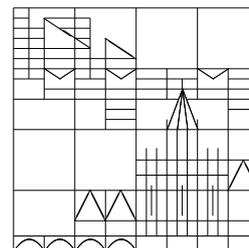


08. Januar 2007



Analysis I 10. Übungsblatt

Aufgabe 10.1 Die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sei in $x_0 \in \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie: f ist in x_0 stetig.

Aufgabe 10.2 Wir definieren die Abbildung $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \\ \frac{1}{q} & \text{falls } x = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}; \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd.} \end{cases}$$

Sei nun $x_0 \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ beliebig gewählt. Zeigen Sie, dass f in x_0 stetig ist.

Aufgabe 10.3 Die Funktion $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ sei differenzierbar (d.h. f ist in (a, b) differenzierbar, in a rechtsseitig differenzierbar und in b linksseitig differenzierbar). Weiter gelte für alle $x \in [a, b]$

$$|f(x)| + |f'(x)| \neq 0.$$

Zeigen Sie, dass f in $[a, b]$ nur endlich viele Nullstellen hat.

Aufgabe 10.4 Untersuchen Sie, an welchen Stellen $x_0 \in \mathbb{R}$ die folgenden Funktionen differenzierbar sind. Bestimmen sie gegebenenfalls $f'(x_0)$.

(i) $f_1: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x^x,$

(ii) $f_2: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \cos(\sin(x^2)),$

(iii) $f_3: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto x|x|,$

(iv) $f_4: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R},$

$$x \mapsto \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q}, \\ x^2 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}. \end{cases}$$