Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Prof. Dr. Reinhard Racke
Dipl.-Math. Olaf Weinmann

11. Dezember 2006

Analysis I
8. Übungsblatt

Aufgabe 8.1 Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkte Folgen. Beweisen Sie die folgenden Aussagen:

(i) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist genau dann konvergent, wenn

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = \limsup_{n\to\infty} a_n$$

gilt.

(ii) Es gelte $a_n \leq b_n$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie:

$$\liminf_{n\to\infty} a_n \leq \liminf_{n\to\infty} b_n.$$

Aufgabe 8.2 Es sei (X, d) ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge mit $x := \lim_{n\to\infty} x_n \in X$. Beweisen Sie, dass die Menge $X := \{x_n : n \in \mathbb{N}\} \cup \{x\}$ kompakt ist.

Aufgabe 8.3 Es sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Ferner sei $N(f) := \{x : x \in \mathbb{R}, f(x) = 0\}$. Zeigen Sie, dass $N(f)$ abgeschlossen ist.

Aufgabe 8.4 Es sei $f : \mathbb{N} \subset \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Abbildung. Beweisen Sie, dass f stetig ist.

Abgabetermin: Montag 18. Dezember 2006, vor der Vorlesung in die Briefkästen bei F411.