Aufgabenblatt 3

Abgabe am Montag 03.12.18 vormittags
bei Wolfgang Maurer (F529)

Falls für die fünfte Aufgabe keine Zeit mehr bleibt (oder das Blatt mit dieser unverhältnismäßig lange wird), können wir diese auch auf Blatt 4 vertagen oder ihr löst die Aufgabe gemeinsam in der Übung.

Aufgabe 3.1 (Fingerübung zum geschickten Rechnen mit Koordinaten)
Betrachte die Mannigfaltigkeit $M = \mathbb{R}^3$ mit den üblichen (globalen) kartesischen Koordinaten (x, y, z). Betrachte weiter die durch (die Umkehrabbildung von)

$$F : (0, \infty) \times (0, 2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3\,, \quad (r, \theta, z) \mapsto (r\cos\theta, r\sin\theta, z)$$

definierten lokalen Koordinaten (r, θ, z) auf M.

(i) Sei die 1-Form $\omega \in \Omega^1(M) = \Gamma^\infty(T^*M)$ in den kartesischen Koordinaten durch $\omega = z\mathrm{d}x + x^2\mathrm{d}y$ gegeben. Bestimme die Darstellung von ω in den Koordinaten (r, θ, φ).

(ii) Seien die Vektorfelder $X, Y \in \Gamma^\infty(TM)$ in den Koordinaten (r, θ, φ) durch $X = \dfrac{\partial}{\partial r}$ und $Y = \dfrac{\partial}{\partial\theta}$ gegeben. Bestimme deren Darstellung in den kartesischen Koordinaten (x, y, z).

(iii) Bestimme die glatten Funktionen $\omega(X)$ und $\omega(Y)$ bzw. deren Koordinatendarstellungen in den beiden gegebenen Koordinaten.

Hinweis: Die Rechnung sind kurz. Warum wäre es aufwendiger, eine 1-Form bzw. Vektorfelder in die jeweils andere Richtung umzurechnen? Was müsste man dazu tun?

Aufgabe 3.2 („Strahlensatz“)
Eine Geodäte $c : [0, \infty) \to M$ heißt *Strahl*, falls $L(c|_{[0,t]}) = d(c(t), c(0))$ für alle $t \in [0, \infty)$ gilt. Zeige, dass es in einer vollständigen, nichtkompakten Riemannschen Mannigfaltigkeit zu jedem Punkt einen Strahl gibt, der in diesem Punkt startet.

Aufgabe 3.3 (Taylorentwicklung der Metrik in Normalkoordinaten)
Sei (U, x) ein Normalkoordinatensystem um $p \in M$ und g_{ij} die Koeffizienten der Metrik in diesen Koordinaten. In dieser Aufgabe geht es darum, wie man durch Ausnutzen der *Jacobigleichung* im Prinzip die gesamte Taylorentwicklung von $g_{ij}(x)$ um $x = 0$ rekursiv bestimmen kann.

(i) Zeige: Ist $c : [0, b) \to U$ eine radiale Geodäte, so ist für jedes $i = 1, \ldots, n$ das Vektorfeld $V_i(t) := t\partial_i|_{c(t)}$ ein Jacobifeld längs c.

(*Hinweis:* Stelle V_i als Variationsfeld einer geeigneten (einfachen) geodätischen Variation von c dar.)

(ii) Seien c und V_i wie in (i). Stelle unter Ausnutzung der Jacobigleichung ein rekursives Verfahren zur Bestimmung der Taylorentwicklung der Funktion $\langle V_i(t), V_j(t)\rangle$ um $t = 0$ auf. Wie lässt sich hieraus die Taylorentwicklung von $g_{ij}(c(t))$ ableiten? Bestimme explizit einige Terme und zeige (mindenstes), dass

$$g_{ij}(x) = \delta_{ij} - \frac{1}{3}R_{ik\ell j}(p)x^k x^\ell + \mathcal{O}(|x|^3) \qquad (*)$$

Folgere hieraus, dass am Punkt p gilt:

$$R_{ijk\ell}(p) = \frac{1}{2}\big(\partial_i\partial_\ell g_{jk} + \partial_j\partial_k g_{i\ell} - \partial_i\partial_k g_{j\ell} - \partial_j\partial_\ell g_{ik}\big)(p)$$

gilt (diese Formel war wohl Riemanns ursprüngliche Definition des Krümmungstensors).

Aufgabe 3.4 (Geometrische Bedeutung verschiedener Krümmungsgrößen)
Sei $p \in M$. Nutzen Sie im Folgenden die Taylorentwicklung $(*)$ aus Aufgabe 3.2 von g_{ij} in Normalkoordinaten um p.

