Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

06. November 2006

Analysis I
3. Übungsblatt

Aufgabe 3.1 Es seien X und Y Mengen mit $X, Y \neq \emptyset$. Ferner sei R eine Relation auf X und S eine Relation auf Y. Man definiere eine Relation RS auf $X \times Y$ durch

$$(x, y)RS(u, v) :\Longleftrightarrow (xRu) \wedge (ySv)$$

für $(x, y), (u, v) \in X \times Y$. Beweisen Sie, dass RS eine Äquivalenzrelation ist, falls R eine Äquivalenzrelation auf X und S eine Äquivalenzrelation auf Y ist.

Aufgabe 3.2 Wir betrachten $(\mathscr{P}(\mathbb{N}), \subset)$. Das heißt, wir versehen die Potenzmenge $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ der natürlichen Zahlen mit der Relation $\subset$.

(*i*) Zeigen Sie, dass $\subset$ eine Ordnungsrelation auf $\mathscr{P}(\mathbb{N})$ ist.

(*ii*) Zeigen oder widerlegen Sie: $(\mathscr{P}(\mathbb{N}), \subset)$ ist wohlgeordnet.

Aufgabe 3.3 Beweisen Sie die Archimedische Eigenschaft von $\mathbb{R}$:
Zu jedem $a > 0$ und jedem $r \in \mathbb{R}$ existiert ein $n \in \mathbb{N}$ mit $na > r$.

Aufgabe 3.4 Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen reeller Zahlen beschränkt sind und bestimmen Sie ggf. $\sup M$ und $\inf M$.

(*i*) $$M = \left\{x : x = 1 - \frac{(-1)^n}{n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

(*ii*) $$M = \left\{x : x = \frac{1}{n+1} + \frac{1 + (-1)^n}{2n},\ n \in \mathbb{N}\right\}$$

(*iii*) $$M = \left\{x : x^2 + 2x + 2 > 5,\ x < 0\right\}$$

(*iv*) $$M = \left\{x : x = t + \frac{1}{t},\ 0 < t \leq 10\right\}$$

Abgabetermin: Montag 13. November 2006, vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.