Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Heinrich Freistühler
Dipl. Math. Markus Tschapka

Funktionentheorie, Probeklausur

Wichtige Hinweise:
Folgende Definitionen und Gleichungen können für die Probeklausur hilfreich sein:

(1) $\sin(z) = \frac{1}{2i}\left(e^{iz} - e^{-iz}\right)$ für $z \in \mathbb{C}$

(2) $K_r(z_0) := \{z \in \mathbb{C} : |z - z_0| = r\}, r > 0, z_0 \in \mathbb{C}$
$K_r(z_0)$ wird, als Kurve betrachtet, stets im positiven Sinne durchlaufen, insbesondere muss eine Parametrisierung passend dazu gewählt werden.

(3) $(xe^{-x})' = ?$

Aufgabe 1 (4 Punkte) Berechnen Sie

(a) $i^{\frac{1}{i}}$

(b) $(\mathrm{Log}\,(i))^i$

Aufgabe 2 (4 Punkte)
Es gilt für $z \in \mathbb{C}$ stets die Schreibweise $z = x + iy, x, y \in \mathbb{R}$. Überprüfen Sie ob es eine holomorphe Funktion $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto f(z)$ jeweils mit der folgenden Eigenschaft geben kann.

(a) $f(z) = \sin(i\overline{z})$

(b) $\mathrm{Im}(f(z)) = e^{-x}(1-x)\sin(y), \quad f(1) = 0$

Aufgabe 3 (4 Punkte)
Berechnen Sie folgende Integrale (Achten Sie darauf alle nötigen Voraussetzungen von Sätzen die Sie anwenden möchten zu überprüfen):

(a) $\int_{K_3(2i)} \frac{z^2+3z}{z^2+5z+4}\mathrm{d}z$

(b) $\int_{K_{10}(1)} \frac{3}{(z-1)^3(i-z)^2}\mathrm{d}z$

Aufgabe 4 (4 Punkte)
Geben Sie alle holomorphen Funktionen $f \colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ an, die folgendes erfüllen

$$\int_0^{2\pi} \left|f(re^{it})\right| \mathrm{d}t \leqslant r^4, \quad \forall r > 0$$

Aufgabe 5 (4 Punkte)
Bestimmen Sie die Laurentreihen der Funktion $f(z) := \frac{1}{z^4-1}$ am Entwicklungspunkt $z_0 = i$ auf den passenden Ringgebieten.