(i) Sei $\Pi \subset T_pM$ ein zweidimensionaler Untervektorraum und $C_r^\Pi \subset \Pi$ der Kreis von Radius $r > 0$ (bezüglich der von g_p induzierten Norm). Sei weiter $\mathcal{C}_r^\Pi := \exp_p(C_r^\Pi)$ und sei $L^\Pi(r)$ dessen Länge (beachte, dass sich $\mathcal{C}_r^\Pi$ in Normalkoordianten schön parametrisieren lässt). Zeige:

$$\lim_{r\to 0} \frac{2\pi r - L^\Pi(r)}{r^3} = \frac{\pi}{3} K(\Pi)\,,$$

wobei $K(\Pi) \in \mathbb{R}$ die Schnittkrümmung von Π ist.

(ii) Sei

$$|B(p,r)| := \int_{B(p,r)} \mathrm{dvol}_g = \int_{\{|x|<r\}} \sqrt{\det(g_{ij}(x))}\, \mathrm{d}x\,,$$

wobei die letzte Formel in Normalkoordinaten x um p und natürlich nur für kleine $r > 0$ gilt. Zeige, dass bezüglich Normalkoordinaten x um p die Taylorentwicklung

$$\det(g_{ij}(x)) = 1 - \frac{1}{3}\mathrm{Ric}_{k\ell}(p)x^k x^\ell + \mathcal{O}(|x|^3)$$

gilt und folgere hieraus weiter

$$\lim_{r\to 0} \frac{|B(p,r)| - |B_{\mathbb{R}^n}(0,r)|}{r^2} = \frac{\mathrm{scal}(p)}{6(n+2)}\,.$$

Hinweis: Für den Nachweis der Taylorentwicklung könnte die Matrixidentität $\det(\exp(A)) = \exp(\mathrm{tr}(A))$ nützlich sein (die als bekannt angenommen werden darf).

Aufgabe 3.5 (Der hyperbolische Raum als Hyperboloid)
Betrachte die semi-Riemannsche Mannigfaltigkeit

$$M := \mathbb{R}^{1+n}\,, \quad h = -(\mathrm{d}t)^2 + (\mathrm{d}x^1)^2 + \ldots + (\mathrm{d}x^n)^2\,,$$

wobei $(t, x^1, \ldots, x^n)$ die üblichen kartesischen Koordinaten auf $\mathbb{R}^{1+n}$ bezeichnen. Wir schreiben auch (t, x) für $(t, x^1, \ldots, x^n)$ und $|x|^2 = (x^1)^2 + \ldots + (x^n)^2$. Betrachte zu gegebenem $R > 0$ weiter

$$H := \{(t,x) \in \mathbb{R}^{1+n} \,:\, t > 0 \text{ und } -t^2 + |x|^2 = -R^2\}\,.$$

(i) Zeige, dass $H \subset M$ eine eingebettete, glatte Untermannigfaltigkeit der Kodimension 1 ist und $g := h|_{TH\times TH}$ eine Riemannsche Metrik auf H. Skizziere H für $n = 1$ und $n = 2$.

(ii) Definiere eine Abbildung $\pi : H \to \mathbb{R}^n$ wie folgt:

Für $x \in \pi(H)$ sei $\pi(x) \in \mathbb{R}^n$ der eindeutige Punkt, sodass $(0, \pi(x)) \in \mathbb{R}^{1+n}$ auf der Gerade durch $x \in \mathbb{R}^{1+n}$ und $(-R, 0) \in \mathbb{R}^{1+n}$ liegt. (*Skizze!*)

Bestimme eine explizite Formel für π und zeige, das π ein Diffeomorphismus auf sein Bild ist. Betrachte π als globale Karte auf H und berechne die Darstellung der Metrik g in den zugehörigen Koordinaten.

(iii) Betrachte die Abbildung

$$\phi : (0,\infty) \times S^{n-1} \to \mathbb{R}^{1,n}\,, \quad (r,\omega) \mapsto \left(R\cosh\left(\frac{r}{R}\right), R\sinh\left(\frac{r}{R}\right)\omega\right)\,,$$

wobei wir $S^{n-1} \subset \mathbb{R}^n$ als eingebettete Untermannigfaltigkeit auffassen. Zeige, dass ϕ nach H abbildet, bestimme das Bild von ϕ und zeige, dass ϕ ein Diffeomorphismus auf dieses ist. Bestimme weiter die explizite Form von ϕ^*g und zeige, dass auch dies wieder eine Riemannsche Metrik ist. Was lässt sich über die durch die Umkehrung von ϕ definierte Funktion r sagen?

Erinnerung: Der sogenannte *Pullback* ϕ^*g ist definiert durch $(\phi^*g)(V,W) := g(D\phi(V), D\phi(W))$.

Hinweis: Es ist *nicht* nötig, Koordinaten auf S^{n-1} zu wählen (wenn natürlich auch nicht verboten).