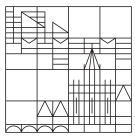
Riemannsche Geometrie

Jan-Hendrik Treude, Wolfgang Maurer
FB Mathematik & Statistik, Wintersemester 2018/19

Universität Konstanz



Aufgabenblatt 7

Abgabe am Montag 16.07.2018 bis 12 Uhr vormittags
bei Wolfgang Maurer (F529)

Aufgabe 7.1 (Kurvendiskussionen im Barrierensinne)

a) Sei $f : (0,1) \to \mathbb{R}$ stetig. Es gebe eine Funktion $g : (0,1) \to (0,\infty)$ mit $f'' > g$ im Barrierensinne (d.h. für alle $t \in (0,1)$ gelte $f''(t) > g(t)$ im Barrierensinne). Zeige, dass f kein lokales Maximum haben kann.

b) Sei $\psi : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetig und in 0 differenzierbar. Weiter gelte

$$\psi(0) \leq 0\,, \quad \psi'(0) < 0 \quad \text{und} \quad \psi'' \leq C\psi \text{ im Barrierensinne für ein } C \geq 0\,.$$

Zeige, dass $\psi \leq 0$ gilt.

Tipp: Im Fall $C = 0$ kann es hilfreich sein, zu ψ noch eine passende quadratische Funktion zu addieren.

Aufgabe 7.2 (Maximumprinzip im Barrierensinne)
Erinnerung: $f \in C(M)$ heißt *(geodätisch) konvex*, falls $f \circ c$ für jede Geodäte c konvex ist.

Sei $f \in C(M)$ mit $\operatorname{Hess} f \geq 0$ im Barrierensinne (in jedem Punkt). Zeige, dass f geodätisch konvex ist. Folgere, dass f in einer Umgebung eines lokalen Maximums konstant ist und (falls M zusammenhängend ist) schon konstant sein muss, wenn f ein globales Maximum hat.

Hinweis: Die wesentliche Überlegung findet schon für $M = \mathbb{R}$ statt, wo vermutlich Ideen aus Aufgabe 7.1 recycelt werden können.

Aufgabe 7.3 (Rauchscher Vergleichssatz für Jacobifelder)
Seien (M_1, g_1), (M_2, g_2) Riemannsche Mannigfaltigkeiten gleicher Dimension und $c_1 : [0, L] \to M$ sowie $c_2 : [0, L] \to M_2$ zwei Einheitsgeodäten. Es gelte:

- $K_1(\dot{c}_1(t), v_1) \geq K_2(\dot{c}_2(t), v_2)$ für alle $t \in [0, L]$, $v \in T_{c_1(t)}M$ und $v_2 \in T_{c_2(t)}M_2$.
- Kein Punkt in $(0, L]$ ist längs c_1 zu 0 konjugiert.

Seien weiter $J_1 \in \Gamma^\infty(\dot{c}_1^\perp)$ und $J_2 \in \Gamma^\infty(\dot{c}_2^\perp)$ Jacobifelder, deren Anfangsbedingungen *eine* der folgenden Bedingungen erfüllen:

(A) $J_1(0) = 0$ sowie $J_2(0) = 0$ und $\left|\dot{J}_1(0)\right| = \left|\dot{J}_2(0)\right|$.

(B) $|J_1(0)| = |J_2(0)|$ und $\dot{J}_1(0) = 0$ sowie $\dot{J}_2(0) = 0$.

Zeige, dass dann $|J_1(t)| \leq |J_2(t)|$ für alle $t \in [0, L]$ gilt.

Anleitung/Hinweis: Nutze geeignete Lösungen $\mathcal{J}_i \in \Gamma^\infty(c_i^* TM)$ von $\ddot{\mathcal{J}}_i + R_{c_i} \circ \mathcal{J}_i = 0$ mit $R_{c_i} = R(\cdot, \dot{c}_i)\dot{c}_i$, um die Jacobifelder darzustellen. Vergleich Aufgabe 7.4 für solche „Jacobi-Endomorphismen“, insbesondere Teil **c)**: Ist ein solches $\mathcal{J}_i$ punktweise invertierbar, so gilt $\dot{J}_i = S_i J_i$ mit $S_i(t) = \dot{\mathcal{J}}_i(t)\mathcal{J}_i(t)^{-1}$ und S_i löst die Riccati-Gleichung $\dot{S}_i + S_i^2 + R_{c_i} = 0$. Aus der Annahme an die Schnittkrümmung erhält man über den Riccati-Vergleichssatz Abschätzungen zwischen den Eigenwerten von S_1 und S_2, die man zum Abschätzen von $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\log|J_1|)$ gegen $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\log|J_2|)$ nutzen kann.

