Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Sebastian Wenzel
WS 2011/12

Übungen zur Vorlesung Algebra

Blatt 3
Faktorielle Ringe

Sei stets R ein kommutativer Ring mit 1.

Aufgabe 1
(4 Punkte)
Sei R nullteilerfrei, $S \subset R$ eine multiplikative Teilmenge mit $0 \notin S$ und $p \in R$ ein Primelement. Zeigen Sie:

a) Gilt $p \mid s$ für ein $s \in S$, so ist $\frac{p}{1} \in \left(S^{-1}R\right)^{\times}$.
b) Gilt $p \nmid s$ für alle $s \in S$, so ist $\frac{p}{1}$ ein Primelement von $S^{-1}R$.
c) Ist R faktoriell, so auch $S^{-1}R$.

Aufgabe 2
(4 Punkte)
Sei $A := \left\{f \in \mathbb{R}[X] \ : \ f'(0) = f''(0) = 0\right\} \subset \mathbb{R}[X]$. Zeigen Sie:

a) A ist ein Teilring von $\mathbb{R}[X]$.
b) A ist nicht faktoriell.

Aufgabe 3
(4 Punkte)
Sei R ein faktorieller Ring in dem sich der ggT von je 2 Elementen $a, b \in R$ als R-Linearkombination von a und b schreiben lässt. Zeigen Sie:

a) $(a_1, \ldots, a_n) = (\mathrm{ggT}(a_1 \ldots, a_n)) \quad (\forall a_1, \ldots, a_n \in R)$
b) R ist ein Hauptidealring.

Hinweis: Verwenden Sie, dass es in R keine unendlichen Teilerketten gibt.

Erinnerung/Definition:
Seien $a_1, \ldots, a_n \in R$, dann ist $(a_1, \ldots, a_n) := \sum_{i=1}^n Ra_i := \left\{ \sum_{i=1}^n r_i a_i \ : \ r_i \in R\right\}$, das von $a_1, \ldots, a_n$ in R erzeugte Ideal. Es ist das kleinste Ideal von R, das $a_1, \ldots, a_n$ enthält.

Aufgabe 4
(4 Punkte)
Sei $p \in \mathbb{Z}$ prim, sei $v_p : \mathbb{Q} \longrightarrow \mathbb{Z} \cup \{\infty\}$ die p-adische Bewertung auf $\mathbb{Q}$. Zeigen Sie:

a) Die Menge $A := \left\{a \in \mathbb{Q} \ : \ v_p(a) \geq 0\right\}$ ist ein Teilring von $\mathbb{Q}$.
b) A besitzt nur ein maximales Ideal I.
c) A ist isomorph zur Lokalisierung $\mathbb{Z}_{(p)}$.

Abgabe: Montag, 7. November 2011, 14 Uhr in die Briefkästen auf F4.