Matrizen wohldefiniert ist, ist das Feld w auch noch auf dem Rand des Einheitswürfels erklärt.)

Auf einer Seite $E_{j\mu}$ ist dann

$$\begin{aligned} & \langle v \circ \Phi_{j\mu}, \partial_1 \Phi_{j\mu} \times \partial_2 \Phi_{j\mu} \rangle \\ &= \langle v \circ h \circ \Gamma_{j\mu}, \partial_1 (h \circ \Gamma_{j\mu}) \times \partial_2 (h \circ \Gamma_{j\mu}) \rangle \\ &= \frac{1}{\det(Dh)} \langle \det(Dh) \cdot (v \circ h) \circ \Gamma_{j\mu}, (Dh) \partial_1 \Gamma_{j\mu} \times (Dh) \partial_2 \Gamma_{j\mu} \rangle \\ &\stackrel{(2)}{=} \frac{1}{\det(Dh)} \langle (Dh) \cdot w \circ \Gamma_{j\mu}, (Dh) \partial_1 \Gamma_{j\mu} \times (Dh) \partial_2 \Gamma_{j\mu} \rangle \\ &= \langle w \circ \Gamma_{j\mu}, \partial_1 \Gamma_{j\mu} \times \partial_2 \Gamma_{j\mu} \rangle, \end{aligned}$$

wobei im letzten Schritt die Interpretation des Spatproduktes als Determinante benutzt wurde.

Wir haben also für jede Seite mit dem neu eingeführten Feld w :

$$\langle v \circ \Phi_{j\mu}, \partial_1 \Phi_{j\mu} \times \partial_2 \Phi_{j\mu} \rangle = \langle w \circ \Gamma_{j\mu}, \partial_1 \Gamma_{j\mu} \times \partial_2 \Gamma_{j\mu} \rangle. \quad (3)$$

2. Durch Multiplikation von (2) mit $\partial_{y_2} h \times \partial_{y_3} h$ erhält man als Darstellung für die erste Komponente von w

$$w_1 = \langle v \circ h, \partial_{y_2} h \times \partial_{y_3} h \rangle$$

und analog

$$\begin{aligned} w_2 &= \langle v \circ h, \partial_{y_3} h \times \partial_{y_1} h \rangle \\ w_3 &= \langle v \circ h, \partial_{y_1} h \times \partial_{y_2} h \rangle \end{aligned}$$

Partielles Ableiten liefert

$$\begin{aligned} \partial_{y_1} w_1 &= \langle (Dv \circ h) \cdot \partial_{y_1} h, \partial_{y_2} h \times \partial_{y_3} h \rangle + \langle v \circ h, \partial_{y_1} \partial_{y_2} h \times \partial_{y_3} h + \partial_{y_2} h \times \partial_{y_1} \partial_{y_3} h \rangle \\ \partial_{y_2} w_2 &= \langle (Dv \circ h) \cdot \partial_{y_2} h, \partial_{y_3} h \times \partial_{y_1} h \rangle + \langle v \circ h, \partial_{y_2} \partial_{y_3} h \times \partial_{y_1} h + \partial_{y_3} h \times \partial_{y_2} \partial_{y_1} h \rangle \\ \partial_{y_3} w_3 &= \langle (Dv \circ h) \cdot \partial_{y_3} h, \partial_{y_1} h \times \partial_{y_2} h \rangle + \langle v \circ h, \partial_{y_3} \partial_{y_1} h \times \partial_{y_2} h + \partial_{y_1} h \times \partial_{y_3} \partial_{y_2} h \rangle \end{aligned}$$

Summiert man dies auf, so heben sich die jeweils als zweite Summanden auftretenden Terme weg, und wir bekommen

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_y w &= \langle (Dv \circ h) \cdot \partial_{y_1} h, \partial_{y_2} h \times \partial_{y_3} h \rangle \\ &\quad + \langle (Dv \circ h) \cdot \partial_{y_2} h, \partial_{y_3} h \times \partial_{y_1} h \rangle \\ &\quad + \langle (Dv \circ h) \cdot \partial_{y_3} h, \partial_{y_1} h \times \partial_{y_2} h \rangle. \end{aligned}$$

Liest man die hier auftretenden Spatprodukte wieder als Determinanten, so paßt hierauf die eingangs abgeleitete Identität und wegen

$$\operatorname{spur}(Dv) = \operatorname{div}_x v$$

folgt

$$\operatorname{div}_y w = ((\operatorname{div}_x v) \circ h) \cdot \det(Dh) \quad (4)$$