Aufgabe 7.4 (Formoperator und Jacobifelder und -endomorphismen)
Sei $c : I \to M$ eine Einheitsgeodäte. Wir nennen $\mathcal{J} \in \Gamma^\infty(\mathrm{End}(c^*TM))$ einen *Jacobi-Endomorphismus längs* c, falls $\ddot{\mathcal{J}} + R_c \circ \mathcal{J} = 0$ gilt, wobei $R_c := R(\cdot, \dot{c})\dot{c}$.

a) Sei $\mathcal{J} \in \Gamma^\infty(\mathrm{End}(c^*TM))$ ein Jacobi-Endomorphismus und $X \in \Gamma^\infty(c^*TM)$ ein *paralleles* Vektorfeld längs c. Zeige, dass $J \in \Gamma^\infty(c^*TM)$ mit $J(t) := \mathcal{J}(t)(X(t))$ ein Jacobifeld längs c ist.

b) Zeige (z.B. durch Rückführem auf entsprechende Aussagen für Jacobifelder, auch der Beweis von Lemma 4.1 kann hilfreich sein):

(i) Zu jedem $t_0 \in I$ und $A, B \in \mathrm{End}(T_{c(0)}M)$ existiert ein eindeutiger Jacobi-Endomorphismus $\mathcal{J} \in \Gamma^\infty(\mathrm{End}(c^*TM))$ mit $\mathcal{J}(t_0) = A$ und $\dot{\mathcal{J}}(t_1) = B$.

(ii) Seien $t_0, t_1 \in I$ voneinander verschiedenen und nicht längs c zueinander konjugiert. Dann existiert zu beliebigen $A \in \mathrm{End}(T_{c(t_0)}M)$ und $B \in \mathrm{End}(T_{c(t_1)}M)$ ein eindeutiger Jacobi-Endomorphismus $\mathcal{J} \in \Gamma^\infty(\mathrm{End}(c^*TM))$ mit $\mathcal{J}(t_0) = A$ und $\mathcal{J}(t_1) = B$.

(iii) Sei $t_0 \in I$ und sei kein $t \in I$ längs c zu t_0 konjugiert. Sei weiter $\mathcal{J} \in \Gamma^\infty(\mathrm{End}(c^*TM))$ ein Jacobi-Endomorphismus mit $\mathcal{J}(t_0) = 0$. Ist $\dot{\mathcal{J}}(t_0)$ invertierbar, so ist $\mathcal{J}(t)$ für alle $t \in I \backslash \{t_0\}$ invertierbar.

(iv) Für einen Jacobi-Endomorphismus $\mathcal{J} \in \Gamma^\infty(\mathrm{End}(c^*TM))$ sind äquivalent:

(1) Für alle $t \in I$ gilt $\mathrm{Im}\,\mathcal{J}(t) \subset \dot{c}(t)^\perp$.

(2) Es existiert $t \in I$ mit $\mathrm{Im}\,\mathcal{J}(t) \subset \dot{c}(t)^\perp$ und $\mathrm{Im}\,\dot{\mathcal{J}}(t) \subset \dot{c}(t)^\perp$.

(3) Es existieren $s, t \in I$ mit $s \neq t$ und $\mathrm{Im}\,\mathcal{J}(s) \subset \dot{c}(s)^\perp$ und $\mathrm{Im}\,\mathcal{J}(t) \subset \dot{c}(t)^\perp$.

c) Sei $\mathcal{J} \in \Gamma^\infty(\mathrm{End}(c^*TM))$ eine Lösung von $\ddot{\mathcal{J}} + R_c \circ J = 0$ und sei $\mathcal{J}(t)$ für alle $t \in I$ invertierbar. Definiere $A \in \Gamma^\infty(\mathrm{End}(c^*TM))$ durch $A(t) := \dot{\mathcal{J}}(t)\mathcal{J}(t)^{-1}$ Zeige:

(i) Es gilt $\dot{A} + A^2 + R_c = 0$.

(ii) A ist genau dann (punktweise) symmetrisch bzgl. g, wenn $\mathcal{J}'(t)^*\mathcal{J}(t) - \mathcal{J}(t)^*\mathcal{J}'(t) = 0$ für ein (und damit automatisch jedes) $t \in I$ gilt, wobei $\mathcal{J}(t)^*$ der bezüglich $g_{c(t)}$ zu $\mathcal{J}(t)$ adjungierte Endomorphismus ist.

d) Folgere aus Teil **c)** für $I = [0, b)$, $p = c(0)$, $b < \mathrm{inj}(p)$ und $t_0 \in (0, b)$:

Ist $\mathcal{J} \in \Gamma^\infty(\mathrm{End}(\dot{c}^\perp))$ der eindeutige Jacobi-End. mit $\mathcal{J}(0) = 0$ und $\mathcal{J}(t_0)|_{\dot{c}(t_0)^\perp} = \mathrm{id}$, so stimmt $A(t) := \dot{\mathcal{J}}(t)\mathcal{J}(t)^{-1}$ mit dem Formoperator der geodätischen Sphäre $S(p, t)$ überein.

Wie verhält sich dieser folglich für $t \to 0$?