Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Heinrich Freistühler
Dipl. Math. Markus Tschapka

Funktionentheorie, Blatt 5

Aufgabe 1 (4 Punkte) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein konvexes Gebiet und $f\colon G \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z)$ holomorph. Welche der folgenden drei Annahmen impliziert *allgemein*, dass f injektiv ist?

(a) $\mathrm{Re}(f'(z)) \neq 0$ für alle $z \in G$

(b) $\mathrm{Im}(f'(z)) \neq 0$ für alle $z \in G$

(c) $f'(z) \neq 0$ für alle $z \in G$.

Geben Sie jeweils einen Beweis oder ein Gegenbeispiel an.

Aufgabe 2 (2 Punkte) Sei $K_r(z_0) := z_0 + re^{it}, t \in [0, 2\pi)$ und C die Kurve gegeben durch das Quadrat mit den Ecken $2+2i, 2-2i, -2-2i, -2+2i$ und auch durchlaufen in dieser Reihenfolge. Berechnen Sie die folgenden Kurvenintegrale:

$$\text{(i)} \quad \int_{K_3(0)} \frac{\sin(\pi z)}{(z-2)^8} \mathrm{d}z \qquad\qquad \text{(ii)} \quad \int_C \frac{z^3+2z}{(z-1)^3} \mathrm{d}z$$

Aufgabe 3 (2 Punkte) Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein Gebiet. $f\colon G \to \mathbb{C}$ holomorph, $K \subset G$ eine glatte Kurve, $\alpha > 1$ und $M > 0$ eine Konstante. Es gelte die Abschätzung

$$|f(z) - f(z')| \leqslant M\,|z - z'|^\alpha \quad \forall z, z' \in K$$

Zeigen Sie, dass f auf K konstant ist.

Achtung ! Änderung des Abgabetermins:
Mi 2. Juli 2014, 12:00 Uhr in den Briefkästen auf F4