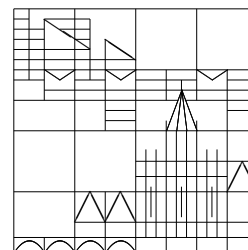


29. Januar 2007



### Analysis I 13. Übungsblatt

**Aufgabe 13.1** Zeigen Sie, dass die Funktion  $f : [0, \frac{\pi}{2}] \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto f(x)$  mit

$$f(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)2n} \sin((2n+1)x)$$

eine Regelfunktion ist und berechnen Sie

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x) dx.$$

HINWEIS: Es gilt  $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{1}{k} = -\ln(2)$ . Dies dürfen Sie ohne Beweis verwenden.

**Aufgabe 13.2** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ ,  $I := (a, b)$  und  $f \in \tilde{\mathcal{T}}(I, \mathbb{R})$ . Das bestimmte Integral von  $f$  über  $I$  werde mit  $\tilde{\mathbb{I}}(f)$  bezeichnet. Zeigen Sie: Die Abbildung  $\tilde{\mathbb{I}}: \tilde{\mathcal{T}}(I, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}, f \mapsto \tilde{\mathbb{I}}(f)$  ist eine stetige lineare Abbildung.

**Aufgabe 13.3** Die Funktion  $f: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}$  sei für  $x \in \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{1}{n+2} & \text{für } \frac{1}{n+1} < x \leq \frac{1}{n}, \quad n \in \mathbb{N} \\ 0 & \text{für } x = 0 \\ \frac{1}{n+2} & \text{für } -\frac{1}{n} \leq x < -\frac{1}{n+1}, \quad n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

Finden Sie eine Treppenfunktion, welche gleichmäßig gegen  $f$  konvergiert und berechnen Sie  $\int_{-1}^1 f(x) dx$ .

**Aufgabe 13.4** Die Funktion  $f$  sei für  $x \in \mathbb{R}$  definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen oder widerlegen Sie:  $f$  ist in  $[0, 1]$  eine Regelfunktion.