Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Heinrich Freistühler
Dipl. Math. Markus Tschapka

Funktionentheorie, Blatt 1

Aufgabe 1 (2 Punkte)

Berechnen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi, a, b \in \mathbb{R}$:

$$\text{(i) } 2(1+i)^2 + (2-2i)^2, \qquad \text{(ii) } \frac{7+i}{2+i}, \qquad \text{(iii) } \frac{1}{(1+i)^4} + \frac{1}{(1-i)^4}$$

Aufgabe 2 (6 Punkte)

(a) (Wo) konvergieren die Reihen für $z \in \mathbb{C}$

$$\text{(i) } e^z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{z^\nu}{\nu!}, \qquad \text{(ii) } \cos z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu z^{2\nu}}{(2\nu)!}, \qquad \text{(iii) } \sin z = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{(-1)^\nu z^{2\nu+1}}{(2\nu+1)!} \quad ?$$

(b) Zeigen Sie die folgenden Identitäten für $z \in \mathbb{C}$:

$$\text{(i) } e^{iz} = \cos(z) + i\sin(z), z \in \mathbb{C}, \qquad \text{(ii) } e^{i\frac{\pi}{2}} = i, \qquad \text{(iii) } \overline{e^{ix}} = e^{-ix}, x \in \mathbb{R}$$

$$\text{(iv) } e^{ix} = 1 \iff x \in \{2\pi k | k \in \mathbb{Z}\}, \quad \text{(v) } \cos(z) = \frac{1}{2}\left(e^{iz} + e^{-iz}\right), \quad \text{(vi) } \sinh(z) = -i\sin(iz)$$

Aufgabe 3 (4 Punkte)

Welches geometrische Objekt beschreibt die jeweilige Menge in der komplexen Zahlenebene:

$$\text{(i) } \{z \in \mathbb{C} | (\operatorname{Im}(z))^2 < \operatorname{Re}(z)\}, \quad \text{(ii) } \{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z^3) = 0\}, \quad \text{(iii) } \left\{z \in \mathbb{C} \middle| \left|\frac{z-1}{z+1}\right| \leqslant 1\right\}$$

Aufgabe 4 (4 Punkte)

Zu vier beliebigen komplexen Zahlen $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, mit $c \neq 0$ und $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} \neq 0$ betrachten Sie die Abbildung

$$f \colon \mathbb{C} \setminus \left\{-\frac{d}{c}\right\} \to \mathbb{C},$$
$$z \mapsto w = \frac{az+b}{cz+d}$$

(i) Ist f komplex differenzierbar?

(ii) Ist f injektiv?

(iii) Ist f surjektiv?

Abgabe: 9.Mai 2014, 10:00 Uhr im entsprechenden Briefkasten auf F4