Damit bekommen wir

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} v \bullet d\mathbf{o} &\stackrel{(1)}{=} \sum_{j=1}^3 \sum_{\mu=0}^1 (-1)^{j+\mu} \int_{E^2} \langle v \circ \Phi_{j\mu}, \partial_1 \Phi_{j\mu} \times \partial_2 \Phi_{j\mu} \rangle du_1 du_2 \\ &\stackrel{(3)}{=} \sum_{j=1}^3 \sum_{\mu=0}^1 (-1)^{j+\mu} \int_{E^2} \langle w \circ \Gamma_{j\mu}, \partial_1 \Gamma_{j\mu} \times \partial_2 \Gamma_{j\mu} \rangle du_1 du_2 \\ &= \int_{\partial E^3} w \bullet d\mathbf{o}. \end{aligned}$$

Nach dem Satz VA.51 von GAUSS für den Einheitswürfel ist dies

$$\begin{aligned} &= \int_{E^3} (\operatorname{div}_y w) d^3 y \\ &\stackrel{(4)}{=} \int_{E^3} ((\operatorname{div}_x v) \circ h) \cdot \det(Dh) d^3 y \\ &= \int_{\Omega} \operatorname{div}_x v d^3 x, \end{aligned}$$

wobei die letzte Umformung wegen $\det(Dh) > 0$ gerade der Transformationsatz für Integrale ist.

Damit ist der Integralsatz von GAUSS für ein Pflaster-Gebiet bewiesen. \square

Wir stellen noch einige Folgerungen aus dem GAUSSschen Satz bereit. Zunächst eine Verallgemeinerung der partiellen Intergration.

Satz VA.57 (Partielle Integration) Es sei Ω ein GAUSS-Gebiet, $G \supset \overline{\Omega}$ ein Gebiet und $f, g : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Ferner sei $f = 0$ auf dem Rand $\partial\Omega$. Dann gilt für $k = 1, 2, 3$

$$\int_{\Omega} f \frac{\partial g}{\partial x_k} d^3x = - \int_{\Omega} g \frac{\partial f}{\partial x_k} d^3x.$$

Beweis: Wir betrachten zu dem kanonischen Einheitsvektor e_k das Vektorfeld

$$v(x) := f(x) \cdot g(x) \cdot e_k.$$

Nach Voraussetzung verschwindet dieses Feld auf dem Rand $\partial\Omega$. Ferner ist

$$\operatorname{div} v = \frac{\partial}{\partial x_k} (f \cdot g) = f \cdot \frac{\partial g}{\partial x_k} + g \cdot \frac{\partial f}{\partial x_k}$$

und der GAUSSsche Integralsatz liefert die Behauptung. \square

Ähnlich bekommt man die folgenden Formeln.

Satz VA.58 (Integralformeln von GREEN) Es sei $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ein GAUSS-Gebiet, n bezeichne das äußere Einheitsnormalenfeld auf dem Rand $\partial\Omega$, f, g seien zweimal stetig differenzierbar auf einer Umgebung von $\overline{\Omega}$ und $\frac{\partial f}{\partial n} := \langle \nabla f(x), n(x) \rangle = \frac{\partial f(x+t \cdot n(x))}{\partial t} \Big|_{t=0}$ bezeichne die Richtungsableitung von f in Richtung der äußeren Normalen. Dann gelten

1.

$$\int_{\Omega} (\langle \nabla f, \nabla g \rangle + f \Delta g) d^3x = \int_{\partial\Omega} f \cdot \frac{\partial g}{\partial n} do,$$

2.

$$\int_{\Omega} (f \Delta g - g \Delta f) d^3x = \int_{\partial\Omega} (f \cdot \frac{\partial g}{\partial n} - g \cdot \frac{\partial f}{\partial n}) do.$$

Beweis: 1.: Wir bilden das Feld $v := f \cdot \nabla g$. Nach Satz VA.25 ist dann

$$\operatorname{div} v = \langle \nabla f, \nabla g \rangle + f \cdot \Delta g$$

und mit dem GAUSSschen Satz also

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\langle \nabla f, \nabla g \rangle + f \Delta g) d^3x &= \int_{\Omega} \operatorname{div} v d^3x \\ &= \int_{\partial\Omega} (v \bullet n) do \\ &= \int_{\partial\Omega} f \cdot \langle \nabla g, n \rangle do \\ &= \int_{\partial\Omega} f \cdot \frac{\partial g}{\partial n} do. \end{aligned}$$

2.: Durch zweimaliges symmetrisches Anwenden von 1. und Differenzbilden erhält man 2. \square