Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Sebastian Wenzel
WS 2011/12

Übungen zur Vorlesung Algebra

Blatt 2
Ideale und Ringe von Brüchen

Sei stets R ein kommutativer Ring mit 1.

Aufgabe 1
(4 Punkte)
Sei $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge ohne Nullteiler (mit $0 \notin S$), und sei

$$\varphi : R \longrightarrow S^{-1}R\,,\; r \longmapsto \frac{r}{1}$$

der kanonische Homomorphismus. Für jedes Ideal $I \subset R$ setzen wir

$$S^{-1}I := IS^{-1}R := \left\{ \frac{a}{s} \;:\; a \in I, s \in S \right\} \subset S^{-1}R.$$

Zeigen Sie:

a) $S^{-1}I$ ist das von $\varphi(I)$ in $S^{-1}R$ erzeugte Ideal.
b) Jedes Ideal J von $S^{-1}R$ hat die Form $J = S^{-1}I$ für ein geeignetes Ideal I von R.

Aufgabe 2
(4 Punkte)
Sei $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge (mit $0 \notin S$). Beweisen Sie:

a) Es gibt ein Ideal $I \lhd R$, das maximal ist mit der Eigenschaft $I \cap S = \varnothing$.
b) Jedes solche I ist prim.

Hinweis: Vergleiche Satz 2.15 aus der Vorlesung.

Aufgabe 3
(4 Punkte)
Ein Element $a \in R$ heißt nilpotent, falls ein $n \in \mathbb{N}$ existiert mit $a^n = 0$.
Wir definieren das Nilradikal von R als

$$\mathrm{Nil}(R) := \left\{ a \in R \;:\; a \text{ ist nilpotent} \right\}.$$

Zeigen Sie:

a) $\mathrm{Nil}(R)$ ist ein Ideal von R.
b) $\mathrm{Nil}(R)$ ist der Durchschnitt aller Primideale von R.

Hinweis: Verwenden Sie Aufgabe 2.

Aufgabe 4
(4 Punkte)
Seien $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$ paarweise teilerfremd. Zeigen Sie:

a) Das System simultaner Kongruenzen $x \equiv x_i \pmod{a_i}$ $(i = 1, \ldots, n)$ ist für beliebige Zahlen $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{Z}$ lösbar.
b) Ist x eine Lösung, so ist diese eindeutig bestimmt modulo $a_1 \cdots a_n$. Die Gesamtheit der Lösungen bildet also eine Restklasse des Typs $x + a_1 \cdots a_n \cdot \mathbb{Z}$.

Abgabe: Montag, 31. Oktober 2011, 10 Uhr in die Briefkästen auf F4.