Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

04. Dezember 2006

Analysis I
7. Übungsblatt

Aufgabe 7.1 Es sei (X, d) ein vollständiger metrischer Raum und $T\colon X \longrightarrow X$ eine Abbildung. Für $n \in \mathbb{N}$ definieren wir die n-te Iterierte $T^{(n)}$ von T induktiv durch

$$T^{(1)}(x) := T(x),$$
$$T^{(n+1)}(x) := T\left(T^{(n)}(x)\right), \quad x \in X.$$

(i) Für ein $m \in \mathbb{N}$ sei die Abbildung $T^{(m)}$ kontrahierend. Zeigen Sie, dass T genau einen Fixpunkt besitzt.

(ii) Muss die Abbildung T kontrahierend sein, wenn ein $m \in \mathbb{N}$ existiert, so dass $T^{(m)}$ kontrahierend ist?

Aufgabe 7.2 Gegeben sei die Menge

$$M := \left\{x \in \mathbb{R} : x = \frac{m}{2^n} \text{ für ein } m \in \mathbb{Z} \text{ und ein } n \in \mathbb{N}\right\}.$$

Zeigen Sie:

(i) Weder M noch $\mathbb{R} \setminus M$ sind offen in $\mathbb{R}$.

(ii) Ist $A \subset \mathbb{R}$ eine offene Menge mit $A \subset M$, so ist $A = \emptyset$.

(iii) ist A eine abgeschlossene Menge mit $M \subset A$, so ist $A = \mathbb{R}$.

Abgabetermin: Montag 11. Dezember 2006, vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.