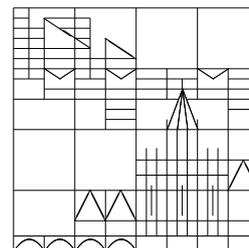


27. November 2006



## Analysis I 6. Übungsblatt

**Aufgabe 6.1** Gegeben seien die Mengen

- (i)  $M_1 := \mathbb{N}$ ,
- (ii)  $M_2 := \mathbb{N} \cup \{0\}$ ,
- (iii)  $M_3 := \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k\}$ ,
- (iv)  $M_4 := \{n \in \mathbb{N} : \exists k \in \mathbb{N} : n = 2k - 1\}$ ,
- (v)  $M_5 := \mathbb{R}$ .

Welche der Mengen haben die gleiche Kardinalität? Welche der Mengen haben unterschiedliche Kardinalität? Beweisen Sie Ihre Aussagen.

**Aufgabe 6.2** Es sei  $A$  eine endliche Menge. Beweisen Sie: Ist  $\#A = n$ , so gilt

$$\#\mathcal{P}(A) = 2^n.$$

HINWEIS: Zeigen Sie zuerst: Ist  $M$  eine Menge und  $x \in M$ , so gilt  $\#\mathcal{P}(M \setminus \{x\}) = \#\{N \subset M : x \in N\}$ .

**Aufgabe 6.3** Es sei  $\ell^\infty$  die Menge aller beschränkten reellen Folgen. Für  $x, y \in \ell^\infty$  werde

$$d(x, y) := \sup_{n \in \mathbb{N}} |x_n - y_n|$$

gesetzt. Beweisen Sie, dass  $(\ell^\infty, d)$  ein metrischer Raum ist.

**Aufgabe 6.4** Es sei  $(M, d)$  ein metrischer Raum und  $X$  eine nichtleere Teilmenge von  $M$ . Für ein  $x_0 \in M$  wird

$$\text{dist}(x_0, X) := \inf_{x \in X} d(x_0, x)$$

als Abstand von  $x_0$  und  $X$  bezeichnet. Beweisen Sie: Für alle  $x_0, y_0 \in M$  gilt

$$|\text{dist}(x_0, X) - \text{dist}(y_0, X)| \leq d(x_0, y_0).$$