Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Sebastian Wenzel
WS 2011/12

Übungen zur Vorlesung Algebra

Blatt 13
Galoistheorie I

Aufgabe 1
(4 Punkte)
Sei $p \in \mathbb{N}$ prim und sei G eine transitive Untergruppe der S_p, die eine Transposition enthält. Zeigen Sie:

a) G enthält einen p-Zykel.
b) $G = S_p$.

Hinweis zur a): Betrachten Sie die Untergruppe $H := \{\sigma \in G \,:\, 1^\sigma = 1\}$.

Aufgabe 2
(4 Punkte)
Sei K ein vollkommener Körper und L/K eine algebraische Erweiterung. Jedes nichtkonstante Polynom $f \in K[X]$ habe eine Nullstelle in L. Zeigen Sie, dass L ein algebraischer Abschluss von K ist.
Hinweis: Betrachten Sie den Zerfällungskörper von $\alpha \in \bar{L}$ *über* K.

Aufgabe 3
(4 Punkte)
Seien L/K und M/K endliche Galoiserweiterungen mit $L, M \subseteq \bar{K}$, und sei φ die Abbildung

$$\varphi : \begin{cases} \mathrm{Gal}(LM/K) & \longrightarrow & \mathrm{Gal}(L/K) \times \mathrm{Gal}(M/K) \\ \sigma & \longmapsto & (\sigma|_L, \sigma|_M) \end{cases}.$$

Zeigen Sie:

a) φ ist ein injektiver Gruppenhomomorphismus.
b) Genau dann ist φ ein Isomorphismus, wenn $L \cap M = K$.

Aufgabe 4
(4 Punkte)
Sei K ein Körper der Charakteristik ungleich 2 und seien $a, b \in K$ derart, dass a, b und ab keine Quadrate in K sind. Wir bezeichnen mit $\sqrt{a}$ und $\sqrt{b}$ Quadratwurzeln aus a bzw. b in $\bar{K}$.

a) Zeigen Sie, dass $L := K(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ galoissch über K ist.
b) Bestimmen Sie $\mathrm{Gal}(L/K)$.
c) Bestimmen Sie alle Zwischenkörper von L/K.

Abgabe: Montag, 30. Januar 2012, 14 Uhr in die Briefkästen auf F4.