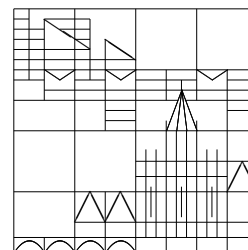


13. November 2006



Analysis I 4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Untersuchen Sie die nachstehend definierten Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

(i) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

(ii) $b_n := \sum_{\nu=1}^n \frac{1}{\nu(\nu+1)}$,

(iii) $c_n := qc_{n-1}$ hierbei sind $q \in (-1, 1)$ und $c_0 := 1 + \sqrt{2}$ vorgegeben.

(iv) $d_n := \frac{3n^2(3+\frac{1}{n!})(3n^4-4n^3)}{2(n^2-2)(n^4+\sqrt{n^2+1})}$.

Aufgabe 4.2 Gegeben seien Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sowie $n_0 \in \mathbb{N}$. Für alle $n \geq n_0$ gelte $a_n \leq b_n \leq c_n$. Die Folgen $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ seien konvergent mit dem Grenzwert $g := \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} c_n$. Beweisen Sie, dass dann $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen g konvergiert.

Aufgabe 4.3 Es seien a_n und b_n für $n \in \mathbb{N}$ reelle Zahlen mit $a_n \leq b_n$. Die Folge von Intervallen $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ heißt „Intervallschachtelung“, wenn $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und wenn die Folge der Intervalllängen $(b_n - a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(i) Es gibt genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$.

(ii) Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge reeller Zahlen besitzt ein Supremum.

Aufgabe 4.4 Es sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Weiter sei $a_1 \in \mathbb{R}$ mit $a_1 > \sqrt{a}$ und

$$a_{n+1} := \frac{1}{2} \left(a_n + \frac{a}{a_n} \right).$$

Beweisen Sie:

(i) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n > \sqrt{a}$.

(ii) Es gilt $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{a}$.