Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

20. November 2006

Analysis I
5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Es sei A die Menge aller rationalen Cauchyfolgen, das heißt $A := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Cauchyfolge}; \quad \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{Q}\}$. Für $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ definieren wir

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}} :\Longleftrightarrow (a_n - b_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge.}$$

(i) Zeigen Sie, dass $\sim$ eine Äquivalenzrelation ist.

(ii) Wir definieren

$$\mathbb{A} := \{[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] : (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A\},$$

dabei ist für eine Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ die Äquivalenzklasse $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}]$ durch $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] := \{(b_n)_{n\in\mathbb{N}} : (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A \wedge (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \sim (b_n)_{n\in\mathbb{N}}\}$ definiert. Für $[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}], [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}] \in \mathbb{A}$ sei

$$[(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] + [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}] \quad \text{und} \quad [(a_n)_{n\in\mathbb{N}}] \cdot [(b_n)_{n\in\mathbb{N}}] := [(a_n \cdot b_n)_{n\in\mathbb{N}}].$$

Beweisen Sie, dass die Operationen $+$ und $\cdot$ unabhängig vom Repräsentanten der jeweiligen Äquivalenzklasse sind.

Aufgabe 5.2 Es sei $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ eine absolut konvergente Reihe. Zeigen Sie:

(i) Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu^2$ konvergiert.

(ii) Gilt $a_\nu \neq -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_\nu}{1+a_\nu}$ absolut konvergent.

Aufgabe 5.3

(i) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz bzw. Divergenz.

(a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,

(b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

(ii) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{(1+r^2)^{k-1}}$ für alle $r \in \mathbb{R}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 5.4 Zeigen Sie, dass aus der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sqrt{|a_\nu a_{\nu+1}|}$ folgt. Gilt auch die Umkehrung?

Abgabetermin: Montag 27. November 2006, vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.