Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Heinrich Freistühler
Dipl. Math. Markus Tschapka

Funktionentheorie, Blatt 3

Aufgabe 1 (4 Punkte) Berechnen Sie:

$$\text{(i)}\ \operatorname{Log}(-1) \quad \text{(ii)}\ (-i)^{-n},\ (n \in \mathbb{N}) \quad \text{(iii)}\ \left(\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2} i\right)^{115} \quad \text{(iv)}\ i^i \quad \text{(v)}\ \left(ie^{3\pi}\right)^{2i+1}$$

Aufgabe 2 (2 Punkte) Beweisen oder widerlegen Sie:

$$\text{(i)}\ \operatorname{Log}(a^z) = z \cdot \operatorname{Log}(a),\ z, a \in \mathbb{C} \qquad \text{(ii)}\ e^{\left(2\pi i \frac{\operatorname{Log}(2)}{2\pi i}\right)} = \left(e^{2\pi i}\right)^{\frac{\operatorname{Log}(2))}{2\pi i}}$$

Aufgabe 3 (4 Punkte) Gegeben sei
$M := \{\exp(b \log_k(a)) : k \in \mathbb{Z}\} \subset \mathbb{C}, a \in \mathbb{C}^- := \mathbb{C} \setminus \{z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z \leqslant 0, \operatorname{Im} z = 0\}, b \in \mathbb{C}$
Beweisen Sie:

(a) $\# M = n$ falls $b = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ vollständig gekürzt mit $n \in \mathbb{N}, m \in \mathbb{Z}$

(b) M hat abzählbar unendlich viele Elemente, falls $b \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{Q}$

Aufgabe 4 (2 Punkte) Gegeben sei

$$f \colon D \to \mathbb{C},\ z \mapsto z^n + z^{-n} \quad \text{für ein } n \in \mathbb{N}$$

Wohin bildet f die Einheitskreislinie $D := \{z \in \mathbb{C} : |z| = 1\}$ ab? Was hat das mit Tschebyscheff-Polynomen zu tun?
Hinweis: Tschebyscheff-Polynome sind für $n \in \mathbb{N}$ definiert als $T_n(x) = \cos(n \arccos(x))$ für $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Aufgabe 5 (4 Punkte) Sei $K_r(z_0)$ gegeben durch $\gamma \colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto z_0 + re^{it}$.

(a) Berechnen Sie:

$$\text{(i)}\ \int_{K_1(0)} \overline{z} \mathrm{d}z \qquad \text{(ii)}\ \int_{K_1(0)} \frac{1}{z(z+3)} \mathrm{d}z \qquad \text{(iii)}\ \int_{K_2(1)} \operatorname{Re}(z) \mathrm{d}z$$

(b) Gegeben sei C_1 durch $\gamma_1 \colon [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{C}, t \mapsto e^{it}$ und C_2 durch $\gamma_2 \colon [0, 1] \to \mathbb{C}, t \mapsto 1 - t + it$. Skizzieren Sie diese beiden Kurven und berechnen Sie für $f(z) := |z|^2$:

$$\text{(i)}\ \int_{C_1} f(z) \mathrm{d}z \qquad \text{(ii)}\ \int_{C_2} f(z) \mathrm{d}z$$

Abgabe: 6.Juni 2014, 10:00 Uhr in den entsprechenden Briefkasten auf F4