Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Heinrich Freistühler
Dipl. Math. Markus Tschapka

Funktionentheorie, Blatt 2

Aufgabe 1 (6 Punkte)

(a) Bestimmen Sie die holomorphe Funktion $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, x+iy \mapsto u+iv,\ \ x,y,u,v \in \mathbb{R}$, für die gilt:

$$v(x,y) = e^{-y}\sin(x) + 2xy - 2y, \quad f(0) = 0$$

(b) Bestimmen Sie alle holomorphen Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit der Eigenschaft:
Es gibt zwei Zahlen $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$ so dass

$$\operatorname{Im}(f(z)) = c_1 x^2 + c_2 xy + y^2 \quad \text{für alle } z = x+iy \in \mathbb{C}$$

Aufgabe 2 (4 Punkte)

(a) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph. Zeigen Sie, dass $h(z) := \overline{f(\overline{z})}$ auf $\mathbb{C}$ holomorph ist.

(b) Sei $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ holomorph mit $f(z) = u(z) + iv(z)$ und es gebe eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $u = g \circ v$. Zeigen Sie dass f konstant ist.

Aufgabe 3 (6 Punkte)

(a) Auf welches der folgenden Gebiete lässt sich $G := \mathbb{C} \setminus \{iy | y \geq 0\}$ konform abbilden? Falls ja, geben Sie (jeweils) eine entsprechende Abbildung an.

(i) $\mathbb{C} \setminus \{iy | y \leq 0\}$

(ii) $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Re}(z) > 0\}$

(iii) $\{z \in \mathbb{C} | \left(|z|^2 - 2\right)^2 > 1\}$

(iv) $\left\{ z \in \mathbb{C} \,\middle|\, \operatorname{Re}(z) < \frac{\operatorname{Im}(z)^2}{4} - 1 \right\}$

(b) Betrachten Sie die Abbildung aus Aufgabe 4, Blatt 1. Ist diese Abbildung auf ihrem Definitionsbereich konform?

(c) Finden Sie eine konforme Abbildung, die die Punkte 0 auf i, $-i$ auf 0 und $\frac{1}{2}$ auf $\frac{1}{4} + \frac{1}{2}i$ abbildet.

Abgabe: 23.Mai 2014, 10:00 Uhr in den entsprechenden Briefkasten auf F4