Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

27. November 2006

Analysis I
6. Übungsblatt

Aufgabe 6.1 Gegeben seien die Mengen

(*i*) $M_1 := \mathbb{N}$,

(*ii*) $M_2 := \mathbb{N} \cup \{0\}$,

(*iii*) $M_3 := \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k\}$,

(*iv*) $M_4 := \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k - 1\}$,

(*v*) $M_5 := \mathbb{R}$.

Welche der Mengen haben die gleiche Kardinalität? Welche der Mengen haben unterschiedliche Kardinalität? Beweisen Sie Ihre Aussagen.

Aufgabe 6.2 Es sei A eine endliche Menge. Beweisen Sie: Ist $\#A = n$, so gilt

$$\#\mathscr{P}(A) = 2^n.$$

Hinweis: Zeigen Sie zuerst: Ist M eine Menge und $x \in M$, so gilt $\#\mathscr{P}(M \setminus \{x\}) = \#\{N \subset M : x \in N\}$.

Aufgabe 6.3 Es sei ℓ^∞ die Menge aller beschränkten reellen Folgen. Für $x, y \in \ell^\infty$ werde

$$d(x, y) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$$

gesetzt. Beweisen Sie, dass (ℓ^∞, d) ein metrischer Raum ist.

Aufgabe 6.4 Es sei (M, d) ein metrischer Raum und X eine nichtleere Teilmenge von M. Für ein $x_0 \in M$ wird

$$\operatorname{dist}(x_0, X) := \inf_{x \in X} d(x_0, x)$$

als Abstand von x_0 und X bezeichnet. Beweisen Sie: Für alle $x_0, y_0 \in M$ gilt

$$|\operatorname{dist}(x_0, X) - \operatorname{dist}(y_0, X)| \le d(x_0, y_0).$$

Abgabetermin: Montag 04. Dezember 2006, vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.