Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Heinrich Freistühler
Dipl. Math. Markus Tschapka

Funktionentheorie, Blatt 6

Aufgabe 1 (4 Punkte)
Geben Sie alle holomorphen Funktionen $f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, die folgendes erfüllen

$$\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right| \mathrm{d}t \leqslant r^3, \quad \forall r > 0$$

Aufgabe 2 (4 Punkte) Zeigen Sie

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{a^2\cos^2(t) + b^2\sin^2(t)} \mathrm{d}t = \frac{2\pi}{ab}, \qquad a, b \in \mathbb{R}^+$$

Hinweis: Starten Sie mit $\int_\gamma \frac{1}{z}\mathrm{d}z$ wobei $\gamma(t) = a\cos(t) + ib\sin(t), t \in [0, 2\pi)$

Aufgabe 3 (4 Punkte) $p, q\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ seien Polynome. Der Grad von q um mindestens 2 größer als der von p und q habe keine relle Nullstelle. Seien $z_1, \ldots, z_m$ die Nullstellen von q in der “oberen” Halbebene $\{z \in \mathbb{C} | \operatorname{Im}(z) > 0\}$ von $\mathbb{C}$.
Zeigen Sie: Es gibt ein $r > 0$, so dass für alle ϱ mit $0 < \varrho < r$ gilt:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(x)}{q(x)}\mathrm{d}x = \sum_{j=1}^{m} \int_{K_\varrho(z_j)} \frac{p(z)}{q(z)}\mathrm{d}z$$

Hinweis: Betrachten Sie auch die Kurven

$$K_R^1\colon z(t) = t, \quad -R \leqslant t \leqslant R$$
$$K_R^2\colon z(t) = Re^{it}, \quad 0 \leqslant t \leqslant \pi$$

für große Werte von R.

Aufgabe 4 (4 Punkte) Bestimmen Sie die Potenzreihen der folgenden Funktionen

(a) $f_1(z) := \frac{2z+3}{z+1}$ am Entwicklungspunkt $z_0 = i$.
(b) $f_2(z) := \frac{1}{(1-z^2)(z+i)}$ am Entwicklungspunkt $z_0 = 0$.

Bestimmen Sie die Laurentreihen von

(c) $f_3(z) := \frac{1}{(z-1)(z-2)}$ um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ im Bereich $\{z \in \mathbb{C} | \, |z| < 1\}$
(d) $f_3(z)$ um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ im Bereich $\{z \in \mathbb{C} | 1 < |z| < 2\}$
(e) $f_3(z)$ um den Entwicklungspunkt $z_0 = 0$ im Bereich $\{z \in \mathbb{C} | \, |z| > 2\}$
(f) $f_4(z) := \frac{1}{z}$ um den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$.
(g) $f_5(z) := \frac{1}{z^2}$ um den Entwicklungspunkt $z_0 = 1$.

Abgabe: 11.Juli 2014, 10:00 Uhr in den entsprechenden Briefkasten auf F4