Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

13. November 2006

Analysis I
4. Übungsblatt

Aufgabe 4.1 Untersuchen Sie die nachstehend definierten Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(d_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auf Konvergenz.

(*i*) $a_n := \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$,

(*ii*) $b_n := \sum_{\nu=1}^{n} \frac{1}{\nu(\nu+1)}$,

(*iii*) $c_n := qc_{n-1}$ hierbei sind $q \in (-1,1)$ und $c_0 := 1 + \sqrt{2}$ vorgegeben.

(*iv*) $d_n := \frac{3n^2\left(3+\frac{1}{n!}\right)(3n^4-4n^3)}{2(n^2-2)(n^4+\sqrt{n^2+1})}$.

Aufgabe 4.2 Gegeben seien Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $n_0 \in \mathbb{N}$. Für alle $n \geq n_0$ gelte $a_n \leq b_n \leq c_n$. Die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ seien konvergent mit dem Grenzwert $g := \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} c_n$. Beweisen Sie, dass dann $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen g konvergiert.

Aufgabe 4.3 Es seien a_n und b_n für $n \in \mathbb{N}$ reelle Zahlen mit $a_n \leq b_n$. Die Folge von Intervallen $I_n = [a_n, b_n] \subset \mathbb{R}$ heißt „Intervallschachtelung“, wenn $I_{n+1} \subset I_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt und wenn die Folge der Intervalllängen $(b_n - a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen Null konvergiert. Zeigen Sie die Äquivalenz der folgenden Aussagen:

(*i*) Es gibt genau ein $x \in \mathbb{R}$ mit $\bigcap_{n=1}^{\infty} I_n = \{x\}$.

(*ii*) Jede nichtleere nach oben beschränkte Teilmenge reeller Zahlen besitzt ein Supremum.

Aufgabe 4.4 Es sei $a \in \mathbb{R}$ beliebig gewählt. Weiter sei $a_1 \in \mathbb{R}$ mit $a_1 > \sqrt{a}$ und

$$a_{n+1} := \frac{1}{2}\left(a_n + \frac{a}{a_n}\right).$$

Beweisen Sie:

(*i*) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $a_n > \sqrt{a}$.

(*ii*) Es gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{a}$.

Abgabetermin: Montag 20. November 2006, vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.