Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

29. Januar 2007

Analysis I
13. Übungsblatt

Aufgabe 13.1 Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \longrightarrow \mathbb{R}$, $x \longmapsto f(x)$ mit

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n} \sin((2n+1)x)$$

eine Regelfunktion ist und berechnen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) \mathrm{d}x.$$

Hinweis: Es gilt $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n} = -\ln(2)$. Dies dürfen Sie ohne Beweis verwenden.

Aufgabe 13.2 Es seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$, $I := (a, b)$ und $f \in \tilde{\mathcal{T}}(I, \mathbb{R})$. Das bestimmte Integral von f über I werde mit $\tilde{\mathbb{I}}(f)$ bezeichnet. Zeigen Sie: Die Abbildung $\tilde{\mathbb{I}}\colon \tilde{\mathcal{T}}(I, \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$, $f \longmapsto \tilde{\mathbb{I}}(f)$ ist eine stetige lineare Abbildung.

Aufgabe 13.3 Die Funktion $f\colon [-1, 1] \longrightarrow \mathbb{R}$ sei für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{n+2} & \text{für} \quad \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für} \quad x = 0 \\ \frac{1}{n+2} & \text{für} \quad -\frac{1}{n} \leq x < -\frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Finden Sie eine Treppenfunktion, welche gleichmäßig gegen f konvergiert und berechnen Sie $\int_{-1}^{1} f(x) \mathrm{d}x$.

Aufgabe 13.4 Die Funktion f sei für $x \in \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für} \quad x \neq 0, \\ 0 & \text{für} \quad x = 0. \end{cases}$$

Zeigen oder widerlegen Sie: f ist in $[0, 1]$ eine Regelfunktion.

Abgabetermin: Montag 05. Februar 2007, vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.