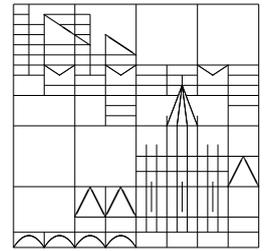


15. Juni 2006



Analysis IV 8. Übungsblatt

Aufgabe 8.1 (Wiederholung) Zeigen Sie mit Hilfsmitteln der Analysis IV:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{[0, n]} \left(1 + \frac{x}{n}\right)^n e^{-2x} d\lambda(x) = 1.$$

Aufgabe 8.2 Es sei $p \geq 1$ und $f: \mathbb{R}^n \rightarrow [0, \infty)$ eine messbare Funktion. Zeigen Sie:

$$\int_{\mathbb{R}^n} f(x)^p d\lambda(x) = p \int_{[0, \infty)} t^{p-1} \lambda(\{x \in \mathbb{R}^n : f(x) > t\}) d\lambda(t)$$

Aufgabe 8.3 Sei $X \neq \emptyset$ eine Menge, $\zeta: \mathcal{P}(X) \rightarrow [0, \infty]$ das Zählmaß auf X und $f: X \rightarrow \mathbb{C}$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass f genau dann summierbar ist, falls $f \in \mathcal{L}^1(\zeta)$, und dass in diesem Fall die Gleichheit $\sum_{x \in X} f(x) = \int f d\zeta$ gilt.

Aufgabe 8.4

- (i) Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$ und $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ eine monoton wachsende und rechtsstetige Funktion. Zeigen Sie, dass genau ein Maß $\mu_g: \mathcal{B}([a, b]) \rightarrow [0, \infty]$ existiert mit

$$\mu_g((s, t]) = g(t) - g(s) \quad (a \leq s < t \leq b)$$

und $\mu_g(\{a\}) = 0$.

- (ii) Sei nun $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend und rechtsstetig. Zeigen Sie, dass genau ein Maß $\mu_g: \mathcal{B}(\mathbb{R}) \rightarrow [0, \infty]$ existiert mit $\mu_g((s, t]) = g(t) - g(s)$ ($s < t$). Wann ist μ_g endlich?