Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

23. November 2006

Analysis I

Übungsblatt zur Vorbereitung auf
den ersten Test zur Analysis I
am 08. Dezember 2006

Allgemeines:

Notieren Sie sich zu jedem Kapitel die wesentlichen Begriffe und lernen Sie deren Definitionen in der exakten mathematischen Form. Überlegen Sie sich Beispiele für Objekte, die der Definition genügen und solche, die es nicht tun. Prägen Sie sich die wesentlichen Sätze ein. Finden Sie Beispiele, für die die Voraussetzungen eines Satzes erfüllt sind und Beispiele, für die die Voraussetzungen nicht erfüllt sind und gleichzeitig die Behauptung des Satzes nicht gilt. Vertiefen Sie schließlich Ihre Kenntnisse mit Hilfe der Übungsblätter und den unten stehenden Aufgaben.

Übungsaufgaben:

Aufgabe 1 Es seien X und Y nicht leere Mengen und $f\colon X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Man beweise, dass die für $x, y \in X$ durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow f(x) = f(y)$$

definierte Relation auf X eine Äquivalenzrelation ist.

Aufgabe 2 Die Abbildung $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := x^2 - x - 2$. Bestimmen Sie $f^{-1}(\{0,1\})$, $f(\{0,1\})$ und zeigen Sie, dass $\operatorname{graph}(f) \subset \mathbb{R} \times [-\frac{9}{4}, \infty)$ gilt.

Aufgabe 3 Es seien A, B und C nicht leere Mengen. Ferner seien $f\colon A \longrightarrow B$ und $g\colon B \longrightarrow C$ Abbildungen. Beweisen Sie:

(i) Sind die Abbildungen f und g injektiv, so ist $g \circ f$ injektiv.

(ii) Sind die Abbildungen f und g surjektiv, so ist $g \circ f$ surjektiv.

Aufgabe 4 Beweisen Sie für $n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{k=1}^{n} (2k-1) = n^2.$$

Aufgabe 5 Untersuchen Sie die nachstehend definierten Folgen auf Konvergenz:

(1)
$$\left(\frac{n^2}{n^2+2n+2}\right)_{n\in\mathbb{N}},$$

(2)
$$\left(\frac{n^2-3n+(-1)^n}{3n^2-7n+5}\right)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Aufgabe 6 Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechnen Sie

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^{2k}.$$

Aufgabe 7 Untersuchen Sie die folgende Reihe auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls den Grenzwert.

$$\sum_{k=3}^{\infty} 2^{-k}.$$

Aufgabe 8 Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $x, y, z \in X$. Zeigen Sie:

$$|d(x,y) - d(y,z)| \leq d(x,z).$$

Aufgabe 9 Es sei (X, d) ein metrischer Raum. Zeigen Sie, dass jede Cauchyfolge aus X beschränkt ist.