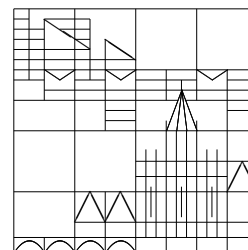


06. November 2006



### Analysis I 3. Übungsblatt

**Aufgabe 3.1** Es seien  $X$  und  $Y$  Mengen mit  $X, Y \neq \emptyset$ . Ferner sei  $R$  eine Relation auf  $X$  und  $S$  eine Relation auf  $Y$ . Man definiere eine Relation  $RS$  auf  $X \times Y$  durch

$$(x, y)RS(u, v) : \iff (xRu) \wedge (ySv)$$

für  $(x, y), (u, v) \in X \times Y$ . Beweisen Sie, dass  $RS$  eine Äquivalenzrelation ist, falls  $R$  eine Äquivalenzrelation auf  $X$  und  $S$  eine Äquivalenzrelation auf  $Y$  ist.

**Aufgabe 3.2** Wir betrachten  $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subset)$ . Das heißt, wir versehen die Potenzmenge  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  der natürlichen Zahlen mit der Relation  $\subset$ .

(i) Zeigen Sie, dass  $\subset$  eine Ordnungsrelation auf  $\mathcal{P}(\mathbb{N})$  ist.

(ii) Zeigen oder widerlegen Sie:  $(\mathcal{P}(\mathbb{N}), \subset)$  ist wohlgeordnet.

**Aufgabe 3.3** Beweisen Sie die Archimedische Eigenschaft von  $\mathbb{R}$ :  
Zu jedem  $a > 0$  und jedem  $r \in \mathbb{R}$  existiert ein  $n \in \mathbb{N}$  mit  $na > r$ .

**Aufgabe 3.4** Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen reeller Zahlen beschränkt sind und bestimmen Sie ggf.  $\sup M$  und  $\inf M$ .

(i)  $M = \left\{ x : x = 1 - \frac{(-1)^n}{n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

(ii)  $M = \left\{ x : x = \frac{1}{n+1} + \frac{1+(-1)^n}{2n}, n \in \mathbb{N} \right\}$

(iii)  $M = \{ x : x^2 + 2x + 2 > 5, x < 0 \}$

(iv)  $M = \left\{ x : x = t + \frac{1}{t}, 0 < t \leq 10 \right\}$