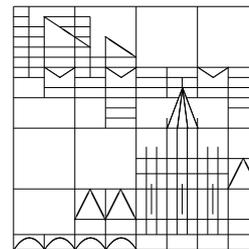


9. Juni 2008



## Funktionalanalysis 8. Übungsblatt

**Aufgabe 8.1** Seien  $X$  und  $Y$  Banachräume,  $A: X \rightarrow Y$  und  $B: Y' \rightarrow X'$  linear. Gilt für alle  $x \in X$  und alle  $y' \in Y'$

$$y'(Ax) = (By')(x),$$

dann sind  $A$  und  $B$  stetig.

**Definition 8.2** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Weiter sei  $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  eine Funktion und  $P_n(a, b)$  sei eine Partition  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ .

(a)  $V(P_n(a, b)) := \sum_{k=0}^{n-1} |f(x_{k+1}) - f(x_k)|$  heißt **Variation** von  $f$  bzgl.  $P_n(a, b)$ .

(b) Das Supremum aller Variationen

$$V_a^b(f) := \sup_{P_n(a, b)} V(P_n(a, b)) \in [0, \infty]$$

heißt **vollständige Variation** von  $f$ .

(c) Ist  $V_a^b(f) < \infty$ , so heißt  $f$  von **beschränkter Variation** oder  $f \in \mathcal{BV}(a, b)$ .

**Aufgabe 8.3** Es seien  $a, b \in \mathbb{R}$  mit  $a < b$ . Zeigen Sie:

(i)  $f \in \mathcal{BV}(a, b) \iff \exists v, w$ , monoton wachsend:  $f = v - w$ .

(ii)  $f \in \mathcal{BV}(a, b) \implies f$  besitzt nur abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

**Definition 8.4** Die **schwache Topologie** eines Banachraumes  $X$  ist die Vektorraumtopologie, die von den Halbnormen

$$p_f(x) := |f(x)|, \quad f \in X'$$

erzeugt wird (vgl. Aufgabe 3.6).

**Aufgabe 8.5** Sei  $X$  ein unendlich dimensionaler Banachraum. Zeigen Sie: Die schwache Topologie hat die folgenden Eigenschaften:

- (i) Die schwache Topologie ist die größte Topologie, in der alle  $f \in X'$  stetig sind.
- (ii) Jede im schwachen Sinn offene Menge ist unbeschränkt.
- (iii) Eine Folge  $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$  konvergiert genau dann in der schwachen Topologie gegen ein  $x \in X$ , wenn

$$\forall f \in X' : f(x_k) \rightarrow f(x)$$

gilt.

**Aufgabe 8.6** Es sei  $X := \mathcal{C}([a, b])$  und  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  eine Folge mit  $x_n \in X$  für  $n \in \mathbb{N}$ . Zeigen Sie:

$$x_n \rightarrow x \iff \sup_{n \in \mathbb{N}} \|x_n\| < \infty \text{ und } \forall t \in [a, b] : x_n(t) \rightarrow x(t).$$

Abgabetermin: Montag 16. Juni 2008, vor 10:00 Uhr in die Briefkästen bei F411.