Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Sebastian Wenzel
WS 2011/12

Übungen zur Vorlesung Algebra

Blatt 14
Galoistheorie II

Aufgabe 1
(4 Punkte)

a) Sei $p \in \mathbb{N}$ prim und $f \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel vom Grad p. Es habe f genau $p-2$ reelle Nullstellen. Zeigen Sie: $\mathrm{Gal}(f/K) = S_p$.
b) Finden Sie ein Polynom $f \in \mathbb{Q}[X]$ vom Grad 5 mit Galoisgruppe S_5.

Hinweis zur a): Verwenden Sie Aufgabe 1 auf Blatt 13.

Aufgabe 2
(3 Punkte)
Sei K ein Körper der Charakteristik p, und sei $n \in \mathbb{N}$ mit $p \nmid n$. Wir nehmen an, dass K eine primitive n-te Einheitswurzel enthält. Sei $a \in K$, und sei $\alpha \in \bar{K}$ eine Nullstelle von $f := X^n - a$. Zeigen Sie: Die Erweiterung $K(\alpha)/K$ ist galoissch vom Grad $d|n$, und $\mathrm{Gal}(K(\alpha)/K)$ ist zyklisch.

Aufgabe 3
(4 Punkte)
Sei K ein Körper, $f \in K[X]$ separabel und irreduzibel, und L der Zerfällungskörper von f über K.

a) Ist $\alpha \in L$ und E ein Zwischenkörper von L/K, der unter der Bedingung $\alpha \notin E$ bezüglich Inklusion maximal ist, so ist $\mathrm{Gal}(L/E)$ zyklisch.
b) Ist $\mathrm{Gal}(L/K)$ abelsch, so ist $L = K(\alpha)$ für jede Nullstelle $\alpha \in L$ von f.

Aufgabe 4
(5 Punkte)
Seien $a, b \in \mathbb{Q}$ derart, dass $f := X^4 + aX^2 + b \in \mathbb{Q}[X]$ irreduzibel ist, und sei K der Zerfällungskörper von f über $\mathbb{Q}$. Sei weiter α eine Nullstelle von $g := X^2 + aX + b$. Zeigen Sie:

a) Es ist $[K : \mathbb{Q}] = 4$ oder 8, und $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q})$ ist isomorph zu C_4, V_4 oder D_4.
b) Die Erweiterung ist genau dann vom Grad 4, wenn b ein Quadrat in $\mathbb{Q}(\alpha)$ ist.
c) Genau dann ist b ein Quadrat in $\mathbb{Q}(\alpha)$, wenn b oder $b(a^2 - 4b)$ Quadrate in $\mathbb{Q}$ sind.
d) Ist b ein Quadrat in $\mathbb{Q}$, dann ist $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q}) \cong V_4$.
e) Ist $b(a^2 - 4b)$ ein Quadrat in $\mathbb{Q}$, dann ist $\mathrm{Gal}(f/\mathbb{Q}) \cong C_4$.

Abgabe: Montag, 6. Februar 2012, 14 Uhr in die Briefkästen auf F4.