Universität Konstanz
Fachbereich Mathematik und Statistik
Jun.-Prof. Dr. Arno Fehm
Sebastian Wenzel
WS 2011/12

Übungen zur Vorlesung Algebra

Blatt 4
Satz von Gauß und Irreduzibilitätskriterien

Aufgabe 1
(4 Punkte)
Zeigen Sie, dass folgende Polynome irreduzibel sind:

a) $X^4 + 3X^3 + X^2 - 2X + 1 \in \mathbb{Q}[X]$
b) $2X^4 + 200X^3 + 2000X^2 + 20000X + 20 \in \mathbb{Q}[X]$
c) $X^2Y + XY^2 - X - Y + 1 \in \mathbb{Q}[X, Y]$

Aufgabe 2
(3 Punkte)
Sei $f = \sum_{i=0}^{n} a_i X^i \in \mathbb{Z}[X]$ ein Polynom mit $\deg(f) \geq 1$. Zeigen Sie:

a) Ist f normiert und $\alpha \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von f, so ist $\alpha \in \mathbb{Z}$.
b) Ist f irreduzibel in $\mathbb{Z}[X]$, so ist f auch irreduzibel in $\mathbb{Q}[X]$.
c) Sei $\alpha = \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}$ eine Nullstelle von f mit $p, q \in \mathbb{Z}$ teilerfremd, dann gilt $p \mid a_0$ und $q \mid a_n$.

Aufgabe 3
(6 Punkte)
Sei $f = 23X^5 - 13X^4 - 38X^3 + 24X^2 + 35X + 10 \in \mathbb{Z}[X]$.

a) Erstellen Sie eine Liste der irreduziblen Polynome vom Grad ≤ 2 in $\mathbb{F}_2[X]$ und $\mathbb{F}_3[X]$.
b) Zerlegen Sie f in $\mathbb{F}_2[X]$ und $\mathbb{F}_3[X]$ in seine irreduziblen Faktoren.
c) Ist f irreduzibel über $\mathbb{Q}$? Begründen Sie Ihre Antwort.

Aufgabe 4
(3 Punkte)
Sei R ein faktorieller Ring. Zeigen Sie: Ein Polynom $f \in R[X]$ mit $\deg(f) \geq 1$ ist genau dann irreduzibel, wenn f für jedes Primelement $p \in R$ in $R_{(p)}[X]$ irreduzibel ist.

Abgabe: Montag, 14. November 2011, 14 Uhr in die Briefkästen auf F4.