Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Heinrich Freistühler
Dipl. Math. Markus Tschapka

Funktionentheorie, Blatt 4

Aufgabe 1 (4 Punkte) Gegeben sei $f\colon G \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z)$, holomorph, $G \subset \mathbb{C}$ ein rechteckiges Gebiet.

(a) Eine geschlossene, stückweise glatte Kurve C sei parametrisiert durch $\gamma\colon [a,b] \to \mathbb{C}$. Geben Sie für das Wegintegral $\int_C f(z)\mathrm{d}z$ eine möglichst genaue Darstellung von Real- und Imaginärteil an.

(b) Zeigen Sie: Sind $a, b\colon G \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und erfüllen $\frac{\partial a}{\partial y} = \frac{\partial b}{\partial x}$ auf ganz G, so existiert eine stetige Funktion $\Phi\colon G \to \mathbb{R}$ mit $a = \frac{\partial \Phi}{\partial x}, b = \frac{\partial \Phi}{\partial y}$ auf ganz G.
Benutzen Sie diese Tatsache um das Wegintegral aus (a) zu berechnen. Wie hängt das Ergebnis mit der Aussage des Cauchyschen Integralsatzes zusammen?

Aufgabe 2 (4 Punkte) Sei $P = P(z)$ das Polynom $P(z) := a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \ldots + a_1 z + a_0$ mit $a_n \in \{1, 2, \ldots, 9\}, a_{n-1}, \ldots a_0 \in \{0, 1, 2, \ldots, 9\}, n \in \mathbb{N}$, d.h. nur ganzzahlige Koeffizienten von 0 bis 9 erlaubt. Beweisen Sie: Die Nullstellen von P können nur im Inneren der linken Halbebene oder im Kreis

$$\left\{ z \in \mathbb{C} : |z| < \frac{1}{2}(1 + \sqrt{37}) \right\}$$

liegen. Gilt die Behauptung immer noch mit einer 23 anstelle der 37?

Aufgabe 3 (4 Punkte) Sei $K_r(z)$ parametrisiert durch $\gamma\colon [0, 2\pi] \to \mathbb{C}, t \mapsto z + re^{ti}$.

(a) Berechnen Sie:

(i) $$\int_{K_1(0)} \frac{\cos(z)}{z}\mathrm{d}z$$ (ii) $$\int_{K_1(i)} \frac{e^{-z}}{z - \frac{\pi i}{2}}\mathrm{d}z$$

(b) Sei $f(z) = \frac{2}{z(z^2+4)}$ gegeben. Berechnen Sie das Integral $\int_K f(z)\mathrm{d}z$ für $K :=$

(i) $K_{\frac{1}{2}}(1)$ (ii) $K_1(0)$ (iii) $K_2(2i+1)$ (iv) $K_3(0)$

Aufgabe 4 (4 Punkte) Berechnen Sie

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+z^2}\mathrm{d}z$$

in drei Schritten:

(1) Integration zuerst über $K_\varepsilon(i)$ mit $\varepsilon < 1$.

(2) Integration dann über den Halbkreis um 0 mit Radius R in der oberen Halbebene von R nach $-R$ (also im Gegenuhrzeigersinn) und weiter von $-R$ geradlinig zu R.

(3) Verwendung der vorherigen Ergebnisse und $R \to \infty$.

Abgabe: 20.Juni 2014, 10:00 Uhr in den entsprechenden Briefkasten auf F4