Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Sebastian Wenzel
WS 2011/12

Übungen zur Vorlesung Algebra

Blatt 11
Sylow-Sätze

Aufgabe 1
(4 Punkte)
Seien G, H endliche Gruppen und $p \in \mathbb{N}$ prim.

a) Ist S eine p-Sylowgruppe von G mit $(G : S) < p$, so ist $S \lhd G$.
b) Ist $\varphi : G \to H$ ein Homomorphismus und $S \leq H$ eine p-Sylowgruppe von H, so ist $\varphi^{-1}(S)$ eine p-Sylowgruppe von G.
c) Ist G abelsch, so ist G isomorph zum direkten Produkt seiner Sylowgruppen.

Aufgabe 2
(4 Punkte)
Zeigen Sie, dass es genau 5 Isomorphietypen von Gruppen der Ordnung 20 gibt.

Aufgabe 3
(4 Punkte)
Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung 1295 zyklisch ist.

Aufgabe 4
(4 Punkte)
Sei G eine Gruppe. Für $x, y \in G$ ist $[x, y] := x^{-1}y^{-1}xy$ der *Kommutator* von x und y. Die von den Kommutatoren erzeugte Untergruppe $G' := \langle [x, y] : x, y \in G \rangle \leq G$ ist die *Kommutatorgruppe* von G. Zeigen Sie:

a) G' ist normal in G und besteht aus Produkten von Kommutatoren.
b) Ist $\varphi : G \to H$ ein surjektiver Homomorphismus, so ist $\varphi(G') = H'$.
c) Genau dann ist $G' = 1$, wenn G abelsch ist.
d) G' ist der kleinste Normalteiler von G mit abelscher Faktorgruppe.

Man nennt $G^{\mathrm{ab}} := G/G'$ *die* Abelisierung *von* G.

Abgabe: Montag, 16. Januar 2012, 14 Uhr in die Briefkästen auf F4.