Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Sebastian Wenzel
WS 2011/12

Übungen zur Vorlesung Algebra

Blatt 12
Auflösbare Gruppen

Aufgabe 1
(4 Punkte)
Zeigen Sie:

a) Die Zykel (1 2) und $(1\ 2 \dots n)$ erzeugen zusammen die Gruppe S_n $(n \in \mathbb{N})$.
b) Ist $\sigma \in S_n$ von Typ $(r_1, \dots, r_k)$, so ist $\mathrm{ord}(\sigma) = \mathrm{kgV}(r_1, \dots, r_k)$.
c) Die Gruppe A_4 besitzt keine Untergruppe der Ordnung 6, obwohl 6 die Gruppenordnung teilt.
d) Leiten Sie die Klassengleichung der S_4 her.

Aufgabe 2
(5 Punkte)
Zeigen Sie, dass jede Gruppe der Ordnung höchstens 30 auflösbar ist.

Aufgabe 3
(4 Punkte)
Sei G eine endliche Gruppe. Die *Kommutatorreihe* von G ist die Folge $(G^{(i)})_{i \geq 0}$ von Untergruppen von G definiert durch $G^{(0)} := G$ und $G^{(i+1)} := (G^{(i)})'$, vgl. Blatt 11.
Zeigen Sie:

a) Ist $G = G_0 > G_1 > \cdots > G_n = 1$ eine Kompositionsreihe mit zyklischen Faktoren, so ist $G^{(i)} \leq G_i$ für alle $i \leq n$.
b) Genau dann ist G auflösbar, wenn es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $G^{(n)} = 1$.

Aufgabe 4
(3 Punkte)
Sei G eine endliche Gruppe. Zeigen Sie:

a) Ist G auflösbar und $H \leq G$, so ist auch H auflösbar.
b) Ist $G \cong \prod_{i=1}^{n} G_i$, so ist G genau dann auflösbar, wenn alle G_i auflösbar sind.
c) Ist N ein Normalteiler von G, dann ist G genau dann auflösbar, wenn N und G/N auflösbar sind.

Abgabe: Montag, 23. Januar 2012, 14 Uhr in die Briefkästen auf F4.