Riemannsche Geometrie
Jan-Hendrik Treude, Wolfgang Maurer
FB Mathematik & Statistik, Wintersemester 2018/19

Universität Konstanz

Aufgabenblatt 5

Abgabe am Montag 14.01.2019 bis 12 Uhr vormittags
bei Wolfgang Maurer (F529)

Aufgabe 5.1 (Zum Schnittort)

a) Skizziere den Schnittort eines beliebigen Punkts auf einer Sphäre S^2, auf einem Zylinder $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}$ und auf einem Torus $\mathbb{R}^2/\mathbb{Z}^2$ (bzgl. der offensichtlichen Operationen von $\mathbb{Z}$ bzw. $\mathbb{Z}^2$).

b) Sei (M, g) vollständig. Für ein $p \in M$ gelte, dass jede in p startende Geodäte den Schnittort von p trifft. Zeige, dass M kompakt ist.

Aufgabe 5.2 (Konvexität der Abstandsfunktion in nichtpositiver Krümmung)
Sei (M, g) einfach zusammenhängend, vollständig und habe nichtpositive Schnittkrümmung $K \leq 0$. Sei weiter $p \in M$. Setze $r := d(p, \cdot)$ sowie $f := \frac{1}{2}r^2$.

a) Begründe, wieso $r \in C^\infty(M\backslash\{p\})$ und $f \in C^\infty(M)$ gelten. Wieso ist r in p nicht differenzierbar?

b) Sei $c : [0, \infty) \to M$ eine Geodäte mit $c(0) = p$ und $|\dot{c}| = 1$. Sei weiter $J \in \Gamma^\infty(c^*TM)$ ein nichttriviales, senkrechtes Jacobifeld mit $J(0) = 0$. Zeige, dass $\operatorname{Hess} r(J(t), J(t)) > 0$ für alle $t \in (0, \infty)$ gilt. Schließe hieraus weiter, dass $\operatorname{Hess} r|_q$ für alle $q \in M\backslash\{p\}$ positiv semidefinit ist.

Hinweis: Es gilt $\langle \nabla_J \operatorname{grad} r, J\rangle = \langle \dot{J}, J\rangle$. (Wieso?)

c) Zeige, dass f sogar $\operatorname{Hess} f \geq g$ erfüllt („gleichmäßige" Konvexität). Gehe dazu ähnlich wie im vorherigen Aufgabenteil über Jacobifelder vor und betrachte für ein Jacobifeld J mit $J(0) = 0$ die Funktion $\lambda : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$\lambda(t) := \frac{\langle J(t), J(t)\rangle}{\langle \dot{J}(t), J(t)\rangle}.$$

Berechne für diese einerseits $\lim_{t\to 0} \lambda(t)$ und schätze andererseits die Ableitung $\dot{\lambda}$ ab.

Aufgabe 5.3 (Isometrien endlicher Ordnung in nichtpositiver Krümmung)
Beweise folgendes Theorem von Cartan, indem du die darunter stehenden Teilaufgaben durcharbeitest.

> **Theorem:** (Cartan, 1925) *Sei (M, g) einfach zusammenhängend, vollständig und habe nichtpositive Schnittkrümmung. Ist $F : M \to M$ eine Isometrie endlicher Ordnung (d.h. es gibt $k \in \mathbb{N}$ mit $F^k = F \circ \cdots \circ F = id_M$), so hat F einen Fixpunkt.*

Im Folgenden sei (M, g) stets einfach zusammenhängend, vollständig und mit $K \leq 0$.

a) Eine stetige Funktion $f \in C(M)$ wird *strikt konvex* genannt, falls $f \circ c : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für jede Geodäte $c : \mathbb{R} \to M$ strikt konvex ist. Zeige, dass eine eigentliche, nichtnegative, strikt konvexe Funktion ein eindeutiges globales Minimum hat.

Erinnerung: $f \in C(M)$ heißt *eigentlich*, falls das Urbild jeder kompakten Menge wieder kompakt ist.

b) Seien $p_1, \ldots, p_k \in M$ und $f_{p_i} := \frac{1}{2}d(p_i, \cdot)^2$ für $i = 1, \ldots, k$. Zeige, dass $f := \max\{f_{p_1}, \ldots, f_{p_k}\}$ ein eindeutiges globales Minimum $\operatorname{cp}_\infty(p_1, \ldots, p_k) \in M$ hat („L^∞-Schwerpunkt" von $p_1, \ldots, p_k$).

Hinweis: Beachte Aufgabe 5.1.

c) Betrachte für $p \in M$ den „F-Orbit" $\{p, F(p), \ldots, F^{k-1}(p)\}$, wobei $k \in \mathbb{N}$ mit $F^k = \mathrm{id}_M$ sei, und dessen L^∞-Schwerpunkt. Warum muss dieser ein Fixpunkt von F sein?

Anmerkung: Aus dem obigen Theorem von Cartan folgt weiter, dass die Fundamentalgruppe einer vollständigen Riemannsche Mannigfaltigkeit nichtpositiver Krümmung *torsionsfrei* ist, d.h. keine nichttrivialen Elemente endlicher Ordnung hat. Dies liegt daran, dass die Fundamentalgruppe immer fixpunktfrei durch Decktransformationen auf der universellen Überlagerung operiert (und diese per Definition einfach zusammenhängend ist).

