



Aufgabenblatt 1

Abgabe am Mittwoch 25.04.18 vormittags
bei Wolfgang Maurer (F529)

Aufgabe 1.1 (Radiales Einheitsvektorfeld in Normalkoordinaten)

Beweisen Sie *Lemma 1.18* aus der Vorlesung / dem Skript: Ist $p \in M$ und sind $x = (x^1, \dots, x^n)$ Normalkoordinaten auf einem geodätischen Ball $\mathcal{B}(p, R)$, so ist das *radiale Einheitsvektorfeld* gegeben durch (*Summenkonvention!*)

$$\frac{\partial}{\partial r} = \frac{x^i}{r} \frac{\partial}{\partial x^i}.$$

Erinnerung: Es ist $\frac{\partial}{\partial r} := D\Phi(\frac{\partial}{\partial \lambda})$, wobei $\Phi : (0, R) \times S_p \rightarrow \mathcal{B}(p, R)$ durch $\Phi(\lambda, v) := \exp_p(\lambda \cdot v)$ gegeben ist mit $S_p := \{v \in T_p M : |v| = 1\}$.

Aufgabe 1.2 (Hyperbolische Ebene)

Betrachten Sie das obere Halbebenenmodell der *hyperbolischen Eben*, d.h. $M = \mathbb{R} \times (0, \infty)$ mit Metrik

$$g = \frac{1}{y^2}(dx^2 + dy^2).$$

Bestimmen Sie die explizite Form der Geodätengleichung und zeigen Sie durch elementare Rechnungen, dass die Bilder der Lösungen vertikale Geraden oder Halbkreise mit Mittelpunkt auf der x -Achse sind. Finden Sie anschließend auch explizit die Parametrisierungen der Lösungen (z.B. mit Hilfe eines CAS) und zeigen Sie so, dass der hyperbolische Raum geodätisch vollständig ist.

Hinweis: In den Geodätengleichungen lassen sich einige Terme zu „logarithmischen Ableitungen“ umschreiben. Auch die „Energieerhaltung“ für Geodäten kann hilfreich sein.

Aufgabe 1.3 (Kugelkoordinaten auf der Sphäre)

Betrachten Sie $S^2 := \{x \in \mathbb{R}^3 : |x| = 1\} \subset \mathbb{R}^3$ mit der induzierten Metrik. Zeigen Sie, dass

$$(0, \pi) \times (0, 2\pi) \ni (\theta, \varphi) \mapsto (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta) \in S^2$$

ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist und betrachten Sie die von dessen Umkehrfunktion induzierten Koordinaten (θ, φ) auf S^2 (also Kugelkoordinaten). Bestimmen Sie bezüglich dieser Koordinaten

- die Koeffizienten der Metrik,
- die Christoffelsymbole,
- die explizite Form der Geodätengleichung.

Versuchen Sie durch scharfes Ansehen der Geodätengleichung einige explizite Lösungen zu erkennen und deren Form geometrisch zu deuten.