Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Sebastian Wenzel
WS 2011/12

Übungen zur Vorlesung Algebra

Blatt 10
Operationen von Gruppen

Aufgabe 1
(5 Punkte)

In dieser Aufgabe sollen Sie den Fall $p = 2$ von Theorem III.2.14 beweisen. Sei $r \geq 2$, $\varphi : (\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})^\times \longrightarrow (\mathbb{Z}/4\mathbb{Z})^\times$ der von der Restklassenabbildung induzierte Homomorphismus und $H = \ker(\varphi)$. Zeigen Sie:

a) $\sharp H = 2^{r-2}$

b) $H = \langle \overline{5} \rangle$

c) Es ist $\langle \overline{-1} \rangle \cap \langle \overline{5} \rangle = \langle \overline{1} \rangle$ in $(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})^\times$.

d) $(\mathbb{Z}/2^r\mathbb{Z})^\times$ ist isomorph zu $C_2 \times C_{2^{r-2}}$.

Aufgabe 2
(4 Punkte)

Für eine Gruppe G mit $G \neq 1$ betten Sie $G \times G$ als Untergruppe vom Index 2 in eine Gruppe H ein, so dass die Faktoren $G \times 1$ und $1 \times G$ in H zueinander konjugiert sind.

Aufgabe 3
(3 Punkte)

Eine Gruppe G der Ordnung 55 operiere auf einer Menge X mit 34 Elementen. Zeigen Sie: G hat einen Fixpunkt in X.

Aufgabe 4
(4 Punkte)

Sei G eine endliche Gruppe, X eine endliche G-Menge, und für $g \in G$ sei $\mathrm{Fix}(g) := \{x \in X \ : \ x^g = x\}$. Zeigen Sie: Es gibt genau

$$\frac{1}{\sharp G} \sum_{g \in G} \sharp \mathrm{Fix}(g)$$

verschiedene G-Bahnen in X.

Hinweis: Zählen Sie die Elemente der Menge $\{(g, x) \in G \times X \ : \ x^g = x\}$ auf zwei verschiedene Weisen.

Zusatzaufgaben:

Aufgabe 5
(4 Punkte)
Zeigen Sie: Jede Gruppe der Ordnung 15 ist zyklisch.

Aufgabe 6
(4 Punkte)
Sei Q_8 die von den Matrizen

$$E := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\ I := \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & -i \end{pmatrix},\ J := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \text{ und } K := \begin{pmatrix} 0 & i \\ i & 0 \end{pmatrix}$$

erzeugte Untergruppe von $\mathrm{GL}_2(\mathbb{C})$. Sie heißt die *gewöhnliche Quaternionengruppe.*

a) Zeigen Sie: Q_8 ist eine Gruppe der Ordnung 8.
b) Bestimmen Sie die Elementordnungen, die Untergruppen und das Zentrum von Q_8.
c) Zeigen Sie: Jede Untergruppe von Q_8 ist normal.
d) Zu welcher Ihnen bekannten Gruppe ist $\mathrm{Inn}(Q_8)$ isomorph?

Abgabe: Montag, 9. Januar 2012, 14 Uhr in die Briefkästen auf F4.