Ihr könnt Aufgabe 5.4 auch wieder gemeinsam in der Übung rechnen, wenn davor die Zeit fehlen sollte.

Aufgabe 5.4 (Die „Zwangsbedingungen“ in der ART)
Sei (M, g) eine Riemannsche Mannigfaltigkeit mit *Einsteintensor* $G \in \Gamma^\infty(T^*M \otimes T^*M)$ definiert als

$$G := \mathrm{Ric}^M - \frac{\mathrm{scal}^M}{2} \cdot g\,.$$

Sei weiter $\Sigma \subset M$ eine eingebettete Hyperfläche mit induzierter Metrik $h := g|_\Sigma$, Einheitsnormalen $\nu \in \Gamma^\infty(N\Sigma)$ und zugehöriger (skalarer) zweiter Fundamentalform $k \in \Gamma^\infty(T^*P \otimes T^*P)$. Zeigen Sie unter Ausnutzung der Gauß- und Codazzi-Gleichung die folgenden Identitäten:

$$\begin{aligned} G(\nu,\nu) &= -\frac{1}{2}\big(\mathrm{scal}^\Sigma - |k|_h^2 + (\mathrm{tr}_h\, k)^2\big)\,,\\ G(\nu,\cdot) &= \mathrm{d}(\mathrm{tr}_h\, k) - (\mathrm{div}_h\, k) \quad \text{(als Linearform auf } TP)\,, \end{aligned}$$

wobei sich die auf der rechten Seite auftretenden Großen bezüglich eines lokalen Orthonormalrahmens $E_1, \ldots, E_n$ von (Σ, h) ausdrücken lassen durch

$$|k|_h^2 = \sum_{i,j=1}^n k(E_i,E_j)^2\,, \quad \mathrm{tr}_h\, k = \sum_{i=1}^n k(E_i,E_i)\,, \quad \mathrm{div}_h\, k = \sum_{i=1}^n (\nabla^\Sigma_{E_i} k)(E_i,\cdot)\,,$$

bzw. bezüglich lokaler Koordinaten durch

$$|k|_h^2 = k_{ij}k^{ij} = h^{mr}h^{ns}k_{mn}k_{rs}\,, \quad \mathrm{tr}_h\, k = k_i^i = h^{ij}k_{ij}\,, \quad (\mathrm{div}_h\, k)_j = k^i_{j;i} = h^{i\ell}\nabla^\Sigma_\ell k_{ij}\,.$$

Anmerkung zu den Einstein-Gleichungen:

Die *Vakuum-Einstein-Gleichungen* für eine Lorentzsche Mannigfaltigkeit (M, g) lauten $G = 0$. Man kann die Gleichung $G = 0$ (die äquivalent ist zu $\mathrm{Ric} = 0$) als ein Anfangswertproblem wie folgt betrachten:

> Gegeben „Anfangsdaten“, d.h. eine n-dimensionale Mannigfaltigkeit Σ mit Riemannscher Metrik h und einem symmetrischen 2-Tensor-Feld k, sucht man eine $(n+1)$-dimensionale Lorentzsche Mannigfaltigkeit (M, g) und eine isometrische Einbettung $\iota : (\Sigma, h) \hookrightarrow (M, g)$, sodass zusätzlich $\iota_* k$ die zweite Fundamentalform von $\iota(\Sigma) \subset M$ bezüglich der „zukunftsgerichteten“ Normalen ist.

Wie die Aufgabe zeigt, ist dies höchstens dann möglich, wenn g und k die beiden „Constraints“ erfüllen:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\big(\mathrm{scal}^\Sigma - |k|_h^2 + (\mathrm{tr}_h\, k)^2\big) &= 0 \qquad \text{(Hamilton-Constraint)}\,,\\ (\mathrm{div}_h\, k) - \mathrm{d}(\mathrm{tr}_h\, k) &= 0 \qquad \text{(Momentum-Constraint)}\,. \end{aligned}$$

Strikt genommen spricht man auch nur dann von *(Vakuum-) Anfangsdaten.* Für solche existiert in der Tat stets eine in gewissem Sinne eindeutige maximale Lorentzsche Mannigfaltigkeit (M, g) mit den geforderten Eigenschaften (dazu löst man ein quasilineares System hyperbolischer Gleichungen).

Die Constraint-Gleichungen sind selbst ein (kompliziertes) System von n nichtlinearen elliptischen Gleichungen. Methoden zur Konstruktion von Lösungen der Constraint-Gleichungen sind Gegenstand aktueller Forschung.

Anstatt der Vakuum-Einstein-Gleichungen $G = 0$ kann man auch die Einstein-Gleichungen $G = T$ mit Materie betrachten, wobei T dann der *Energie-Impuls-Tensor* der Materie ist, der je nach Typ der Materiefelder (Skalarfelder, Maxwellfelder, ...) eine ganz bestimmte Form hat. Auf der rechten Seite der Constraint-Gleichungen ergeben sich dann weitere Terme, die die Anfangswerte der Materiefelder enthalten. Darüber müssen zu $G = T$ weitere Gleichungen für die Evolution der Materiefelder hinzugenommen werden (Wellengleichung, Maxwellgleichungen, ...), die ihrereseits zu weiteren Constraint-Gleichungen führen können.