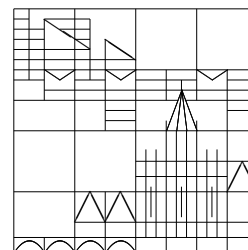


20. November 2006



Analysis I 5. Übungsblatt

Aufgabe 5.1 Es sei A die Menge aller rationalen Cauchyfolgen, das heißt $A := \{(a_n)_{n \in \mathbb{N}} : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Cauchyfolge; } \forall n \in \mathbb{N} : a_n \in \mathbb{Q}\}$. Für $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}, (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ definieren wir

$$(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}} : \iff (a_n - b_n)_{n \in \mathbb{N}} \text{ ist Nullfolge.}$$

- (i) Zeigen Sie, dass \sim eine Äquivalenzrelation ist.
- (ii) Wir definieren

$$\mathbb{A} := \{[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] : (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A\},$$

dabei ist für eine Folge $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ die Äquivalenzklasse $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}]$ durch $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] := \{(b_n)_{n \in \mathbb{N}} : (b_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A \wedge (a_n)_{n \in \mathbb{N}} \sim (b_n)_{n \in \mathbb{N}}\}$ definiert. Für $[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}], [(b_n)_{n \in \mathbb{N}}] \in \mathbb{A}$ sei

$$[(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] + [(b_n)_{n \in \mathbb{N}}] := [(a_n + b_n)_{n \in \mathbb{N}}] \quad \text{und} \quad [(a_n)_{n \in \mathbb{N}}] \cdot [(b_n)_{n \in \mathbb{N}}] := [(a_n \cdot b_n)_{n \in \mathbb{N}}].$$

Beweisen Sie, dass die Operationen $+$ und \cdot unabhängig vom Repräsentanten der jeweiligen Äquivalenzklasse sind.

Aufgabe 5.2 Es sei $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}$ eine absolut konvergente Reihe. Zeigen Sie:

- (i) Die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}^2$ konvergiert.
- (ii) Gilt $a_{\nu} \neq -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{a_{\nu}}{1+a_{\nu}}$ absolut konvergent.

Aufgabe 5.3

- (i) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz, absolute Konvergenz bzw. Divergenz.

- (a) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$,
- (b) $\sum_{n=1}^{\infty} n^{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2}\right)^n$.

- (ii) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{r^{2k}}{(1+r^2)^{k-1}}$ für alle $r \in \mathbb{R}$ konvergiert und bestimmen Sie den Grenzwert.

Aufgabe 5.4 Zeigen Sie, dass aus der absoluten Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\nu}$ die Konvergenz der Reihe $\sum_{\nu=1}^{\infty} \sqrt{|a_{\nu} a_{\nu+1}|}$ folgt. Gilt auch die Umkehrung?